מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	(3)	(1)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(2)	(4)	(3)	(1)	(3)	(3)	(3)	(2)	(2)

שאלה	21	22	23	24	25
תשובה	(1)	(1)	(4)	(2)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

1. **השאלה**: שלמה חילק x בלונים בין 5 ילדיו שווה בשווה.
הילד הבכור חילק את כל הבלונים שקיבל בין 3 מחבריו שווה בשווה,
הילד השני חילק את כל הבלונים שקיבל בין 2 מחבריו שווה בשווה,
ושאר הילדים שמרו את הבלונים לעצמם.

ערכו של x יכול להיות -

פיתרון:
נתון כי שלמה חילק את הבלונים שווה בשווה בין 2 ילדים, לכן מספר הבלונים הכולל חייב להתחלק ב-5 ללא שארית. מכיוון שידוע כי הילד הבכור חילק את הבלונים שלו בין 3 מחבריו שווה בשווה, הרי שמספר הבלונים שברשותו חייב להתחלק ב-3 ללא שארית. כמו כן, ידוע כי הילד השני חילק את הבלונים שקיבל בין 2 מחבריו שווה בשווה, ומכאן שמספר הבלונים שברשותו חייב להתחלק ב-2 ללא שארית.
מאחר וכל האחים קיבלו מספר שווה של בלונים הרי שכמות הבלונים הכוללת חייבת להתחלק גם ב-5, גם ב-3 וגם ב-2 ללא שארית, או במילים אחרות, כמות הבלונים הכוללת בהכרח מתחלקת ב-30 $(5\cdot 3\cdot 2=)$.
התשובה היחידה שמתחלקת ב-30 ללא שארית היא תשובה מספר (3).

תשובה (3).

---

2. **השאלה**: $\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{5}=\ ?$

פיתרון: ניתן לצמצם את הביטוי (בזהירות):

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{5}=\frac{{}^{1}\cancel{5}}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{\cancel{5}_{1}}=\frac{1}{{}_{1}\cancel{3}}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\cdot\frac{14}{1}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{1}=\frac{4\cdot 14}{2\cdot 7}=\frac{4\cdot\cancel{14}^{1}}{{}_{1}\cancel{14}}=4$$

תשובה (4).

---

3. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם הנקודה O היא מרכז המעגל, ו- AD הוא קוטר במעגל.

נתון: $\angle COD = 150°$
$AB \| CD$

$\alpha = ?$

פיתרון: ידוע כי הישרים AB ו- CD הינם ישרים מקבילים, ולכן: $\angle ADC = \angle BAD = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים). כמו כן, $OC = OD$ מכיוון ששניהם רדיוסים במעגל, ומכאן שהמשולש COD הוא משולש שווה שוקיים. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו, ולכן:
$\angle OCD = \angle ODC = \alpha$. סכום הזוויות הפנימיות בכל משולש שווה ל- $180°$, ומכאן ש:
$150° + \alpha + \alpha = 180°$. נחסר 150 משני האגפים ונקבל: $2\alpha = 30°$.
נחלק ב-2 את שני האגפים ונקבל: $\alpha = 15°$.

תשובה (2).

---

4. **פיתרון:** ספרת האחדות המתקבלת כתוצאה ממכפלת הספרה B ב-2 שווה ל-0. הספרות היחידות שכאשר נכפול אותן ב-2 נקבל 0 הן: 0 ו-5. נתון כי האותיות A ו- B מייצגות ספרות בין 1 ל-9 ולכן B לא יכולה להיות שווה ל-0, ומכאן שבוודאות: $B = 5$.
כעת ידוע לנו כי תוצאת התרגיל הנתון היא 50. כעת עלינו לבדוק מיהו המספר שכאשר מכפילים אותו ב-2, נקבל 50, התשובה היא 25. קיבלנו כי $A = 2$ ו- $B = 5$.
ולכן: $B - A = 5 - 2 = 3$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה**: נתון: $\frac{x}{x+y} = 3x$, $x \neq 0$

$x + y = ?$

פיתרון: על מנת לפשט את המשוואה נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $(x+y)$ ונקבל: $x = 3x(x+y)$.
מכיוון שנתבקשנו למצוא לכמה שווה הביטוי $(x+y)$, אין צורך לפתוח את הסוגריים, אלא עלינו לבודד את הביטוי המבוקש.

נחלק את שני האגפים ב- x ונקבל: $1 = 3(x+y)$. נחלק את שני האגפים ב-3 ונקבל: $\frac{1}{3} = (x+y)$.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: מחיר כרטיס להצגה במועדון השכונתי הוא 10 שקלים.
משפחת כהן קנתה 7 כרטיסים והשתמשה רק ב-6 מהם.
למעשה, משפחת כהן שילמה _____ שקלים עבור כל אחד מ-6 הכרטיסים שבהם השתמשה.

פיתרון: משפחת כהן קנתה 7 כרטיסים במחיר של 10 שקלים לכל כרטיס, לכן בסה"כ שילמה 70 שקלים $(= 7 \times 10)$. בפועל השתמשה המשפחה רק ב-6 כרטיסים ולכן המחיר ששילמה לכל כרטיס הוא $11\frac{2}{3}$ שקלים $\left(= \frac{70}{6}\right)$.

תשובה (4).

.7 **השאלה**: נתון: $1 < x$, $y \neq 0$

$$x^y = \frac{1}{x^{|y|}}$$

מנתונים אלה נובע **בהכרח** כי -

פיתרון:

נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $x^{|y|}$ ונקבל: $x^y \cdot x^{|y|} = 1$.

על פי חוקי חזקות, כאשר ישנו כפל בין שני איברים בעלי בסיס משותף, יש לחבר את המעריכים, נעשה זאת ונקבל: $x^{y+|y|} = 1$. מאחר ונתון כי x עצמו אינו שווה ל-1, האפשרות היחידה לקיים את המשוואה היא כאשר המעריך של x שווה לאפס (נזכור כי כל מספר בחזקת אפס שווה ל-1). מכאן ניתן לומר כי: $y + |y| = 0$. כל ביטוי בערך מוחלט הוא חיובי (פרט לאפס) ולכן מכיוון שנתון כי y שונה מ-0, הרי שעל מנת שהסכום יתאפס, y עצמו צריך להיות שלילי (שהרי לא יתכן שסכום של שני מספרים חיוביים יהיה שווה לאפס).

תשובה (4).

.8 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מחומש משוכלל.

$\alpha = ?$

פיתרון: אם נחסום את המחומש המשוכלל בתוך מעגל, הזווית α תהיה זווית היקפית במעגל, הנשענת על מיתר שהוא למעשה צלע המחומש. לצורך מציאת הזווית ההיקפית נסתכל דווקא על הזוויות המרכזיות במעגל. אם נמתח ממרכז המעגל 5 זוויות מרכזיות שוות, כך שכל אחת נשענת על צלע אחת של המחומש, גודלה של כל זווית מרכזית יהיה $72°$ $\left(= \frac{360°}{5}\right)$.

זווית היקפית הנשענת על אותו מיתר (צלע המחומש) תהיה שווה למחצית מגודלה של הזווית המרכזית, כלומר ל- $36°$ $\left(= \frac{72°}{2}\right)$.

תשובה (3).

.9 **השאלה**: סכום משכורותיהם של ארז, ברכה וגלעד גדול פי 5 ממשכורתו של דותן.

פי כמה גדול ממוצע משכורותיהם של ארז, ברכה וגלעד ממשכורתו של דותן?

פיתרון: נסמן את משכורתו של ארז באות E, את משכורתה של ברכה באות B , משכורתו של גלעד באות G ואת משכורתו של דותן באות D.

נתרגם את הנתונים בשאלה למשוואות: אם סכום משכורותיהם של ארז, ברכה וגלעד גדול פי 5 ממשכורתו של דותן, הרי שאם נכפיל את משכורתו של דותן פי 5, משכורתו תהיה שווה לסכום המשכורות של ארז, ברכה וגלעד. נכתוב: $5D = E + B + G$.

שאלו אותנו פי כמה גדול **ממוצע** משכורותיהם של ארז, ברכה וגלעד $\left(\frac{E+B+G}{3}\right)$ ממשכורתו של דותן. במילים אחרות, אנו מחפשים את היחס בין ממוצע המשכורות של השלושה למשכורתו של דותן: $? = \frac{\frac{E+B+G}{3}}{D}$. נציב $5D$ במקום סכום המשכורות (לפי המשוואה שכתבנו קודם לכן) ונקבל: $? = \frac{\frac{5D}{3}}{D}$.

נפשט את הביטוי ונקבל: $\frac{5}{3} = \frac{5\cancel{D}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{D}} = \frac{\frac{5D}{3}}{D}$.

תשובה (1).

שאלות הסקה מתרשים (שאלות 10-13)

.10 **השאלה**: מתוך המשכורות הממוצעות של קבוצות הגברים שרמת השכלתם נמוכה מ-16 שנות לימוד, מה המשכורת הממוצעת הגבוהה ביותר (בדולרים) בשנים המתוארות בתרשים?

פיתרון: עלינו לחפש בגרף המתייחס לגברים (הגרף השמאלי) את הנקודה הגבוהה ביותר מבין כל קבוצות הגברים שאר אינה שייכת לקבוצת הגברים שרמת השכלתם היא +16 שנות לימוד. הנקודה הזו נמצאת על הקו של גברים בעלי 13 עד 15 שנות לימוד בשנת 1972, והמשכורת היא 9,000 דולר.

תשובה (3).

.11 **השאלה**: באיזו שנה, ההפרש בין המשכורת הממוצעת של נשים שרמת השכלתן +16 ובין המשכורת הממוצעת של נשים שרמת השכלתן 0-8 היה **הקטן** ביותר?

פיתרון: נביט על שתי העקומות המתאימות בגרף הימני. עלינו למצוא את השנה בה ההפרש בין שתי העקומות הוא הקטן ביותר. זה קורה בשנת 1974, כאשר המשכורת הממוצעת של נשים שרמת השכלתן +16 היא הנמוכה ביותר (כ- 5,500 דולר), והמשכורת הממוצעת של נשים שרמת השכלתן 0-8 היא הגבוהה ביותר (כ-3,500 דולר).

תשובה (4).

.12 **השאלה:** מתוך האפשרויות הבאות, בין אילו שתי שנים עוקבות חלה **עלייה** במשכורת הממוצעת של גברים שרמת השכלתם 12 שנות לימוד או פחות, בעוד שבמשכורת הממוצעת של גברים שרמת השכלתם 13 שנות לימוד או יותר חלה **ירידה**?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות.
תשובה (1): בין 1971 ל-1972. נביט בגרף השמאלי כמובן, מפני שהוא מתאר את משכורות הגברים. בין השנים הללו המשכורת הממוצעת של הגברים שרמת השכלתם 12 שנות לימוד או פחות נמצאת בעלייה, אולם מכיוון שגם משכורתם הממוצעת של הגברים שרמת השכלתם 13 שנות לימוד או יותר, נמצאת בעלייה בשנים אלו, תשובה זו אינה נכונה.
תשובה (2): בין 1972 ל-1973. בין השנים הללו המשכורת הממוצעת של הגברים שרמת השכלתם 12 שנות לימוד או פחות נמצאת בעלייה, משכורתם הממוצעת של הגברים שרמת השכלתם 13 שנות לימוד או יותר, נמצאות שתיהן בירידה, ולכן זו התשובה הנכונה ואין צורך להמשיך לבדוק את שאר התשובות.

תשובה (2).

.13 **השאלה**: איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה בשום שנה מהשנים המצוינות בתרשים?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:
תשובה (1): ככל שרמת ההשכלה של הנשים גבוהה יותר, המשכורת הממוצעת שלהן גבוהה יותר. ניתן לראות מתוך הסתכלות בגרף הימני, כי טענה זו נכונה בכל השנים המתוארות בגרף. ככל שרמת ההשכלה גבוהה יותר, כך העקומה נמצאת גבוהה יותר בגרף, ומכאן שהמשכורת הממוצעת גבוהה יותר. זו אינה התשובה הנכונה.
תשובה (2): ככל שרמת ההשכלה של הגברים גבוהה יותר, המשכורת הממוצעת שלהם גבוהה יותר. ניתן לראות מתוך הסתכלות בגרף השמאלי, כי טענה זו נכונה בכל השנים המתוארות בגרף. ככל שרמת ההשכלה גבוהה יותר, כך העקומה נמצאת גבוהה יותר בגרף, ומכאן שהמשכורת הממוצעת גבוהה יותר. זו אינה התשובה הנכונה.
תשובה (3): בכל רמת השכלה, המשכורת הממוצעת של הגברים גבוהה מהמשכורת הממוצעת של הנשים באותה רמת השכלה. טענה זו נכונה בכל השנים המתוארות בגרפים. מהתבוננות בגרף ניתן לראות כי עקומת המשכורות של גברים בעלי רמת השכלה מסוימת תהיה תמיד גבוהה מעקומת הנשים בעלות אותה רמת השכלה, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה. לאחר שפסלנו 3 תשובות ניתן לדעת בוודאות שתשובה (4) היא התשובה הנכונה.

<u>תשובה (4)</u> : בכל רמת השכלה, המשכורת הממוצעת של הנשים גבוהה מהמשכורת הממוצעת של הגברים באותה רמת השכלה. טענה זו הפוכה לטענה המוצגת בתשובה (3) ולפיכך לאחר שראינו כי הטענה בתשובה (3) היא נכונה, ברור כי טענה זו אינה נכונה.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 14-19)

.14 **השאלה** : יובל ועדי יצאו מהנקודה C לשני כיוונים מנוגדים (ראו סרטוט).

מהירותו של יובל גדולה פי $1\frac{1}{2}$ ממהירותה של עדי.

הדרך מ- C ל- A ארוכה פי 2 מהדרך מ- C ל- B.

$$\frac{\text{הזמן שהיה דרוש ליובל להגיע לנקודה B}}{\text{הזמן שהיה דרוש לעדי להגיע לנקודה A}} = ?$$

פיתרון: <u>דרך א׳ : הצבת דוגמה מספרית</u>.

מכיוון שכל התשובות מספריות ניתן לפתור את השאלה באמצעות הצבת דוגמה מספרית.

נתון כי מהירותו של יובל גדולה פי $1\frac{1}{2}$ ממהירותה של עדי. נניח כי מהירותו של יובל היא 3 קמ״ש ומהירותה של עדי 2 קמ״ש.

הדרך מ- C ל-A ארוכה פי 2 מהדרך מ-C ל-B. נציב כי הדרך מ-C ל-B היא 15 ק״מ (מספר שמתחלק במהירותו של יובל שהיא 3) וכי הדרך מ-C ל- A היא 30 ק״מ.

כעת נבדוק מה הזמן שלקח לכל אחד מהם לעבור את הדרך.

אם אורך הדרך מ- C ל-B היא 15 ק״מ ומהירותו של יובל היא 3 קמ״ש, הרי שיובל יעבור את הדרך ב-5 שעות $\left(\frac{15}{3}=\right)$.

אם אורך הדרך מ- C ל-A היא 30 ק״מ ומהירותה של עדי היא 2 קמ״ש, הרי שעדי תעבור את הדרך ב-15 שעות $\left(\frac{30}{2}=\right)$.

$$\frac{\text{הזמן שהיה דרוש ליובל להגיע לנקודה B}}{\text{הזמן שהיה דרוש לעדי להגיע לנקודה A}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

<u>דרך ב׳ : יחסים</u>

היחס בין מהירותו של יובל למהירותה של עדי הוא 3:2. מכיוון שיש יחס הפוך בין מהירות לזמן, הרי שאם יובל ועדי היו עוברים **דרך שווה** אז יחס הזמנים שלהם היה 2:3 (מכיוון שיובל הלך יותר מהר, הזמן שלקח לו הוא קצר יותר). אולם, נתון כי הדרך שעברה עדי ארוכה פי 2 מהדרך שעבר יובל, ולכן אם תלך באותה מהירות, הזמן שלה יהיה ארוך פי 2. נכפיל פי 2 את הזמן של עדי ביחס ונקבל יחס של 2:6. לאחר צמצום יחס זה שווה ל-1:3.

תשובה (3).

.15 **השאלה** : בסרטוט שלפניכם שני ריבועים. AC הוא אלכסון בריבוע הגדול. קטע ממנו, המסומן ב- AB, הוא אלכסון בריבוע הקטן. נתון כי שטח הריבוע הקטן שווה לחצי משטח הריבוע הגדול.

מה היחס בין השטח הכהה לשטח המנוקד?

פיתרון : מכיוון שכל התשובות מספריות, נציב על ידי הצבת דוגמה מספרית.

נסמן ב-1 את השטח המנוקד, שהוא למעשה חצי משטחו של הריבוע הקטן. אם כך, שטחו של הריבוע הקטן כולו שווה ל-2. נתון כי שטח הריבוע הקטן שווה לחצי משטח הריבוע הגדול, ולכן שטח הריבוע

הגדול כולו שווה ל-4. כעת נביט בשטח הכהה, שטח זה מורכב ממשולש גדול פחות משולש קטן. המשולש הגדול שווה למחצית מהריבוע הגדול, כלומר ל-2, ואילו המשולש הקטן שווה למחצית מהריבוע הקטן, כלומר ל-1.. כלומר, השטח הכהה שווה בסך הכול ל-1 $(2-1=)$.

לסיכום, קיבלנו שגם השטח המנוקד וגם השטח הכהה שווים ל- X ולכן היחס ביניהם הוא $1:1$.

תשובה (1).

---

16. **השאלה**: נתון: $AB \| CD$

לפי נתון זה ונתוני הסרטוט,

$x = ?$

פיתרון: מכיוון שיש בסרטוט שלפנינו שני קווים מקבילים שהעבירו ביניהם X, הרי שבל הזוויות המתחלפות השוות, המשולשים ABE ו- CDE הם משולשים דומים. במשולשים דומים קיים יחס קבוע בין צלעות מתאימות. מנתוני הסרטוט אנו רואים שהיחס בין הצלעות AB ו- CD הוא 2:3, ולכן גם היחס בין הצלע AE לצלע EC שווה ל-2:3. מכאן שניתן לכתוב את המשוואה: $\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{3}$.

נכפול את שני האגפים ב-3 וב-$(x+1)$, ונקבל: $3(x-1)=2(x+1) \Leftarrow 3x-3=2x+2$, נחסר 2x משני האגפים, ונחבר 3, ונקבל: $x=5$.

תשובה (3).

הערה: ניתן להציב את גודלו של x הנתון בתשובות במשוואה שקיבלנו, כאשר ברור כי מומלץ להתחיל בהצבת התשובות ה'עגולות', ולראות כי תשובה (3) מקיימת את היחס.

---

17. **השאלה**: מספר מוגדר "מעניין" אם סכום כל המספרים הראשוניים מ-2 (כולל) ועד לאותו מספר (כולל) הוא **ראשוני**.

איזה מהמספרים הבאים הוא מספר מעניין?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות, ועל מנת להקל על החישובים נשנה את סדר הבדיקה ונבדוק את התשובות מהמספר הקטן ביותר למספר הגדול ביותר.

תשובה (3): 3. המספרים הראשוניים מ- 2 עד 3 הם 2 ו-3 וסכומם שווה ל-5. $(2+3=)$. 5 הוא מספר ראשוני ולכן המספר 3 עונה על ההגדרה של מספר מעניין. זו התשובה הנכונה, אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (3).

---

18. **השאלה**: ABC הוא משולש שכל זוויותיו חדות. מסמנים נקודה D על הצלע BC, כך שהיא הנקודה הקרובה ביותר ל- A מכל הנקודות שעל הצלע BC.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון: באופן כללי, הקו הקצר ביותר האפשרי המחבר בין נקודה כלשהי לקו ישר הוא קו היוצא מן הנקודה אל הישר, כך שהוא **מאונך** לישר. נתון כי הנקודה D היא הנקודה הקרובה ביותר ל- A מכל הנקודות שעל הצלע BC, כלומר הקו AD הוא הקו הקצר ביותר האפשרי שמחבר את הנקודה A עם הקטע BC, ולכן מתחייב כי AD מאונך ל- BC. מאחר והקטע DC הוא חלק מהקטע BC, הרי ש- AD בהכרח מאונך גם ל- DC ולכן תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

הערה: תשובות (1) ו- (2) מתקיימות רק כאשר המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים, אך זה לא נתון בשאלה ולכן לא מתחייב.

תשובה (3).

---

19. **השאלה**: ירון קנה חולצה ב-80% ממחירה המקורי.
אילו היה מחכה שבוע, היה ירון משלם 40% ממחירה המקורי של החולצה ועוד תוספת של 40 שקלים, ובכך היה חוסך 25% **מהסכום ששילם**.

מה מחירה המקורי של החולצה (בשקלים)?

פיתרון: דרך א': בדיקת התשובות המוצעות
בבואנו לבדיקת התשובות, עלינו לחשוב איזו תשובה תהיה פשוטה ביותר לבדיקה ולהתחיל ממנה. התשובות הן למעשה המחיר המקורי של החולצה, ועל מנת לדעת באיזה מחיר קנה ירון את החולצה עלינו לחשב כמה הם 80% ממחירה המקורי, לכן נבחר בתשובה שקל לחשב 80% ממנה.

תשובה (2): 200. 10% מ-200 הם 20. ומכאן ש-80% מ-200 הם 160 $(=8\cdot 20)$, כלומר ירון קנה את החולצה ב-160 שקלים.
לפי נתוני השאלה, אילו היה ירון מחכה שבוע, היה משלם 40% ממחירה המקורי של החולצה.
40% מ-200 הם 80 שקלים(4 פעמים 20 שקלים) ועוד תוספת של 40 שקלים. כלומר בסך הכול היה ירון משלם על החולצה 120 שקלים $(=80+40)$.

נתון בשאלה שבכך היה חוסך ירון 25% **מהסכום ששילם**, נבדוק האם נתון זה מתקיים:
אם ירון היה מחכה שבוע היה חוסך בסך הכול 40 שקלים $(=160-120)$. האם 40 שקלים מהווים 25% מהסכום ששילם, כלומר מ-160 שקלים? התשובה חיובית. מכיוון ש-40 שקלים מהווים $\frac{1}{4}$ מ-160 שקלים, ו- $\frac{1}{4}$ הם 25%, הרי שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': אלגברה

על פי הנתונים, ההפרש בין המחיר שבו קנה ירון את החולצה לבין המחיר שבו היה קונה אותה לו היה מחכה שבוע, מהווה 25% מהמחיר שבו קנה את החולצה.
נסמן ב-x את המחיר המקורי של החולצה ונכתוב את המשוואה:

$$\frac{80}{100}\cdot x-\left(\frac{40}{100}\cdot x+40\right)=\frac{25}{100}\cdot\left(\frac{80}{100}\cdot x\right)$$

נצמצם את השברים ונקבל: $\frac{4}{5}\cdot x-\left(\frac{2}{5}\cdot x+40\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot x\right)$

נפתח סוגריים באגף השמאלי ונקבל: $\frac{4}{5}\cdot x-\frac{2}{5}\cdot x-40=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot x\right)$ ⇐ $\frac{2}{5}\cdot x-40=\frac{1}{5}x\cdot$

כדי להיפטר מהמכנים, נכפול את שני האגפים ב-5 ונקבל: $2x-200=x$

נחסר x ונחבר 200 לשני האגפים, ונקבל: $x=200$.

תשובה (2).

השוואות כמותיות (שאלות 20-25)

	טור א	טור ב	מידע נוסף
20. השאלה:	השטח הכהה	השטח הכהה	$R = 2r$ $\alpha = 2\beta$ הנקודות המודגשות הן מרכזי המעגלים.

פיתרון: <u>דרך א׳: אלגברה</u>
השטחים הכהים בשני הטורים הם שטחי גזרות במעגל. נתרגם את הטורים לביטויים מתמטיים לפי הנוסחה לחישוב שטח גזרה ונקבל:

טור א	טור ב
$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$	$\frac{\beta}{360°} \cdot \pi R^2$

נציב בטורים את שתי המשוואות מהמידע הנוסף ונקבל:

טור א	טור ב
$\frac{2\beta}{360°} \cdot \pi r^2$	$\frac{\beta}{360°} \cdot \pi (2r)^2$

נכפול את שני האגפים ב-360, ונקבל:

טור א	טור ב
$2\beta \cdot \pi r^2$	$\beta \cdot \pi 4r^2$

נחלק את שני האגפים ב- $2\beta \cdot \pi r^2$ ונקבל:

טור א	טור ב
1	2

קיבלנו שטור ב׳ גדול מטור א׳.

<u>דרך ב׳: יחסים</u>
כאשר מגדילים את רדיוסו של מעגל פי 2, שטחו גדל פי 4, ולכן שטחו של העיגול בטור ב׳ גדול פי 4 משטחו של העיגול בטור א׳. לעומת זאת, כאשר מגדילים זווית מרכזית פי 2, שטח הגזרה המתאימה לה גדלה גם היא פי 2. לסיכום: גודלו של שטח העיגול בטור ב׳ גדול פי 4, אך הגזרה המסומנת בו קטנה פי 2, לכן בסך הכל השטח הכהה בטור ב׳ גדול פי 2 מהשטח הכהה בטור א׳.

תשובה (2).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
21. השאלה:	ההסתברות ששתי החיות הן מסוגים שונים	$\frac{1}{2}$	בכובע קסמים יש 6 ארנבים ו-6 יונים. שולפים מהכובע באקראי שתי חיות בזו אחר זו וללא החזרה.

טור א׳: נחשב את ההסתברות ששתי החיות הן מסוגים שונים. לפנינו שתי שליפות בסך הכל, ואנו רוצים שבשתי השליפות יצאו חיות שונות זו מזו. בשליפה הראשונה אין חשיבות לאיזו חיה תצא, מכיוון שאם יצא ארנב, בשליפה הבאה תצא יונה ולהיפך. לכן, בשליפה הראשונה אנחנו רוצים לשלוף חיה כלשהי, ולמעשה מותר לנו לשלוף כל אחת מ- 12 החיות שנמצאות בכובע, ההסתברות לכך היא 1 $\left(=\frac{12}{12}\right)$.

בשליפה השניה עלינו לשלוף חיה **השונה** מהחיה שכבר נמצאת בחוץ, נזכור שלא הוצאנו עדיין חיה מהסוג הזה ולכן ישנן 6 חיות כאלה בכובע, מתוך 11 חיות בסך הכל אשר נותרו בכובע (חיה אחת הוצאנו בשליפה הראשונה ולא החזרנו). לכן, ההסתברות להוציא בשליפה השניה חיה השונה מהחיה שנבחרה בשליפה הראשונה היא $\frac{6}{11}$. בסה״כ ההסתברות הרצוייה בטור א׳ היא: $1\cdot\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$. קיבלנו בטורים:

<u>טור א</u>	<u>טור ב</u>
$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{2}$

קיבלנו שטור א׳ גדול יותר מטור ב׳.

תשובה (1).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
22.	10	y	$0 < x, y$ $30 < x - y$ $x + y < 50$

מידע נוסף:

<u>דרך א׳: הצבת דוגמה מספרית</u>

על פי המידע הנוסף x ו-y הם מספרים חיוביים אשר סכומם קטן מ-50 וההפרש ביניהם גדול מ-30.

נבדוק האם ניתן להשוות בין הטורים או במילים אחרות האם y יכול להיות שווה ל-10.

אם y שווה ל-10, הרי שעל מנת שסכום שני המספרים יהיה קטן מ-50, x בהכרח קטן מ-40.

אם y שווה ל-10 ו-x קטן מ-40, ההפרש בין שני המספרים קטן מ-30, ומכאן ש-y **אינו** יכול להיות שווה ל-10.

האם y קטן או גדול מ-10? מכיוון שסכום שני המספרים בהכרח קטן מ-50, הרי שהגדלת y תהיה ׳על חשבונו׳ של x, כלומר תביא למצב שבו x יהיה קטן עוד יותר ולפיכך ההפרש בין שני המספרים יקטן. הגענו למסקנה כי y בהכרח קטן מ-10.

<u>דרך ב׳: אלגברה</u>: מהתבוננות בטורים נראה כי x אינו מופיע בהם, לכן נרצה לחלץ מהמידע הנוסף מידע לגבי y בלבד. לצורך כך, ניתן לשלב את שני אי השוויונים הנתונים. כאשר משלבים שני אי שוויונים לכדי אי שוויון משולש, ניתן "להשמיט" את האגף האמצעי בשילוב ולקבל אי שוויון חדש. אנחנו רוצים שהחלק שיושמט יהיה x ולכן נבודד אותו באי השוויונים במידע הנוסף:

מאי השוויון הראשון נקבל: $30 + y < x$, ומאי השוויון השני נקבל: $x < 50 - y$.

כעת נשלב: $30 + y < x < 50 - y$.

כמו שאמרנו, ניתן להשמיט את האגף האמצעי ולקבל: $30 + y < 50 - y$.

נחבר y לשני האגפים ונחסר 30 משני האגפים ונקבל: $2y < 20$. נחלק ב-2, ונקבל: $y < 10$.

תשובה (1).

---

23. השאלה:

טור א	טור ב	מידע נוסף
α	β	ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$. BD חוצה את הזווית $\angle ABC$.

מידע נוסף: נשלים את כל הזוויות האפשריות בסרטוט כדי לנסות למצוא קשר בין α ל-β.

ידוע כי BD חוצה זווית ולכן: $\angle ABD = \angle CBD = \beta$. קיבלנו ש: $\angle ABC = 2\beta$ ומכיוון שנתון כי המשולש הוא שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שוות ולכן: $\angle ACB = 2\beta$.

כעת במשולש ABC ידוע כי: $\alpha + 2\beta + 2\beta = 180° \Leftarrow \alpha = 180° - 4\beta$.

משוואה זו אינה מאפשרת לנו לקבוע מי מהטורים גדול יותר, על מנת לוודא זאת נציב דוגמאות מספריות:

א. אם $\alpha = 160°$ נקבל ש: $\beta = 5°$ ואז טור א׳ גדול יותר.

ב. אם $\alpha = 20°$ נקבל ש: $\beta = 40°$ ואז טור ב׳ גדול יותר.

תשובה (4).

---

24. השאלה:

טור א	טור ב	מידע נוסף
שטח המשולש ABC	$\frac{1}{2}$ שטח המלבן BDEC	$AB = CE$

נציב את נוסחאות השטח בשני הטורים, ונקבל:

<u>טור א</u>	<u>טור ב</u>
$\frac{AB \cdot AC}{2}$	$\frac{1}{2} CE \cdot BC$

נתון כי $AB = CE$ ולכן על מנת להכריע איזה מהטורים גדול יותר עלינו לבדוק מי גדול יותר מבין BC ו- AC. במשולש ישר הזווית ABC הצלע BC היא היתר ולכן היא הצלע הארוכה ביותר במשולש, כלומר, ארוכה יותר מ- AC, ולכן טור ב׳ גדול יותר מטור א׳.

תשובה (2).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
.25	x^a	a^x	$1 < a < x$

מידע נוסף: נתבונן בטורים ונראה כי בטור א׳ הבסיס גדול יותר מאשר בטור ב׳, אולם המעריך קטן יותר מהמעריך שבטור ב׳, לכן קשה לקבוע חד משמעית מי מהטורים גדול יותר. אנחנו חושדים שהתשובה היא (4), אולם על ועל מנת לוודא זאת נחפש דוגמאות מספריות אשר יתנו לנו תשובות שונות זו מזו.

אם נציב $x=3$, $a=2$ נקבל שטור א׳ גדול יותר:

טור א	**טור ב**
$3^2 = 9$	$2^3 = 8$

ואילו אם נציב $x=5$, $a=2$ נקבל שטור ב׳ גדול יותר:

טור א	**טור ב**
$5^2 = 25$	$2^5 = 32$

תשובה (4).