מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(1)	(3)	(3)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(2)	(1)	(4)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-7)

.1 **השאלה**: בעיר מסוימת התקנות קובעות ששמה של שכונה חייב להיות מורכב משתי מילים: הראשונה שבהן חייבת להיות אחת מהמילים "נחלת", "גבעת", "מקור", "בית", ו"קרית", והשנייה שבהן חייבת להיות אחת מהמילים "חיים", "משה", "ישראל", ו"אחים".

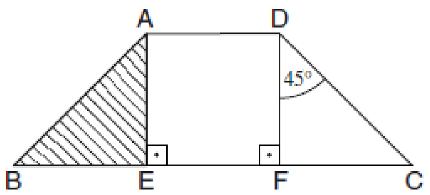
כמה שמות שונים אפשר לתת לשכונות בעיר זו?

פיתרון: זוהי שאלת צירופים ומכיוון שחלק מהמספרים בתשובות אינם קטנים נחשב את מספר האפשרויות לפי העקרונות של שאלות צירופים.
שמה של שכונה מורכב משתי מילים. המילה הראשונה יכולה להיות כל אחת מחמשת המילים שהוצגו בנתוני השאלה, ולכן יש בסך הכול 5 אפשרויות שונות לבחירת המילה הראשונה.
המילה השנייה יכולה להיות כל אחת מארבעת המילים שהוצגו בנתוני השאלה, ולכן יש בסך הכול 4 אפשרויות בחירה שונות למילה השנייה.
מספר השמות השונים שניתן לתת לשכונות יהיה תוצאת מכפלת מספר האפשרויות הכולל שיש למילה הראשונה במספר האפשרויות הכולל שיש למילה השנייה, כלומר 20 אפשרויות שונות $(4 \cdot 5 =)$

תשובה (3).

.2 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים $(AB = DC)$ ו-AEFD הוא ריבוע.
גודל השטח המקווקו הוא 6 סמ"ר.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הטרפז ABCD (בסמ"ר)?



פיתרון: הטרפז שבסרטוט הוא טרפז שווה שוקיים ומכאן ששני המשולשים שבסרטוט חופפים (משולש BEA חופף למשולש DFC). אם שני המשולשים חופפים זה לזה הרי ששטחם שווה ולכן גם שטח משולש DFC שווה ל-6 סמ"ר.
שטח הטרפז מורכב מסכום שטחי המשולשים ושטח הריבוע.
על מנת למצוא את שטח הריבוע AFED נעביר אלכסון אחד ונקבל שני משולשים, משולש DEF ומשולש AEF, אשר שניהם משולשים שווי שוקיים וישרי זווית. מכיוון שלפי נתוני הסרטוט גם משולשים ABE ו-DFC הם ישרי זווית ושווי שוקיים, והניצב שלהם שווה באורכו לניצבי המשולשים שנוצרו מהריבוע, הרי שכל 4 המשולשים חופפים זה לזה. אם המשולשים חופפים הרי שבהכרח גם שטחיהם שווים.
נתון כי שטח המשולש המקווקו הוא 6 סמ"ר, ומכאן ששטח כל 4 המשולשים המרכיבים את הטרפז שווה ל-24 סמ"ר $(4 \cdot 6 =)$.

תשובה (2).

---

3. **השאלה**: מה המספר החיובי הקטן ביותר אשר 12.5% ממנו הם מספר שלם?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת תשובות

מכיוון שנתבקשנו למצוא את המספר החיובי הקטן ביותר אשר 12.5% ממנו הם מספר שלם, נבדוק את התשובות, ונתחיל בבדיקת התשובה הקטנה ביותר.

<u>תשובה (1)</u>: 8. 12.5% שקולים לשבר $\frac{1}{8}$ (אם אינכם זוכרים זאת מן הטבלה שביקשנו לשנן, ניתן למצוא זאת באמצעות המרת האחוזים לשבר $\frac{12\frac{1}{2}}{100}$ וצמצום השבר).

כעת עלינו לבדוק האם $\frac{1}{8}$ מ-8 הוא מספר שלם. מכיוון שתוצאת התרגיל $\frac{1}{8}$ מ-8 היא 1 $\left(\frac{1}{8}\cdot 8=\right)$, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

השאלה מבקשת למצוא מיהו המספר החיובי הקטן ביותר אשר 12.5% ממנו הם מספר שלם.
למעשה, כאשר נחשב 12.5% ממספר זה עלינו לקבל את המספר השלם החיובי הקטן ביותר, שהוא 1.
לכן, המספר החיובי הקטן ביותר אשר 12.5% ממנו הם מספר שלם הוא מספר ש-12.5% ממנו שווים ל-1.
נציב x במקום המספר שאנחנו מחפשים, ונקבל את המשואה הבאה: $12.5\%\cdot x=1 \Leftarrow \frac{1}{8}\cdot x=1$

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-8, ונקבל: $x=8$.

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: מחיר עוגיית שוקולד גבוה פי 1.5 ממחיר עוגיית אגוזים.
מחיר עוגיית אגוזים גבוה פי 5 ממחיר עוגיית תמרים.
מחיר עוגיית תמרים הוא 2 שקלים.

כמה עוגיות לכל היותר אפשר לקנות ב-33 שקלים, אם קונים לפחות עוגייה אחת מכל סוג?

פיתרון: כדי לדעת כמה עוגיות ניתן לקנות ב-33 שקלים יש למצוא את מחירי העוגיות.
נתון כי מחירה של עוגיית תמרים הוא 2 שקלים, ומחירה של עוגיית אגוזים הוא פי 5 ממחירה, ומכאן שמחירה של עוגיית אגוזים הוא 10 שקלים $(2\cdot 5=)$.

מחירה של עוגיית שוקולד גבוה פי 1.5 ממחירה של עוגיית אגוזים, ומכאן שמחירה של עוגיית שוקולד הוא 15 שקלים $(10\cdot 1.5=)$.

לפי נתוני השאלה יש לרכוש לפחות עוגייה אחת מכל סוג, ולכן נתחיל ברכישת 3 עוגיות: אחת משוקולד, אחת מאגוזים ואחת מתמרים. סך הכול סכום מחירן של 3 עוגיות אלו הוא 27 שקלים $(2+10+15=)$.

מכיוון שנתבקשנו לרכוש עוגיות בסכום כולל של 33 שקלים, הרי שנותרו 6 שקלים לקניית עוגיות, מכיוון שהמטרה היא לקנות את מספר העוגיות המקסימלי, הרי שנבחר לרכוש את העוגיות הזולות ביותר, כלומר עוגיות תמרים.

מחירה של כל עוגיית תמרים הוא 2 שקלים, ומכאן שב-6 שקלים ניתן לקנות 3 עוגיות $\left(\frac{6}{2}=\right)$.

סך הכול נקנו 6 עוגיות $(3+3=)$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה**: A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות שונות מ-1 עד 9.

נתון:

$$\begin{array}{r} AA \\ \times\quad A \\ \hline CBA \end{array}$$

$A - C = ?$

פיתרון: אם נתבונן על ספרות האחדות של התרגיל, נראה כי כפלנו שתי ספרות זהות זו בזו (A ב-A) וקיבלנו בתוצאת התרגיל ספרת אחדות זהה, כלומר A.
כלומר, האות A מייצגת ספרה שכפל שלה בעצמה תיתן את אותה ספרת אחדות. מבין כל הספרות רק הספרות 0, 1, 5 ו-6 מקיימות תנאי זה.
נבדוק את כל אחת מהאפשרויות על מנת לראות מי מהן עשויה להתאים לנתוני השאלה.

<u>הספרה 0</u>: אם האות A תהיה שווה ל-0 המספר AA לא יהיה מספר דו-ספרתי, ולכן אפשרות זו נפסלת.

<u>הספרה 1</u>: אם האות A תהיה שווה ל-1 התרגיל שנקבל יהיה $11 \cdot 1 = 11$. מכיוון שתוצאת התרגיל הייתה אמורה להיות המספר דו-ספרתי AA. מכיוון שלפי הנתון, התוצאה היא מספר תלת-ספרתי, הרי שאפשרות זו נפסלת.

<u>הספרה 5</u>: אם האות A תהיה שווה ל-5, התרגיל שיתקבל יהיה $55 \cdot 5 = 275$. התוצאה שהתקבלה היא מספר תלת ספרתי שכל ספרותיו שונות זו מזו, וספרת האחדות שלו זהה לספרות המספר הדו-ספרתי וספרת האחדות שכפלה אותו. כלומר, מצאנו אפשרות שמתאימה לנתוני השאלה, ומכאן שאין צורך לבדוק גם את הספרה 6 וניתן לענות על השאלה.
לפי התרגיל שקיבלנו: $A = 5$, $B = 7$, $C = 2$, ולכן תוצאת התרגיל שנתבקשנו לחשב היא 3 $(A - C = 5 - 2 =)$. לשם השלמת ההסבר נבדוק מה קורה כאשר $A = 6$.

<u>הספרה 6</u>: אם האות A תהיה שווה ל-6 התרגיל שיתקבל יהיה $66 \cdot 6 = 396$. התוצאה שהתקבלה היא מספר תלת ספרתי שכל ספרותיו שונות זו מזו, וספרת האחדות שלו זהה לספרות המספר הדו-ספרתי וספרת האחדות שכפלה אותו. כלומר, מצאנו אפשרות שמתאימה לנתוני השאלה.
לפי התרגיל שהתקבל $A = 6$, $B = 9$, $C = 3$, ולכן תוצאת התרגיל שנתבקשנו לחשב היא 3 $(A - C = 6 - 3 =)$.
מצאנו שגם כאשר A שווה ל-5 וגם כאשר היא שווה ל-6, תוצאת התרגיל שנתבקשנו לחשב היא 3.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: בגינה של יניב 10 ערוגות: 4 ערוגות נענע ו-6 ערוגות לימונית.
מספר השתילים בכל ערוגת נענע גדול פי 2 ממספר השתילים בכל ערוגת לימונית.
בגינה יש 70 שתילים סך הכול.

כמה שתילי נענע יש בגינה?

פיתרון: <u>**דרך א'**</u>: בדיקת תשובות.
נבדוק לגבי כל אחת מהתשובות המוצעות האם מספר השתילים הכולל מתאים לנתוני השאלה.

<u>תשובה (1)</u>: 24. לפי נתוני השאלה יש 4 ערוגות נענע, אם מספר השתילים הוא 24, הרי שבכל ערוגה יש 6 שתילים $\left(=\frac{24}{4}\right)$. נתון כי בכל ערוגת נענע יש פי 2 שתילים מבכל ערוגת לימונית, כלומר בכל ערוגת לימונית יש מחצית מכמות השתילים שיש בכל ערוגת נענע, ומכאן שבכל ערוגת לימונית יש 3 שתילים $\left(=\frac{6}{2}\right)$.

נתון כי יש בסך הכול 6 ערוגות לימונית, ומצאנו שבכל ערוגת לימונית יש 3 שתילים, ומכאן שיש סך הכול 18 שתילי לימונית $(6 \cdot 3 =)$.
סכום השתילים הוא 42 $(24 + 18 =)$, ולא 70 כפי שכתוב בנתוני השאלה, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 32. לפי נתוני השאלה יש 4 ערוגות נענע, אם מספר השתילים הוא 32, הרי שבכל ערוגה יש 8 שתילים $\left(=\frac{32}{4}\right)$. בכל ערוגת לימונית יש מחצית מכמות השתילים שיש בכל ערוגת נענע, ומכאן שבכל ערוגת לימונית יש 4 שתילים $\left(=\frac{8}{2}\right)$.

נתון כי יש בסך הכול 6 ערוגות לימונית, ומצאנו שבכל ערוגת לימונית יש 4 שתילים, ומכאן שבסך הכול יש 24 שתילי לימונית $(=6\cdot4)$.

מכיוון שסכום השתילים הוא 56 $(=32+24)$, ולא 70, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 36. לפי נתוני השאלה יש 4 ערוגות נענע, אם מספר השתילים הוא 36, הרי שבכל ערוגה יש 9 שתילים $\left(=\frac{36}{4}\right)$. בכל ערוגת לימונית יש מחצית מכמות השתילים שיש בכל ערוגת נענע, הרי שבכל ערוגת לימונית יש 4.5 שתילים $\left(=\frac{9}{2}\right)$. מכיוון שזה **אינו** מספר שלם של שתילים ניתן לעצור כבר כאן ולעבור לבדוק את התשובה הבאה.

למי שמעוניין להמשיך ולחשב, הרי שמכיוון שיש בסך הכול 6 ערוגות לימונית, ומצאנו שבכל ערוגת לימונית יש 4.5 שתילים, ומכאן שיש סך הכול 27 שתילי לימונית $\left(=6\cdot\frac{9}{2}\right)$.

מכיוון שסכום השתילים הוא 63 $(=36+27)$, ולא 70, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: 40. לפי נתוני השאלה יש 4 ערוגות נענע, אם מספר השתילים הוא 40, הרי שבכל ערוגה יש 10 שתילים $\left(=\frac{40}{4}\right)$. מכיוון שבכל ערוגת לימונית יש מחצית מכמות השתילים שיש בכל ערוגת נענע, הרי שבכל ערוגת לימונית יש 5 שתילים $\left(=\frac{10}{2}\right)$.

למי שמעוניין להמשיך ולחשב, הרי שמכיוון שיש בסך הכול 6 ערוגות לימונית, ומצאנו שבכל ערוגת לימונית יש 5 שתילים, ומכאן שיש סך הכול 30 שתילי לימונית $(=6\cdot5)$.

מכיוון שמצאנו כי סכום השתילים הוא 70 $(=40+30)$, הרי שזו התשובה הנכונה.

הערה: בבדיקת תשובות נעדיף תמיד לבדוק את התשובה הנוחה ביותר לבדיקה ולכן מראש יכולנו לבדוק קודם כל את תשובה (4). אם בכל זאת לא התחלנו בבדיקת תשובה (4), הרי שלאחר בדיקת תשובה (1) ניתן היה לראות כי סכום השתילים רחוק מלהיות הסכום הנתון. לכן, לאחר מכן מומלץ לבדוק תשובה אשר גדולה בהרבה מתשובה (1), למשל תשובות (3) או (4).

<u>דרך ב'</u>: בניית משוואה

נגדיר את מספר שתילי הנענע בכל ערוגה כ-N, נתון כי מספר שתילי הנענע בכל ערוגה גדול פי 2 ממספר שתילי הלימונית בכל ערוגה, ולכן מספר שתילי הלימונית הוא $\frac{N}{2}$.

יש 4 ערוגות נענע ו-6 ערוגות לימונית, ובסך הכול יש 70 שתילים ולכן ניתן לבנות את המשוואה

$$4N + 6\cdot\frac{N}{2} = 70 \Leftarrow 4N + 3N = 70 \Leftarrow 7N = 70.$$

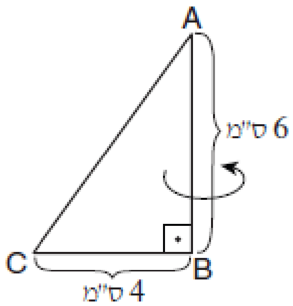
נחלק את שני האגפים ב-7, ונקבל: $N = 10$.

מצאנו שבכל ערוגת נענע יש 10 שתילים. מכיוון שנתון כי יש 4 ערוגות נענע, ומכאן שיש בסך הכול 40 שתילי נענע $(10\cdot 4 =)$.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ישר-זווית.



לפי הנתונים שבסרטוט,
מה נפח החרוט שיתקבל כתוצאה מסיבוב המשולש סביב הצלע AB (בסמ"ק)?

פיתרון: נפח של חרוט הוא שטח בסיס החרוט כפול גובהו לחלק ב-3.
מכאן שכדי למצוא את נפח החרוט יש למצוא את גובהו ואת שטח בסיסו.
גובהו של החרוט הוא אורך הצלע AB, כלומר 6 ס"מ.

בסיס החרוט הוא המעגל הנוצר מסיבוב המשולש הנתון שרדיוסו הוא הצלע BC, כלומר 4 ס"מ. כעת נציב את כל הנתונים בנוסחת הנפח:

$$V = \frac{\pi r^2\cdot h}{3} \Leftarrow V = \frac{\pi 4^2\cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{3}_{1}} \Leftarrow V = 16\pi\cdot 2 \Leftarrow V = 32\pi$$

תשובה (3).

הסקה מתרשים (שאלות 8–11)

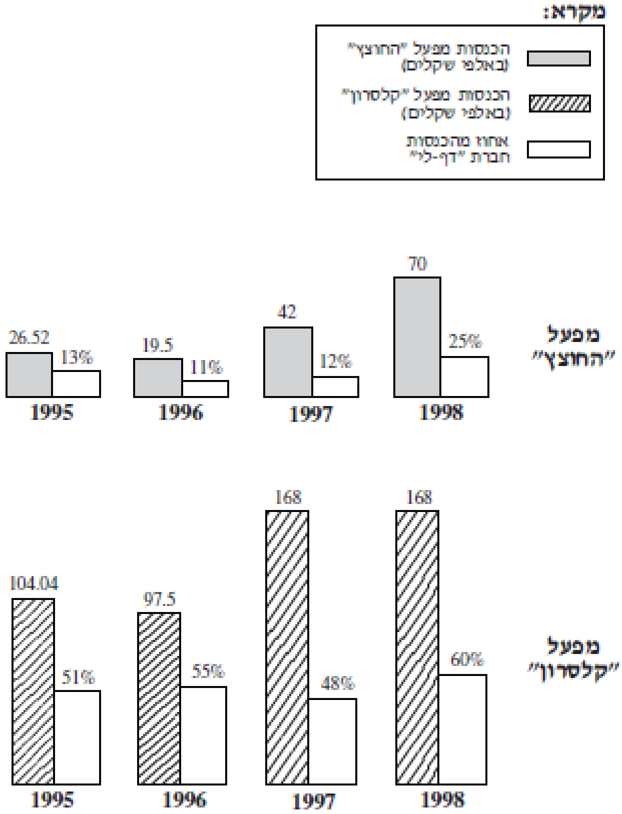
עיינו היטב בתרשימים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריהם.

לפניכם תרשימים המייצגים נתונים על שניים ממפעליה של חברת "דף–לי" לציוד משרדי: מפעל "החוצץ" ומפעל "קלסרון", בשנים 1995-1998.

בתרשימים מופיעות הכנסותיו של כל מפעל בכל שנה (באלפי שקלים), וכן מצוין חלקן של הכנסות אלו באחוזים מסך ההכנסות של חברת "דף–לי" בשנה זו (ראו מקרא).

לדוגמה, בשנת 1995 היו הכנסות מפעל "קלסרון" 104,040 שקלים, שהם 51% מסך ההכנסות של חברת "דף–לי" בשנה זו.

מקרא:



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.8 **השאלה**: מה היה היחס בין הכנסות מפעל "החוצץ" להכנסות מפעל "קלסרון" בשנת 1997?

פיתרון: בשנת 1997 היו הכנסות מפעל "החוצץ" 42,000 שקלים ושל מפעל "קלסרון" היו 168,000 שקלים. מכאן שהיחס בין הכנסות המפעלים הוא 168,000 : 42,000, נחלק את שני צדי היחס ב-1,000 ⇦ 42:168, FGנחלק את שני צדי היחס ב-42, ונקבל: 1:4.

תשובה (4).

---

9. **השאלה**: 10% מהכנסות מפעל "החוצץ" מתחלקים שווה בשווה כבונוס בין שלוש מנהלות המפעל.

מה גובה הבונוס שקיבלה כל אחת מהמנהלות בשנת 1998 (באלפי שקלים)?

פיתרון: הכנסות מפעל "חוצץ" בשנת 1998 היו 70 אלף שקלים.

10% מהכנסות אלה שווים ל-7 אלפי שקלים $\left(=\frac{70}{10}\right)$.

גובה הבונוס שקיבלה כל אחת מהמנהלות שווה לשליש מ-10% מההכנסות כלומר ל- $\frac{7}{3}$ אלפי שקלים,

שהם $2\frac{1}{3}$ אלפי שקלים.

תשובה (3).

---

10. **השאלה**: איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה?

פיתרון: בכדי לענות על השאלה יש נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): כאשר יָרדו ההכנסות של מפעל "החוצץ", יָרדו גם הכנסותיו של מפעל "קלסרון"

לפי התרשים בין השנים 1995 ל-1996 ירדו הכנסותיו של מפעל "החוצץ" וגם הכנסותיו של מפעל "קלסרון". מכיוון שהטענה נכונה, הרי שהתשובה נפסלת.

תשובה (2): **בשנת 1997 היו סך ההכנסות של שני המפעלים יחד הגבוה ביותר**

בשנת 1997 ובשנת 1998 היו הכנסות מפעל "קלסרון" הגבוהות ביותר. בשנת 1998 היו הכנסות מפעל "החוצץ" 42 אלף שקלים, ובשנת 1998 היו הכנסות מפעל "החוצץ" 70 אלף שקלים, כלומר גבוהות יותר, ומכאן שסך הכנסות שני המפעלים בשנת 1998 היו גבוהות מסך הכנסותיהם בשנת 1997.
מכיוון שמצאנו שהטענה אינה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

בדיקה באמצעות חישוב: סך הכנסותיהם של שני המפעלים בשנת 1997 היו 210 אלף שקלים $(=168+42)$.

בשנת 1998 היו סך ההכנסות של שני המפעלים 238 אלף שקלים $(=70+168)$.
מצאנו כי סך ההכנסות של שני המפעלים היה הגבוה ביותר בשנת 1998, ולא בשנת 1997.

תשובה (3): בשנת 1996 היה סך ההכנסות של חברת "דף-לי" הנמוך ביותר

מכיוון שהן הכנסות מפעל "החוצץ" והן הכנסות מפעל "קלסרון" היו הנמוכות ביותר בשנת 1996, הרי שניתן להסיק כי בהכרח הכנסות חברת "דף-לי" בשנת 1996 היה אכן הנמוך ביותר.

תשובה (4): בין שנת 1996 לשנת 1997 חלה עלייה בהכנסות של כל אחד משני המפעלים

בין השנים 1996 ל-1997 הייתה עלייה בהכנסות מפעל "חוצץ" מ-19.5 אלף שקלים ל-42 אלף שקלים.
כמו כן, במפעל "קלסרון" הייתה עלייה בהכנסות מ-97.5 אלף שקלים ל-168 אלף שקלים.
מכיוון שבשני המפעלים הייתה עלייה בהכנסות, הרי שהטענה נכונה, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2).

---

11. **השאלה**: בשנת 1996 מכר מפעל "קלסתרון" 32,500 קלסרים.

בהנחה שהכנסות המפעל היו ממכירת קלסרים בלבד,
מה הייתה ההכנסה הממוצעת של המפעל ממכירת קלסר בשנה זו (בשקלים)?

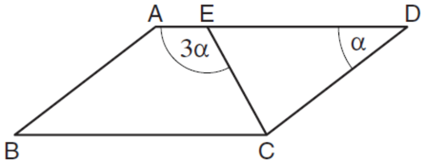
פיתרון: על מנת למצוא את ההכנסה הממוצעת ממכירת קלסר עלינו לדעת את סך ההכנסות של המפעל ולחלק בכמות הקלסרים שנמכרו. לפי התרשים, בשנת 1996 הכנסות המפעל הן 97,500 שקלים.

נחלק את סך ההכנסות במספר הקלסרים: $\frac{97,5\cancel{00}}{32,5\cancel{00}} \Leftarrow \frac{975}{325} \Leftarrow 3$. מצאנו כי המפעל הכניס בממוצע 3 שקלים ממכירת קלסר.

תשובה (3).

שאלות ובעיות (שאלות 12-20)

.12 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABCD היא מקבילית. E היא נקודה על הצלע AD. CE חוצה את הזווית $\angle BCD$.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

פיתרון: מכיוון שלא נתון גודלה של זווית כלשהי בצורה שבסרטוט, הרי שעלינו לחפש צורה כמו משולש או מרובע, להם סכום זוויות ידוע, ובעזרת ביטוי כל הזוויות בעזרת α והצבה במשוואה לגלות מה גודלה של α.
נתבונן במשולש CED מכיוון שגודלה של אחת מזוויותיו, זווית EDC, שווה ל-α, ונותר למצוא רק את גודלן של שתי הזוויות הנותרות.
זווית BCD וזווית ADC הן זוויות סמוכות במקבילית. סכום זוויות סמוכות במקבילית שווה ל-$180°$, ומכאן שזווית BCD שווה ל-$(180° - \alpha)$.

נתון כי CE חוצה את הזווית BCD ולכן זווית ECD שווה למחצית מזווית BCD, כלומר ל-$\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

זווית AEC היא זווית חיצונית למשולש DEC, ומכאן שהיא שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות ש**<u>אינן</u>** צמודות לה, כלומר לזוויות EDC ו-ECD, ומכאן שניתן ליצור את המשוואה:

$3\alpha = 90° - \frac{\alpha}{2} + \alpha$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-2, ונקבל: $6\alpha = 180° - \alpha + 2\alpha$ ⇦ $6\alpha = 180° + \alpha$

נחסר α משני האגפים, ונקבל: $180° = 5\alpha$.
נחלק את שני האגפים ב-5, ונקבל: $\alpha = 36°$.

תשובה (2).

.13 **השאלה**: בְרֵכה אפשר למלא משני ברזים. אם פותחים רק ברז אחד, הברֵכה מתמלאת ב-4 שעות, ואם פותחים רק את הברז השני, הברֵכה מתמלאת ב-8 שעות.

בכמה שעות תתמלא הברֵכה אם יפתחו את שני הברזים יחד?

פיתרון: מדובר בשאלת הספק של 'פועלים' שונים. כדי לענות על השאלה יש לחבר את שני ה'פועלים', ועל מנת לעשות זאת יש למצוא מה הספקם של שני ה'פועלים' באותו זמן.
נמצא מה הספקי שני הברזים בזמן של 8 שעות.
נתון כי הברז הראשון ממלא ברכה אחת ב-4 שעות. ב-8 שעות, שהוא זמן כפול מ-4 שעות, ימלא הברז כמות כפולה של בריכות, כלומר 2 ברכות.
הברז השני ממלא ב-8 שעות בְרֵכה אחת, ומכאן שביחד ימלאו שני הברזים ב-8 שעות 3 ברכות $(2+1=)$.
על מנת למלא ברכה אחת, שהיא כמות הקטנה פי 3, הזמן הדרוש לשני הברזים הוא שליש מהזמן הדרוש להם כדי למלא שלוש ברכות, כלומר דרושות להם $2\frac{2}{3}$ שעות $\left(\frac{8}{3}=\right)$.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: "גיוון" של מספר שלם n מוגדר כך: מספר המספרים הראשוניים השונים זה מזה ש-n מתחלק בהם.

לאיזה מהמספרים הבאים הגיוון **הקטן** ביותר?

פיתרון: נעבור על התשובות המוצעות ונפרק את המספר המוצע בכל תשובה לגורמים הראשוניים המרכיבים את המכפלה שלו.

תשובה (1): 18

$3\cdot3\cdot2=9\cdot2=18$. מצאנו כי 18 מתחלק ב-2 גורמים ראשוניים השונים זה מזה: 3 ו-2.

תשובה (2): 28

$7\cdot2\cdot2=14\cdot2=28$. מצאנו כי 28 מתחלק ב-2 גורמים ראשוניים השונים זה מזה: 2 ו-7, ולכן תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

תשובה (3): 32

$32=2^5$, כלומר 32 מתחלק בגורם ראשוני אחד – 2.

תשובה (4): 45

$3\cdot3\cdot5=9\cdot5=45$, כלומר, 45 מתחלק ב-2 גורמים ראשוניים השונים זה מזה: 3 ו-5, ולכן גם תשובה זו נפסלת.

מכיוון של-32 יש את מספר הגורמים הראשוניים הקטן ביותר בו הוא מתחלק, הרי שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

15. **השאלה**: במדינה מסוימת 80% מהתושבים הם דוברי אנגלית או צרפתית, ומהם 40% דוברים את שתי השפות.

כמה אחוזים מכל תושבי המדינה דוברים רק **אחת** מהשפות האלה?

פיתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב לשם הנוחות כי במדינה יש 100 תושבים.
נתון כי 80% מהתושבים דוברים אנגלית או צרפתית, ומכאן שלמעשה 80 תושבים דוברים אנגלית או צרפתית $\left(\frac{80}{100}\cdot100=\right)$.

נתון כי 40% מתוך התושבים שדוברים אנגלית או צרפתית דוברים את שתי השפות. 10% מ-80 הם 8 תושבים, ולפיכך 40% הם 32 תושבים הדוברים את שתי השפות $\left(4\cdot8=\right)$.

אם מתוך 80 התושבים אשר דוברים אנגלית או צרפתית יש 32 תושבים שדוברים את שתי השפות, הרי שנותרו 48 תושבים שדוברים רק אחת מהשפות $\left(80-32=\right)$.

48 תושבים מתוך 100 תושבי המדינה, מהווים 48% מתוך כלל התושבים.

דרך ב': הבנה אלגברית

כדי למצוא מה אחוז דוברי אחת השפות במדינה, יש למצוא מה אחוז התושבים במדינה אשר דוברים את שתי השפות. 80% מתושבי המדינה דוברים את שתי השפות, ומתוכם 40% דוברים את שתיהן.
40% מתוך 80% הם 32% $\left(\frac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}}\cdot\frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}}\Leftarrow\frac{32}{100}\right)$.

אם 80% מתושבי המדינה דוברים אנגלית או צרפתית, ו-32% דוברים את שתי השפות יחד, הרי ש-48% אשר דוברים רק אחת משתי השפות $\left(80\%-32\%=\right)$

תשובה (2).

.16 **השאלה**: לא קיים שום x שעבורו הביטוי ______ שווה ל-1.

פיתרון: השאלה מבקשת מאיתנו למצוא מבין התשובות המוצעות את הביטוי אשר משלים את המשפט למשפט נכון. כלומר לעבור על התשובות המוצעות ולמצוא מי מהן מציעה ביטוי אשר לא קיים x שעבורו הביטוי שווה ל-1. נשווה כל תשובה ל-1 ונבדוק באיזה מקרה למשוואה שיצרנו אין פיתרון.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{1}{1+x}$. נבדוק האם למשוואה $\frac{1}{1+x}=1$ יש פיתרון.
נכפול את שני אגפי המשוואה ב-(1+x), ונקבל: $1=1+x$.
נחסר 1 משני האגפים, ונקבל: $x=0$. מכיוון שמצאנו כי קיים x עבורו הביטוי שווה ל-1, התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{1}{1+x}-1$. נבדוק האם למשוואה $\frac{1}{1+x}-1=1$ יש פיתרון.

נוסיף 1 לשני אגפי המשוואה, ונקבל: $\frac{1}{1+x}=2$.
נכפול את שני אגפי המשוואה ב-(1+x), ונקבל: $1=2(1+x)$ ⇦ $1=2+2x$.
נחסיר 2 משני אגפי המשוואה, ונקבל: $-1=2x$. נחלק את שני האגפים, ונקבל: $x=-\frac{1}{2}$. מכיוון שקיים x אשר עבורו הביטוי שווה ל-1, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{1}{1-x}$. נבדוק האם למשוואה $\frac{1}{1-x}=1$ יש פיתרון.

נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $(1-x)$, ונקבל: $1=1-x$ נחסיר 1 משני אגפי המשוואה, ונחבר x, ונקבל: $x=0$. מצאנו כי קיים x עבורו הביטוי שווה ל-1 ולכן התשובה נפסלת.
מכיוון שפסלנו שלוש תשובות ולכן תשובה (4) היא התשובה הנכונה אך נפתור גם אותה לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{1}{1-x}+1$. נבדוק האם למשוואה $\frac{1}{1-x}+1=1$ יש פיתרון.

נחסיר 1 משני אגפי המשוואה, ונקבל: $\frac{1}{1-x}=0$ נכפול את שני אגפי המשוואה ב- $(1-x)$, ונקבל: $1=0$. מכיוון שהמשוואה שהתקבלה אינה נכונה, הרי שאין x שעבורו הביטוי שווה ל-1.
זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

.17 **השאלה**: על x דפים מסורטטים מצולעים. על מחצית מהדפים מסורטט משושה משוכלל שאורך צלעו a ס"מ, ועל המחצית האחרת משולש שווה-צלעות שאורך צלעו a ס"מ.
סכום היקפי כל המצולעים שעל הדפים הוא 450a ס"מ.

$x=?$

פיתרון: <u>**דרך א'**</u>: בדיקת תשובות

נתבקשנו למצוא מה ערכו של x, כלומר מה מספר הדפים.
מומלץ להתחיל בבדיקת המספר העגול יותר המופיע בתשובות, כלומר, 100.

<u>תשובה (2)</u>: 100. אם מספר הדפים הוא 100 ועל מחצית מהם, כלומר 50 דפים, מסורטט משושה משוכלל שאורך צלעו a, הרי שבום היקפו של כל משושה הוא 6a, וסכום היקפי כל 50 המשושים הוא 300a $(=50\cdot 6a)$. על המחצית האחרת של הדפים, כלומר על 50 דפים מסורטט משולש שווה צלעות שאורך צלעו a. היקף כל משולש שווה-צלעות הוא 3a, וסכום היקפי כל המשולשים הוא 150a $(=50\cdot 3a)$.

סכום היקפי כל המצולעים הוא 450a ס"מ $(=300a+150a)$, ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה - בניית משוואה

משושה משוכלל הוא משושה שאורך כל צלעותיו שווה, ומכאן שהיקפו שווה ל-6 פעמים אורך צלעו.
מכאן שהיקף משושה משוכלל שאורך צלעו a שווה ל-6a. היקפו של משולש שווה-צלעות שווה ל-3 פעמים אורך צלעו, ומכאן שהיקף משולש שווה-צלעות שאורך צלעו a שווה ל-3a.

על פי נתוני השאלה כמות הדפים הכוללת שווה ל-x. על מחצית מהדפים, כלומר על $\frac{1}{2}x$ מהם,

מסורטט משושה משוכלל שהיקפו שווה ל-6a, ומכאן שסכום היקפי המשושים שווה ל- $\frac{1}{2}x\cdot 6a$.

על המחצית השנייה של הדפים מסורטט משולש שווה-צלעות שהיקפו שווה ל-3a, ומכאן שסכום ההיקפים של המשולשים שווה ל- $\frac{1}{2}x\cdot 3a$.

סכום היקפי כל המצולעים שווה ל-450a ולכן ניתן ליצור את המשוואה: $\frac{1}{2}x\cdot 6a+\frac{1}{2}x\cdot 3a=450a$

$\Leftarrow$ $3xa+\frac{3xa}{2}=450a$.

נכפול ב-2 את שני האגפים, ונחלק ב-a את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $6x+3x=900$ $\Leftarrow$ $9x=900$.
נחלק את שני האגפים ב-9, ונקבל: $x=100$.

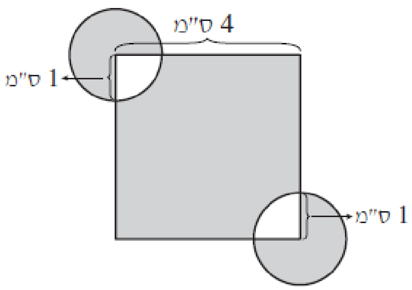
תשובה (2).

---

18. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ.

שניים מקודקודי הריבוע הם מרכזים של מעגלים שרדיוסם 1 ס"מ.

מה סכום גודלי השטחים הכהים (בסמ"ר)?



פיתרון: נתייחס לכל אחד מהשטחים הכהים בסרטוט ואז נסכום אותם.
השטח הכהה הכלוא בריבוע הוא למעשה שטח הריבוע פחות שתי הגזרות הלבנות. זוויות הריבוע שוות ל- $90°$, ומהוות למעשה את הזוויות המרכזיות בשתי הגזרות הלבנות.

מכאן שכל אחת מהגזרות הלבנות מהווה רבע $\left(\frac{90°}{360°}=\right)$ משטח מעגל שאורך רדיוסו הוא 1 ס"מ.

מצאנו כי השטח הכהה הכלוא בריבוע שווה לשטח הריבוע פחות שני רבעי מעגל זהים, אשר מהווים למעשה מחצית מאותו מעגל $\left(2\cdot\frac{1}{4}=\right)$.

אורכו של צלע הריבוע שווה ל-4 ס"מ, ורדיוס המעגל שווה ל-1 ס"מ ומכאן שהשטח הכהה הכלוא בריבוע שווה ל- $16-\frac{1}{2}\pi$ $\left(4^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\right)$.

השטחים הכהים מחוץ לריבוע הם השטחים הכהים שבמעגלים. שטחים אלו הם למעשה שתי גזרות זהות של מעגל. מצאנו כי הגזרה הלבנה בכל מעגל שווה לרבע משטח המעגל, ומכאן שהגזרה הכהה של כל אחד מן המעגלים, שווה ל- $\frac{3}{4}$ מעגל $\left(1-\frac{1}{4}=\right)$.

רדיוס כל מעגל שווה ל-1 ס"מ ומכאן שהשטח הכהה הכלוא בכל מעגל שווה ל- $\frac{3}{4}\pi$ $\left(\frac{3}{4}\cdot 1^2\pi=\right)$,

וסכום השטחים הכהים הכלואים בתוך שני המעגלים יחד שווה ל- $\frac{3}{2}\pi$ $\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi=\right)$.

כעת נסכם את סכום השטחים הכהים שמצאנו, ונקבל כי הוא שווה ל- $16+\pi$ $\left(16-\frac{1}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi=\right)$

הערה: ניתן לפתור את השאלה בדרך פשוטה יותר:
הריבוע שבסרטוט מושחר כולו למעט שני שטחים לבנים אשר כל אחד מהם שווה לרבע מעגל, ושניהם ביחד שווים למחצית מעגל.
מחוץ לריבוע ישנם שני שטחים כהים אשר כל אחד מהם שווה לשלושת רבעי מעגל.
אם כל אחד מן המעגלים "יתרום" רבע מעגל על מנת 'למלא' את השטחים הלבנים בריבוע, הרי שהריבוע יהפוך למושחר לגמרי, ומחוץ לו יוותר שטח כהה המורכב משני חצאי מעגל, כלומר בסך הכול ממעגל אחד שלם.
שטח ריבוע שאורך צלעו הוא 4 ס"מ הוא 16 סמ"ר, ושטח מעגל שאורך רדיוסו 1 ס"מ הוא π סמ"ר $\left(=1^2\pi\right)$, ומכאן ששטח הריבוע + שטח המעגל שווה ל- $16+\pi$.

תשובה (1).

---

19. **השאלה**: נתון: x הוא מספר שלם.

הביטוי $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^x$ הוא מספר שלם.

המספר x בהכרח -

פיתרון: למספרים $\sqrt{2}$ ו- $\sqrt{3}$ אין תוצאה שלמה ולכן על מנת שהתוצאה של התרגיל תהיה מספר שלם, השורש צריך להתבטל.

לפי חוקי שורשים $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, ומכאן שניתן 'לתרגם' שורש שני לחזקת $\frac{1}{2}$.

כעת נתרגם אלגברית את הביטוי שבשאלה: $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^x \Leftarrow \left(\sqrt{2\cdot3^{\frac{1}{2}}}\right)^x \Leftarrow \left(\left(2\cdot3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^x \Leftarrow$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^x \Leftarrow 2^{\frac{1}{2}x}\cdot3^{\frac{1}{4}x}$.

על מנת שתוצאת הביטוי תהיה מספר שלם, צריך שהחזקות של 2 ו-3 יהיו מספרים שלמים. על מנת שהחזקות יהיו שלמות x צריך להיות מספר אשר מתחלק ב-4 ללא שארית.

תשובה (4).

.20 **השאלה**: x ו-y הם מספרים שלמים (חיוביים או שליליים).

נתון: $50 < x^2 < 90$

$10 < y^2 < 50$

$|x - y|$ הוא לכל היותר ______.

פיתרון: נבדוק את הערכים האפשריים ל-x ול-y.
נתון כי x ו- y הם מספרים שלמים.
לפי אי-השיוויון הראשון $50 < x^2 < 90$, ומכאן שהמספרים השלמים שמקיימים את אי-השוויון הם 8, 9, (-8) או (-9).
לפי אי-השיוויון השני $10 < y^2 < 50$, ומכאן ש- y יכול להיות שווה ל-7, 6, 5, 4 או המספרים הנגדיים למספרים אלו.

אנו מתבקשים למצוא את ההפרש הגדול ביותר בערך מוחלט בין x ו-y.
על מנת לקבל את ההפרש המקסימלי בערך מוחלט, עלינו לבדוק מה ההפרש בין הערך הגדול ביותר האפשרי של x מהערך הקטן ביותר האפשרי של y וההפרש בין הערך הקטן ביותר של x והערך הגדול ביותר האפשרי של y.
הערך האפשרי הגדול ביותר של x הוא 9, והערך האפשרי הקטן ביותר של y הוא (-7), וההפרש ביניהם בערך מוחלט הוא 16 $\left(|x-y| = |9-(-7)| = \right)$.

מכיוון שערך זה מופיע בתשובה (1), ואין תשובה אשר ערכה גדול יותר, זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).
