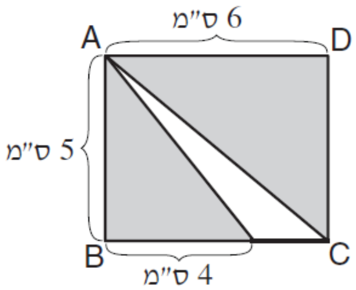
מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(1)	(3)	(2)	(3)	(4)	(2)	(4)	(4)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(3)	(4)	(4)	(2)	(1)	(3)	(4)	(1)	(3)

הסברים



שאלות ובעיות (שאלות 1-10)

1. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מלבן.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?

פיתרון: סכום השטחים הכהים שווה לשטח המלבן פחות שטח המשולש הלבן.
לפי נתוני הסרטוט, שטח המלבן שווה ל-30 סמ"ר $(=6\cdot 5)$.

כעת נחשב את שטח המשולש הלבן:
אורך הצלע AD היא 6 ס"מ, ולפיכך גם אורך הצלע הנגדית, הצלע BC, שווה ל-6 ס"מ, ומכאן שלפי נתוני הסרטוט אורך בסיסו של המשולש הלבן הוא 2 ס"מ $(=6-4)$.

גובה המשולש שווה למרחק בין קודקודו A לבסיס המשולש. ומכאן שגובה המשולש הוא הצלע AB, כלומר שווה ל-5 ס"מ.

כעת ניתן למצוא כי שטח המשולש הלבן הוא 5 סמ"ר $\left(=\frac{2\cdot 5}{2}\right)$.

סכום השטחים הכהים שווה ל-25 סמ"ר $(=30-5)$.

תשובה (3).

---

2. **השאלה**: נתון: $(x+1)^2-(x-1)^2=24$

$x=?$

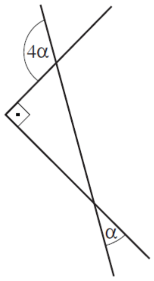
פיתרון: __**דרך א'**__: בדיקת תשובות:

__תשובה (1)__: 6. נציב את התשובה במשוואה הנתונה, ונקבל: $(6+1)^2-(6-1)^2=24$ ⇦
$7^2-5^2=24$ ⇦ $49-25=24$ ⇦ $24=24$.
מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, זו התשובה הנכונה.

__**דרך ב'**__: פישוט אלגברי

נפשט את הביטוי בצידה השמאלי של המשוואה בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר, ונקבל:
$(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)=24$ ⇦ $4x=24$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-4, ונקבל: $x=6$.

תשובה (1).



.3 **השאלה**: לפי הנתונים שבסרטוט,

$\alpha = ?$

פיתרון: זווית α קודקודית לאחת הזוויות הפנימיות שבמשולש, ומכאן שגם אותה זווית שווה ל-α. הזווית שגודלה הוא 4α היא זווית חיצונית למשולש.
זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה, ומכאן:
$4\alpha = 90° + \alpha$. נחסר α משני האגפים, ונקבל: $3\alpha = 90°$.
נחלק ב-3 את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $\alpha = 30°$.

תשובה (3).

.4 **השאלה**: רכבת עושה בכל יום את הדרך מעיר א לעיר ב במהירות קבועה במשך 8 שעות.

יום אחד נסעה הרכבת כהרגלה עד אמצע הדרך בדיוק, ושם אירעה תקלה שבגללה מהירות הרכבת בשארית הדרך הייתה $\frac{1}{2}$ ממהירותה הרגילה.

בכמה שעות עשתה הרכבת את הדרך מעיר א לעיר ב באותו יום?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שלא נתון מה מהירותה של הרכבת ולא שואלים מה היא, ניתן להציב למשל כי מהירותה של הרכבת היא 10 קמ"ש. אם הרכבת עושה בכל יום את הדרך מעיר א לעיר ב במהירות של 10 קמ"ש במשך 8 שעות, הרי שהמרחק בין עיר א' לעיר ב' הוא 80 ק"מ $\left(= 8 \cdot 10\right)$.

נתון כי יום אחד נסעה הרכבת כהרגלה עד אמצע הדרך בדיוק, כלומר עברה מרחק של 40 ק"מ $\left(= \frac{80}{2}\right)$

במהירות של 10 קמ"ש.

הזמן הנדרש לעבור מרחק של 40 ק"מ במהירות של 10 קמ"ש הוא 4 שעות $\left(= \frac{40}{10}\right)$.

בהמשך נאמר כי במחצית הדרך אירעה תקלה שבגללה מהירות הרכבת בשארית הדרך הייתה $\frac{1}{2}$ ממהירותה

הרגילה, כלומר ב-40 הק"מ האחרונים הייתה מהירות הרכבת 5 קמ"ש $\left(= \frac{10}{2}\right)$.

הזמן הנדרש לעבור 40 ק"מ במהירות של 5 קמ"ש הוא 8 שעות $\left(= \frac{40}{5}\right)$.

מספר השעות שנדרשו לרכבת לעבור את כל הדרך הוא 12 שעות $\left(= 8 + 4\right)$.

<u>דרך ב'</u>: הבנה

אם הרכבת עושה את כל הדרך מעיר א לעיר ב ב-8 שעות, אז הזמן הדרוש לה לעבור מחצית מהדרך שווה למחצית מהזמן הכולל, כלומר 4 שעות $\left(= \frac{8}{2}\right)$.

במחצית השנייה של הדרך מהירותה של הרכבת הייתה מחצית ממהירותה הרגילה. מכיוון שיש יחס הפוך בין זמן למהירות, כלומר אם המהירות קטנה פי 2 אז זמן הנסיעה גדול פי 2, אם לרכבת בדרך כלל לוקח 4 שעות להשלים מחצית מהדרך אז בשל התקלה ייקח לה זמן כפול, כלומר 8 שעות.
את המחצית הראשונה של הדרך נסעה הרכבת ב-4 שעות, ואת המחצית השנייה ב-8 שעות, ולכן בסך הכול הרכבת נסעה 12 שעות מעיר א לעיר ב $\left(= 8 + 4\right)$.

תשובה (2).

---

5. **השאלה**: נתון: a ו-b הם מספרים עוקבים, $0 < a < b$.

$$a \cdot b = 4a$$

$$a = ?$$

פיתרון: נתון ש-a גדול מ-0 ולכן נחלק את שני אגפי המשוואה ב-a, ונקבל $b = 4$.
נתון כי a ו-b הם מספרים עוקבים וכי b הוא הגדול מביניהם, מכאן ש- $a = 3$.

תשובה (3).

הערה: מי שלא זיהה את הפתרון האלגברי, יכול לפתור את השאלה באמצעות בדיקת תשובות.

---

6. **השאלה**: משה למד לבחינות סוף השנה במשך 3 שבועות, 7 ימים בשבוע. בשבוע הראשון הוא הקדיש 7 שעות ביום ללימוד, בשבוע השני – 6 שעות ביום, ובשבוע השלישי – 5 שעות ביום. למשה היו סך הכל 9 בחינות.

משה למד ______ שעות **בממוצע** לבחינה.

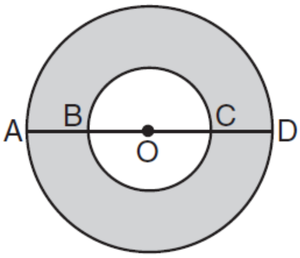
פיתרון: נתון כי משה למד 7 ימים בכל שבוע, ומכאן שאם למד בשבוע הראשון 7 שעות ביום אז הוא למד באותו שבוע $7 \cdot 7$ שעות. על פי אותו עיקרון בשבוע השני הוא למד $7 \cdot 6$ שעות ובשלישי $7 \cdot 5$ שעות. על מנת למצוא את מספר השעות הממוצע שלמד משה לבחינה, יש לחלק את סך כל שעות הלימוד במספר הבחינות, כלומר: $\frac{7\cdot7+7\cdot6+7\cdot5}{9}$.

נוציא 7 כגורם משותף במונה $\Leftarrow \frac{7\cdot(7+5+6)}{9} \Leftarrow \frac{7\cdot\cancel{18}^{2}}{{}_{1}\cancel{9}} \Leftarrow 7\cdot2 \Leftarrow 14$.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם שני מעגלים שמרכזם בנקודה O.
הקטע AD הוא קוטר במעגל החיצוני.



נתון: שטח המעגל הפנימי הוא 4π.

$$AB = CD = \frac{1}{2}BC$$

מה גודל השטח האפור?

פיתרון: השטח האפור אינו צורה גיאומטרית מוכרת, ומכאן שעל מנת למצוא את השטח האפור, יש לחסר משטח המעגל הגדול את שטח המעגל הקטן.
שטח המעגל הקטן נתון, ושווה ל-4π, ועל כן יש למצוא את שטח המעגל הגדול.
כדי לחשב את שטח המעגל הגדול, יש למצוא את רדיוס המעגל.
נתון כי שטח המעגל הקטן הוא 4π, ומכאן שאורכו של רדיוס המעגל הקטן, הקטע BO, הוא 2 ס"מ.
רדיוס המעגל הגדול, הקטע AO, מורכב מהקטעים AB ו-BO.
נתון כי הקטע AB שווה למחצית הקטע BC. הקטע BC הוא קוטר המעגל הקטן, כלומר שווה לפעמיים רדיוס המעגל הקטן. מכאן שאורכו של הקטע BC הוא 4 ס"מ $(2r = 2\cdot2 =)$, ואורכו של הקטע AB הוא 2 ס"מ $\left(\frac{1}{2}\cdot4 =\right)$.

רדיוס המעגל הגדול, הקטע AO, מורכב מהקטעים AB ו-BO, כלומר שווה ל-4 ס"מ $(2+2=)$, ומכאן ששטח המעגל הגדול הוא 16π סמ"ר $(r^2\pi = 4^2\pi =)$.
השטח האפור שווה להפרש בין שטחי שני המעגלים, כלומר ל-12π סמ"ר $(16\pi - 4\pi =)$.

תשובה (2).

.8 **השאלה**: נתון: $1<x<2$

איזה מהאי-שוויונות הבאים **אינו** נכון?

פיתרון: **__הצבת דוגמה מספרית__**:

נציב $x=\frac{3}{2}$, בכל אחת מהתשובות המוצעות, ונבדוק מי מהן **אינה** מתקיימת עבור המספר הזה:

__תשובה (1)__: $1<x^2<4$. כאשר נציב $x=\frac{3}{2}$, נקבל: $1<(\frac{3}{2})^2<4$ ⇦ $1<\frac{9}{4}<4$ ⇦ $1<2\frac{1}{4}<4$.

מכיוון שאי-השוויון שהתקבל נכון, הרי שהתשובה נפסלת.

__תשובה (2)__: $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$. כאשר נציב $x=\frac{3}{2}$, נקבל: $\frac{1}{2}<\frac{1}{\frac{3}{2}}<1$ ⇦ $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<1$. מכיוון שאי-השיוויון שהתקבל הוא נכון, הרי שהתשובה נפסלת.

__תשובה (3)__: $1<\sqrt{x}<\sqrt{2}$. כאשר נציב $x=\frac{3}{2}$, נקבל: $1<\sqrt{\frac{3}{2}}<\sqrt{2}$. אמנם איננו יודעים מה התוצאה המדויקת של שני תרגילי השורשים הנתונים, אך מכיוון שאנו יודעים ש-$\sqrt{1}$ שווה ל-1, הרי שתוצאת השורש של מספר הגדול ממנו, כלומר $\sqrt{1.5}$ היא בוודאות גדולה מ-$\sqrt{1}$ וקטנה מ-$\sqrt{2}$.
מכיוון שאי-השיוויון שקיבלנו הוא נכון, הרי שגם תשובה זו נפסלת.

__תשובה (4)__: $-1<-x<1$. כאשר נציב $x=\frac{3}{2}$, נקבל: $-1<-\frac{3}{2}<1$. הביטוי $-1\frac{1}{2}$ קטן מ-1-, אך אינו גדול מהביטוי (-1). מכיוון שאי-השוויון שהתקבל **אינו** נכון, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

.9 **השאלה**: ביום א מכרה אסתר 70% מהפרחים שברשותה, וביום ב מכרה את הפרחים הנותרים.
ההפרש בין מספר הפרחים שאסתר מכרה ביום א ובין מספר הפרחים שמכרה ביום ב הוא 12.

כמה פרחים מכרה אסתר סך הכול?

פיתרון: **__דרך א׳__:** בדיקת תשובות

בשאלות אחוזים מומלץ להתחיל בבדיקת התשובות העגולות, במקרה שלנו תשובות (2) ו-(4).

__תשובה (2)__: 20**.**

נתון כי אסתר מכרה ביום א׳ 70% מהפרחים שברשותה.
10% מ-20 הם 2, ומכאן ש-70% מ-20 הם 14 $(=7\cdot 2)$.
אם אסתר מכרה ביום א׳ 14 פרחים, הרי שביום ב׳ היא מכרה 6 פרחים $(=20-14)$.
מצאנו כי ההפרש בין מספר הפרחים שמכרה אסתר ביום א׳ וביום ב׳ הוא 8 $(=14-6)$, מכיוון שעל פי נתוני השאלה ההפרש הוא 12, הרי שתשובה זו נפסלת.

__תשובה (4)__: 30**.**

אסתר מכרה ביום א׳ 70% מהפרחים שברשותה.
10% מ-30 הם 3, ומכאן ש-70% מ-30 הם 21 $(=7\cdot 3)$.
אם אסתר מכרה ביום א׳ 21 פרחים, הרי שביום ב׳ היא מכרה 9 פרחים $(=30-21)$.
מצאנו כי ההפרש בין מספר הפרחים שמכרה אסתר ביום א׳ וביום ב׳ הוא 12 $(=21-9)$, מכיוון שההפרש שקיבלנו בין שני הימים תואם את נתוני השאלה, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

על פי נתוני השאלה, ביום א מכרה אסתר 70% מהפרחים שברשותה, ולכן נותרו לה 30% מהם $(100\%-70\%=)$, שאותם היא מכרה ביום ב. כלומר, מספר הפרחים הנותרים אותם מכרה אסתר ביום ב שווה ל-30%. ההפרש באחוזים בין מספר הפרחים שמכרה אסתר ביום א ובין מספר הפרחים שמכרה ביום ב הוא 40% $(70\%-30\%=)$.

נתון כי ההפרש בין מספר הפרחים שמכרה אסתר בימים אלה שווה ל-12, ולפיכך ניתן לקבוע ש-40% מהפרחים שברשות אסתר שווים ל-12. בשלב זה ניתן לפתור את השאלה באמצעות משוואה המייצגת את היחס או באמצעות ריבוע יחסים:

פרחים	%
12	40
x	100

מכיוון שהיחס בכל עמודה שווה, ניתן ליצור את המשוואה: $\frac{12}{x}=\frac{40}{100} \Leftarrow \frac{12}{x}=\frac{2}{5}$.

נכפול ב-5x את שני האגפים, ונקבל: $2x=12\cdot 5$.

נחלק ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $x=\frac{12\cdot 5}{2}=30$.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: מספר העטים באוסף העטים של יעקב שווה ל- $\frac{5}{8}$ ממספר העטים באוסף של שמעון.

איזה **חלק** מאוסף העטים **שלו** שמעון צריך לתת ליעקב כדי שיהיה לשניהם אותו מספר עטים?

פיתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שלא נתון מה מספר העטים באוסף של יעקב ושמעון, ניתן לפתור את השאלה באמצעות הצבת דוגמה מספרית נוחה. נבחר, למשל, כמספר העטים של שמעון, מספר נוח אשר מתחלק ב-8, למשל 8.

אם לשמעון יש 8 עטים, הרי שליעקב יש 5 עטים $\left(=\frac{5}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8}\right)$. כמות העטים שיש לשניהם יחד הוא 13 עטים. אם נחלק את כמות העטים שווה בשווה יהיה לכל אחד מהם 6.5 עטים. מכיוון שמספר זה אינו מספר שלם, הרי שעלינו לבחור מספר גדול יותר אשר ייצג את מספר העטים של שמעון, למשל 16. .

אם מספר העטים של שמעון הוא 16, מכיוון שמספר העטים של יעקב מהווה $\frac{5}{8}$ ממספר העטים של שמעון, הרי שליעקב יש 10 עטים $\left(=\frac{5}{8}\cdot 16\right)$, ולשניהם יחד יש 26 עטים $(10+16=)$.

אם נחלק את כמות העטים שווה בשווה נמצא כי לכל אחד מהם צריכים להיות 13 עטים $\left(=\frac{26}{2}\right)$.

לשמעון יש 16 עטים, ולכן על מנת שיישארו לו 13 עטים, עליו לתת ליעקב 3 עטים.

שמעון נותן 3 עטים מתוך 16 העטים שברשותו, כלומר שמעון נתן ליעקב $\frac{3}{16}$ מהעטים שלו על מנת שלשניהם יהיה אותו מספר עטים.

<u>דרך ב'</u>: בניית משוואה

נסמן: מספר העטים של שמעון=S, מספר העטים ששמעון צריך להעביר ליעקב=x

ליעקב יש $\frac{5}{8}$ מכמות העטים שיש לשמעון ומכאן שכמות העטים שיש ליעקב שווה ל- $\frac{5}{8}S$. אם שמעון ייתן ליעקב x עטים שמספר העטים של השניים יהיה שווה ולכן: $S - x = \frac{5}{8}S + x$

נחבר x ונחסר $\frac{5}{8}S$ משני האגפים, ונקבל: $\frac{3}{8}S = 2x$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-2, ונקבל: $x = \frac{3}{16}S$.

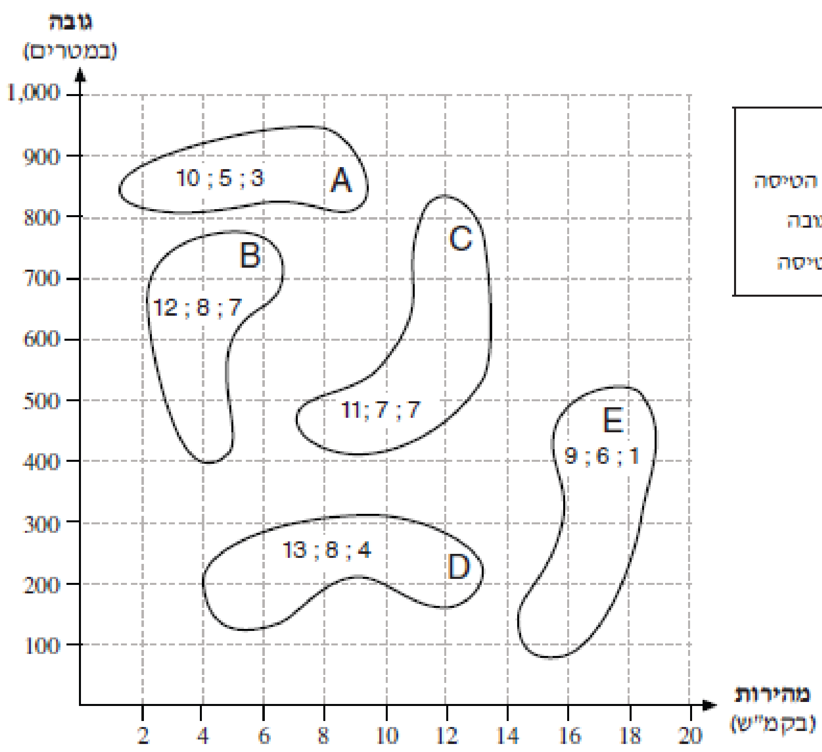
תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 14-11)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

בתרשים שלפניכם נתונים בנוגע לחמישה כדורים פורחים, A, B, C, D ו-E שיצאו יחד לטיסה בת ארבע שעות. כל צורה בתרשים מייצגת את טווח המהירויות של כדור פורח אחד ואת טווח הגבהים שבהם שהה במהלך הטיסה. במהלך ארבע השעות נזרקו מהכדורים הפורחים שקי חול. שלושת המספרים שבתוך כל צורה מציינים את מספר שקי החול שהיו בכדור הפורח בנקודות זמן שונות: המספר השמאלי מציין את מספר השקים בתחילת הטיסה, המספר האמצעי - את מספר השקים כאשר הכדור הפורח היה בשיא גובהו, והמספר הימני - את מספר השקים שנותרו בתום הטיסה (ראו מקרא).

לדוגמה: כדור B שהה בין הגבהים 780-400 מטרים, בשיא גובהו היו בו 8 שקי חול, והוא נע במהירויות שבין 2.2 קמ"ש ל-6.8 קמ"ש.



מקרא:

x ; y ; z
x - מספר השקים בתחילת הטיסה
y - מספר השקים בשיא הגובה
z - מספר השקים בתום הטיסה

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

11. ***השאלה*** : בכל פעם שזורקים שק חול מכדור פורח, הכדור עולה ב-30 מטרים.

מה הגובה המקסימלי (במטרים) שכדור **D** היה יכול להגיע אליו, אילו בשיא הגובה המצוין בתרשים היו נזרקים ממנו כל שקי החול שהיו בו באותה עת?

פיתרון: על פי התרשים כדור D היה בשיא גובהו בגובה של קצת יותר מ-300 מטרים, ומספר שקי החול שהיו בו בגובה זה היה 8. בכל פעם שזורקים שק חול מכדור פורח, הכדור עולה ב-30 מטרים, ומכאן שאם היו נזרקים ממנו כל 8 השקים הוא היה עולה ב-240 מטרים $(8\cdot 30=)$. במקרה כזה הכדור היה מגיע לגובה של קצת יותר מ-540 מטרים. ומכאן שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

תשובה (1).

12. **השאלה** : משקלו של כל שק חול הוא 50 ק״ג. משקלו של כדור A (ללא שקים) הוא 1,000 ק״ג.

$$\frac{\text{משקלו של כדור A בתום הטיסה}}{\text{משקלו של כדור A בתחילת הטיסה}} = ?$$

פיתרון: לפי נתוני התרשים, בסוף הטיסה היו על הכדור 3 שקי חול. מכיוון שמשקלו של כל שק חול הוא 50 ק״ג, הרי שמשקלם הכולל הוא 150 ק״ג $(= 50 \cdot 3)$.

אם משקלו של כדור A (ללא שקים) הוא 1,000 ק״ג, הרי שמשקלו של כדור A בתום הטיסה הוא 1,150 ק״ג $(= 1{,}000 + 150)$.

בתחילת הטיסה היו על הכדור 10 שקי חול ולכן משקלם הכולל הגיע ל-500 ק״ג $(= 50 \cdot 10)$.

אם משקלו של כדור A (ללא שקים) הוא 1,000 ק״ג, הרי שהמשקל הכולל של הכדור בתחילת הטיסה היה 1,500 ק״ג $(= 1{,}000 + 500)$.

מכאן שהיחס בין משקלו של כדור A בתום הטיסה למשקלו בתחילתה שווה ל- $\frac{115\cancel{0}}{150\cancel{0}} \Leftarrow \frac{23}{30}$.

תשובה (3).

---

13. **השאלה** : בין אילו מזוגות הכדורים הבאים **ייתכן** כי ארעה התנגשות במהלך ארבע שעות הטיסה?

פיתרון : כדי ששני כדורים יוכלו להתנגש זה בזה הם צריכים להיות באותו גובה במהלך ארבע שעות הטיסה. נעבור על התשובות המוצעות :

<u>תשובה (1)</u> : A ו-B

כדור A טס בין הגבהים 810-950 מטרים בערך, וכדור B טס בין הגבהים 400-770 מטרים בערך. מכיוון שאין כל חפיפה בין הגבהים של הכדורים, לא ייתכן כי הם התנגשו במהלך הטיסה, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u> : C ו-D

כדור D טס בין הגבהים 120-310 מטרים בערך, וכדור C טס בין הגבהים 410-840 מטרים בערך. מכיוון שאין כל חפיפה בין הגבהים של הכדורים, לא ייתכן כי הם התנגשו במהלך הטיסה, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u> : A ו-E

כדור E טס בין הגבהים 80-520 מטרים בערך, וכדור A טס בין הגבהים 810-950 מטרים בערך. מכיוון שאין כל חפיפה בין הגבהים של הכדורים, לא ייתכן כי הם התנגשו, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u> : B ו-E

כדור E טס בין הגבהים 80-520 מטרים בערך, וכדור B טס בין הגבהים 400-770 מטרים בערך. מכיוון שקיימת חפיפה בין גבהי הטיסה של שני הכדורים, ייתכן כי הם התנגשו במהלך הטיסה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

14. **השאלה** : במהלך ארבע השעות המתוארות בתרשים, בכל כמה דקות בממוצע נזרק שק חול מכדור B?

פיתרון : בשעה יש 60 דקות, ולכן ב-4 שעות יש 240 דקות $(= 60 \cdot 4)$. על כדור B היו בתחילת הטיסה 12 שקי חול ובתום הטיסה היו עליו 7 כדורים, מכאן שבמהלך הטיסה נזרקו ממנו 5 שקי חול $(= 12 - 7)$. מספר הדקות הממוצע בו נזרק שק חול מהכדור הוא סך כל זמן הטיסה בדקות לחלק למספר הכדורים שנזרקו, כלומר 48 $\left(= \frac{240}{5}\right)$.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 15-20)

15. **השאלה**: נתון: $0 < a \cdot b$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a + b$$

איזה מהטענות הבאות נובעת **בהכרח** מהנתון?

פיתרון: דרך א': פתרון משוואה

ניצור מכנה משותף על הכפלת שני צדי המשוואה הנתונה ב- $a \cdot b$: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a + b$,

ונקבל: $b + a = a \cdot b \cdot (a + b)$

ידוע ש-a ו-b חיוביים ולכן אפשר לחלק את שני אגפי המשוואה בגורם החיובי $(a + b)$, ולקבל: $a \cdot b = 1$.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נציב דוגמה מספרית שמקיימת את הנתון, למשל $a = b = 1$, אשר הצבתה מקיימת את המשוואה.
כעת נעבור על התשובות המוצעות, ונראה מי מהן מתקיימת בהצבת המספרים שמצאנו:

תשובה (1): $b^a = a^b$. נציב $a = b = 1$, ונקבל: $1^1 = 1^1 \Leftarrow 1 = 1$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שהתשובה מתאימה.

תשובה (2): $a \cdot b = 1$. $1 \cdot 1 = 1 \Leftarrow 1 = 1$. קיבלנו משוואה נכונה ולכן התשובה מתאימה.

תשובה (3): $a^2 + b^2 = 1$. נציב $a = b = 1$, ונקבל: $1^2 + 1^2 = 1 \Leftarrow 2 = 1$.
מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, הרי שהתשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{b}$ נציב $a = b = 1$, ונקבל: $\frac{1^2}{1} = \frac{1^2}{1} \Leftarrow 1 = 1$. קיבלנו משוואה נכונה ולכן התשובה מתאימה.

מכיוון שנותרנו עם שלוש תשובות נכונות, עלינו להציב פעם נוספת ולבדוק את התשובות שנותרו.
נציב $a = \frac{1}{2}, b = 2$:

תשובה (1): $b^a = a^b$

$2^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^2 \Leftarrow \sqrt{2} = \frac{1}{4}$. מכיוון שקיבלנו משוואה לא נכונה, הרי שהתשובה נפסלת.

תשובה (2): $a \cdot b = 1$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Leftarrow 1 = 1$. קיבלנו משוואה נכונה, ולכן התשובה מתאימה.

תשובה (4): $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{b}$

$\frac{2^2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}^2}{2} \Leftarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{2} \Leftarrow 8 = \frac{1}{8}$. קיבלנו משוואה לא נכונה ולכן התשובה נפסלת.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות, הרי שהתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.16 **השאלה**: לכל שני מספרים x ו-y הוגדרה הפעולה $\$(x,y)$ כך: $\$(x,y)=\frac{2^{x+y}}{2^{x-y}}$

נתון: $\$(k,1)=4$

$k=?$

פיתרון: נבטא את $\$(k,1)$ בעזרת הפעולה שהוגדרה: $\$(k,1)=\frac{2^{k+1}}{2^{k-1}}$, כעת נשווה את הביטוי שקיבלנו ל-4, ונקבל: $\frac{2^{k+1}}{2^{k-1}}=4$.

באמצעות חוק החזקות: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, נפשט את הביטוי שבאגף שמאל של המשוואה, ונקבל:

$\frac{2^{k+1}}{2^{k-1}}=4 \Leftarrow 2^{k+1-(k-1)}=4 \Leftarrow 2^{k+1-k+1}=4 \Leftarrow 2^2=4 \Leftarrow 4=4$.

מכיוון שקיבלנו 'פסוק אמתי' - משוואה אשר נכונה תמיד, הרי ש-k יכול להיות שווה לכל מספר.

תשובה (1).

.17 **השאלה**: מטילים מטבע הוגן 10 פעמים.

מה ההסתברות שהמטבע ייפול על אותו צד בכל 10 ההטלות?

פיתרון: מכיוון שהשאלה אינה מבקשת שנקבל צד מסוים, הרי שכל תוצאה אשר תתקבל בהטלה הראשונה רצויה, ומכאן שההסתברות שהמטבע ייפול על צד כלשהו בהטלה הראשונה שווה ל-1 $\left(=\frac{2}{2}=\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}\right)$.

לאחר ההטלה הראשונה, הרי שהתוצאה הרצויה בהטלה השנייה, ובכל יתר ההטלות שאחריה, היא התוצאה שהתקבלה בהטלה הראשונה, כלומר החל מההטלה השנייה והלאה, יש אפשרות רצויה אחת מבין שתי האפשרויות הקיימות בהטלת מטבע.

מכאן, שההסתברות שנקבל תוצאה רצויה בכל הטלה, החל מן ההטלה השנייה ואילך היא $\frac{1}{2}$.

לסיכום, ההסתברות שהמטבע ייפול על אותו צד בכל 10 ההטלות היא מכפלת כל ההסתברויות שמצאנו, כלומר: $1\cdot(\frac{1}{2})^9 \Leftarrow \frac{1}{2^9}$.

תשובה (3).

.18 **השאלה**: נתון: $a\cdot b=a$

$b^2<b$

$a+b=?$

פיתרון: המשוואה $a\cdot b=a$ יכולה להתקיים בשני מצבים:

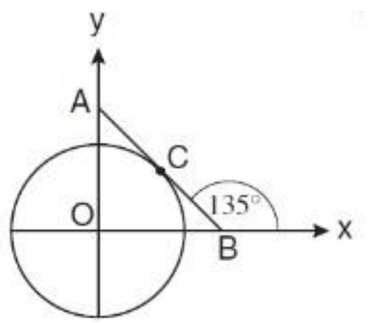
א) כאשר $a=0$

ב) כאשר $b=1$.

אם $b=1$, הרי שאי-השיוויון הנתון $\left(b^2<b\right)$ אינו מתקיים, ומכאן ש-b בהכרח שונה מ-1, ולכן המצב היחיד האפשרי הוא ש-a שווה ל-0.

כאשר $a=0$, הביטוי $(a+b)$ שווה ל- b $\left(a+b=0+b=\right)$.

תשובה (4).



.19 **השאלה**: במערכת הצירים שלפניכם נתון מעגל שמרכזו בראשית הצירים O ורדיוסו 1.
AB משיק למעגל בנקודה C.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש AOB?

פיתרון: הזווית אשר על פי הנתון שווה ל-$135°$, צמודה לזווית $\angle ABO$
ולכן $\angle ABO = 45°$ $(= 180° - 135°)$.

הזווית בין ציר ה- x לציר ה-y ישרה, ומכאן שהמשולש AOB הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.
נתבקשנו למצוא את שטח המשולש AOB, שהוא כאמור, משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.
נתון כי רדיוס המעגל הוא 1 ס"מ. רדיוס לנקודת ההשקה יוצר זווית בת $90°$ עם המשיק למעגל.
לפי נתוני השאלה AB הוא משיק למעגל. מכאן שאם נסרטט רדיוס מנקודה O לנקודה C, נקבל כי $\angle OCB$ היא זווית ישרה, ומכאן שגם משולשים OCB ו-OCA הם משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים $(OC = CB)$.
במשולשים OCB ו-OCA, הניצב OC הוא רדיוס המעגל, ולכן $OC = CB = 1$.
שטח המשולשים OCB ו-OCA שווה למכפלת ניצבי המשולשים לחלק ב-2, ומכאן ששטח כל אחד מהמשולשים הוא $\frac{1}{2}$ סמ"ר $\left(= \frac{1 \cdot 1}{2}\right)$.

סך הכול, סכום שטחי שני המשולשים, אשר מהווים יחדיו את משולש AOB, הוא 1 סמ"ר $\left(= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$.

תשובה (1).

.20 **השאלה**: סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות קטן פי 2 מסכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל $n + 5$ צלעות.

$n = ?$

פיתרון: בניית משוואה

סכום זוויות פנימיות במצולע בעל n צלעות שווה ל- $180° \cdot (n - 2)$.
סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל $(n + 5)$ צלעות שווה ל- $180°(n + 5 - 2)$ ⇦ $180° \cdot (n + 3)$.
נתון כי סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות קטן פי 2 מסכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל $n + 5$ צלעות, ומכאן שניתן לבנות את המשוואה: $2 \cdot 180 \cdot (n - 2) = 180 \cdot (n + 3)$.
נחלק את שני האגפים ב-180, ונקבל: $2 \cdot (n - 2) = n + 3$ ⇦ $2n - 4 = n + 3$.
נחסר n ונחבר 4 משני האגפים, ונקבל: $n = 7$.

תשובה (3).
