מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(2)	(4)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(4)	(3)	(1)	(3)	(1)	(1)	(3)	(2)	(4)

שאלה	21	22	23	24	25
תשובה	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-6)

1. **השאלה**: מחיר צנצנת דבש הוא $\frac{x^2+18}{x}$ שקלים. מחיר צנצנת ריבה הוא x שקלים.
אם מחיר צנצנת דבש גבוה פי 3 ממחיר צנצנת ריבה, מה מחיר צנצנת ריבה (בשקלים)?
פיתרון:

מכיוון שמחיר צנצנת דבש גדול פי 3 ממחיר צנצנת ריבה נבנה משוואה ולפיה: $3x = \frac{x^2+18}{x}$.

נכפול ב-x את שני האגפים: $x^2+18=3x^2 \Leftarrow 18=2x^2 \Leftarrow 9=x^2 \Leftarrow \pm3=x$.

תשובה (3).

---

2. **השאלה**: בלול של משה יש 12 תרנגולות . כל תרנגולת מטילה 2 או 3 ביצים בכל יום.
ביום מסוים הטילו כל התרנגולות יחד 28 ביצים.

מה יכול להיות מספר התרנגולות שהטילו 2 ביצים בדיוק?

פיתרון:

דרך א׳: משוואה.

נסמן ב-x את מספר התרנגולות שמטילות 2 ביצים ביום. מכיוון שבלול של משה 12 תרנגולות הרי שמספר התרנגולות שמטילות 3 ביצים הוא $(12-x)$.

סכום הביצים שהוטלו על ידי התרנגולות הוא 28, כלומר: $2x+3\cdot(12-x)=28$

$2x+36-3x=28 \Leftarrow 36-x=28 \Leftarrow 8=x$.

דרך ב׳: הצבת תשובות

תשובה (1): 9. אם 9 תרנגולות הטילו 2 ביצים כל אחת, הרי ש-3 תרנגולות הטילו 3 ביצים כל אחת.
סכום הביצים שהוטלו על ידי כל התרנגולות יחד 27 $(=9\cdot2+3\cdot3)$.

תשובה (2): 8. אם 8 תרנגולות הטילו 2 ביצים כל אחת, הרי ש-4 תרנגולות הטילו 3 ביצים כל אחת.
סכום הביצים שהוטלו על ידי כל התרנגולות יחד 28 $(=8\cdot2+4\cdot3)$.

תשובה (2).

.3 **השאלה**: איזה מן המשולשים הבאים **אינו בהכרח** משולש שווה צלעות?

פיתרון:

<u>תשובה (1)</u>: מכיוון ששתיים מזוויות המשולש הן בנות $60°$ אז בהכרח גם הזווית השלישית שווה ל-$60°$, כלומר המשולש בהכרח שווה צלעות.

<u>תשובה (2)</u>: זווית הראש של המשולש שווה השוקיים שווה ל-$60°$, כלומר כל זוויות המשולש שוות ל-$60°$.

<u>תשובה (3)</u>: במשולש המתואר בסרטוט חוצה הזווית הוא גם גובה. מכאן שהמשולש הוא בהכרח שווה שוקיים אבל אינו בהכרח שווה צלעות. זו התשובה הנכונה.

<u>תשובה (4)</u>: המשולש המתואר בסרטוט הוא משולש שווה שוקיים.
המשולש אשר יצר גובה המשולש הוא משולש זהב, משולש שאחד מניצביו מהווה מחצית מן היתר.
מכאן שזווית הבסיס של המשולש שווה השוקיים היא זווית בת $60°$.
משולש שווה שוקיים שאחת מזוויותיו היא בת $60°$ הוא בהכרח משולש שווה צלעות.

תשובה (3).

.4 **השאלה**: ABCD מקבילית אשר העבירו שני ישרים מקבילים a ו-c דרך שניים מקודקודיה.
נתבקשנו למצוא את סכום הזוויות α, β ו-γ.

פיתרון: נרכז את כל הזוויות הנתונות בסרטוט במשולש הימני העליון.
ישר c מקביל לישר a ומכאן שהזווית המתאימה ל-α היא זווית פנימית במשולש הימני העליון.
סכום זוויות α, β ו-γ שווה ל-$180°$.

תשובה (2).

.5 **השאלה**: לכל שני מספרים x ו-y הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
$\$(\$(2,1),2)=?$

פיתרון: נחשב ראשית את ערך הסוגריים הפנימיים.
$$\$(2,1)=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
קיבלנו: $\$(\sqrt{5},2)$.
$$\$(\sqrt{5},2)=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$$

תשובה (3).

.6 **השאלה**: a, b, c ו-d הם ארבעה מספרים עוקבים שסכומם 2.

מה מכפלת ארבעת המספרים?

<u>**פיתרון**</u>: ניתן להמיר את כל המשתנים למשתנה אחד: a, $a+1$, $a+2$, $a+3$.
סכום כל המשתנים שווה ל-2, כלומר: $a+a+1+a+2+a+3=2$.

$4a+6=2 \Leftarrow 4a=-4 \Leftarrow a=-1$.

ארבעת המספרים העוקבים הם: 1-, 0, 1 ו-2.
מכיוון שאחד המספרים העוקבים הוא 0, הרי שבהכרח מכפלתם שווה ל-0.

תשובה (1).

השוואות כמותיות (שאלות 7-11)

	טור א	טור ב	מידע נוסף
7. השאלה:	מספר הגולות הממוצע של שמואל ונעמי **לפני** ההעברה	מספר הגולות הממוצע של שמואל ונעמי **אחרי** ההעברה	לשמואל היו x גולות $(1 < x)$, ולנעמי היו יותר גולות מלשמואל. נעמי העבירה לשמואל אחת מהגולות שלה.

מידע נוסף: נעמי מעבירה לשמואל אחת מהגולות שברשותה. מכיוון שמספר הגולות הכולל של שמואל ונעה לפני ההעברה ולאחר ההעברה כמובן שווה. ממוצע מספר הגולות שברשות שמואל ונעמי שווה למספר הגולות הכולל שברשותם לחלק ל-2. מכיוון שמספר הגולות שברשות שניהם גם יחד נשאר שווה הרי שגם ממוצע מספר הגולות של שמואל ונעמי לפני ההעברה ולאחר ההעברה ישאר שווה.

הביטוי שבטור א' שווה לביטוי שבטור ב'.

תשובה (3).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
8. השאלה:	סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 7 צלעות	סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 9 צלעות	

סכום הזוויות הפנימיות בכל מצולע שווה ל-$180° \cdot (n-2)$.

טור א': סכום הזוויות הפנימיות בכל מצולע שווה ל-$180° \cdot (n-2)$, ומכאן שסכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 7 צלעות הוא $180° \cdot (7-2) = 180° \cdot 5$.

טור ב': סכום הזוויות הפנימיות בכל מצולע שווה ל-$180° \cdot (n-2)$, ומכאן שסכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 9 צלעות הוא $180° \cdot (9-2) = 180° \cdot 7$.

הביטוי שבטור ב' גדול מהביטוי שבטור א'.

תשובה (2).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
9. השאלה:	$\frac{a}{b}$	$\frac{a^3}{b^3}$	$0 < a , b$

ראשית נפשט את הביטויים שבטורים. נכפול את שני הטורים ב- b^3, ולאחר מכן נחלק ב-a, נקבל:

טור א'	טור ב'	מידע נוסף
b^2	a^2	$0 < a , b$

כל שידוע על a ו-b הוא כי שניהם חיוביים, אולם לא ידוע דבר לגבי היחס בין a ו-b. יתכן כי a ו-b שווים ואז שני הטורים שווים ויתכן שהביטויים אינם שווים.
המידע הנתון אינו מספיק על מנת לקבוע את יחס הגדלים בין הטורים.

תשובה (4).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
10.השאלה:	היקף המשולש ABC (בס"מ)	18	ABC הוא משולש אשר אורך אחת מצלעותיו 4 ס"מ ואורך הצלע האחרת היא 5 ס"מ.

טור א': היקף המשולש ABC (בס"מ) שווה לסכום אורכי שתי הצלעות הנתונות ועוד הצלע BC, כלומר:

טור א'	**טור ב'**
$4+5+BC$	18

נחסר 9 משני הטורים, ונקבל:

טור א'	**טור ב'**
BC	9

אורך צלע במשולש קטן מסכום שתי הצלעות האחרות וגדול מההפרש שביניהן.
לגבי המשולש שבשאלה נתון כי אורך שתיים מצלעותיו הוא 4 ס"מ ו-5 ס"מ, מכאן שאורך הצלע השלישית קטן מ-9 ס"מ $(=5+4)$ וגדול מ-1 ס"מ $(=5-4)$.

טור ב' בהכרח גדול מטור א'.

תשובה (2).

	טור א	טור ב	מידע נוסף
11.השאלה:	1	$x-y$	$(x+y)^2=1$

מידע נוסף: מכיוון שאיננו רואים כיצד פישוט אלגברי של המשוואה הנתונה עשוי להביא אותנו למסקנות לגבי ההפרש בין המשתנים, כלומר לכמה שווה הביטוי $x-y$, ננסה לפתור את השאלה באמצעות הצבת מספרים.
נציב לדוגמה כי $x=1; y=0$.

טור ב': $x-y=1-0=1$.

במצב זה הביטויים בשני הטורים שווים זה לזה.

ננסה להציב מספרים נוספים על מנת לבדוק האם אכן הביטויים בשני הטורים שווים זה לזה תמיד.
נציב כי $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{2}$.

טור ב': $x-y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

מכיוון שכעת טור א' גדול מטור ב', ניתן לקבוע כי המידע הנתון אינו מספיק על מנת לקבוע את יחס הגדלים בין הטורים.

תשובה (4).

הסקה מטבלה (שאלות 12-16)

12. **השאלה**: יעילות של מתקן מוגדרת כ: $\frac{\text{מספר המבקרים המקסימלי בכל הפעלה}}{\text{משך ההפעלה}}$.

לאיזה מן המתקנים היעילות הגדולה ביותר?

פיתרון:

תשובה (1): גלגל ענק $\frac{45}{8}=5\frac{5}{8}$.

תשובה (2): מעלית נופלת $\frac{10}{2}=5$.

תשובה (3): צלחת מעופפת $\frac{20}{10}=2$.

תשובה (4): רכבת הרים $\frac{24}{4}=6$.

תשובה (4).

---

13. **השאלה**: גילו של רון מאפשר לו לעלות רק על $\frac{2}{3}$ מן המתקנים בפארק השעשועים.

מה יכול להיות גילו של רון?

פיתרון: מי שגילו מאפשר לו לעלות על $\frac{2}{3}$ מן המתקנים יכול לעלות על 6 מתקנים מתוך 9 המתקנים $\left(\frac{2}{3}\cdot 9=\right)$. נבדוק את התשובות המוצעות.

תשובה (1): 5. בני גיל 5 יכולים לעלות ל-5 מתקנים מתוך 9 המתקנים.

תשובה (2): 7. בני גיל 7 יכולים לעלות ל-5 מתקנים מתוך 9 המתקנים.

תשובה (3): 9. בני גיל 9 יכולים לעלות ל-6 מתקנים מתוך 9 המתקנים. אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (3).

---

14. **השאלה**: יוגב הגיע אל המעלית הנופלת בדיוק כשהסתיימה אחת ההפעלות שלה, והיה עליו להמתין 34 דקות עד שהגיע תורו לעלות עליה.
כמה פעמים, לכל היותר, הופעלה המעלית הנופלת בזמן שהמתין יוגב?

פיתרון: זמן ההפעלה של המעלית הנופלת הוא 2 דקות ומשך ההפסקה המינימלי בין כל שתי הפעלות הוא דקה אחת.
על מנת שהמעלית תופעל מספר רב ככל האפשר של פעמים על ההפסקות להיות קצרות ככל האפשר, כלומר כל הפעלה צריכה להיות בת דקה אחת בדיוק. במצב כזה חולפות בין כל שתי הפעלות של המעלית 3 דקות בדיוק (2 דקות הפעלה + 1 דקה הפסקה).
יוגב הגיע בדיוק כאשר הסתיימה אחת ההפעלות, כלומר היה עליו להמתין דקה עד לתחילת ההפעלה הבאה ולאחר מכן עוד 33 דקות שבמהלכן הופעלה המעלית לכל היותר 11 פעמים $\left(\frac{33}{3}=\right)$.

תשובה (1).

---

15. **השאלה**: ביום מסוים החלו כל המתקנים לפעול בדיוק באותו הזמן.

כמה מתקנים, לכל היותר, פעלו כעבור $10\frac{1}{2}$ דקות?

פיתרון: בשאלה זו עלינו לעבור מתקן, מתקן ולבדוק האם יתכן כי פעל לאחר $10\frac{1}{2}$?

גלגל ענק: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 8 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 9 דקות $(=1+8)$. יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה השניה שלו.

מבוך מראות: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 10 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, לא יתכן כי מתקן זה פעל לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות.

מכוניות מתנגשות: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 7 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 8 דקות $(=1+7)$ יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה השניה שלו.

מסלול מירוצים: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 3 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 4 דקות. לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה השלישית שלו.

מעלית נופלת: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 2 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 3 דקות. לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה הרביעית שלו.

ספינת פיראטים: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 4 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 5 דקות. לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה השלישית שלו.

צלחת מעופפת: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 10 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, לא יתכן כי מתקן זה פעל לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות.

קרוסלה: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 15 דקות.. לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות מתקן זה היה בהכרח באמצע ההפעלה הראשונה שלו.

רכבת הרים: זמן ההפעלה של מתקן זה הוא 4 דקות. מכיון שזמן ההפסקה הוא 1 דקה לכל הפחות, הרי ש׳מחזור׳ אחד הוא בן 5 דקות. לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות יתכן כי מתקן זה היה באמצע ההפעלה השלישית שלו.

סך הכול מתוך 9 מתקנים בפארק השעשועים ישנם שני מתקנים שלא יתכן כי פעלו לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות: מבוך מראות וצלחת מעופפת. כלומר יתכן כי 7 פעלו לאחר $10\frac{1}{2}$ דקות.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: ביום מסוים הופעלה ספינת הפיראטים במשך שעתיים בסך הכול (לא כולל הפסקות).
ידוע ששום מבקר לא עלה על המתקן יותר מפעם אחת.

איזה מהבאים אינו יכול להיות מספר המבקרים שעלו על ספינת הפיראטים באותו יום?

פיתרון:

הטבלה מספקת נתונים לגבי מספר המבקרים המינימלי והמקסימלי בכל הפעלה. נבדוק כמה הפעלות היו במהלך השעתיים ומה מספר המבקרים המינימלי והמקסימלי שביקרו במתקן.

ספינת הפיראטים הופעלה במשך שעתיים שהם 120 דקות (לא כולל הפסקות).
מכיוון שמשך הפעילות בכל הפעלה הוא 4 דקות, הרי שהמתקן הופעל במהלך שעתיים אלו 30 פעמים $\left(=\frac{120}{4}\right)$.

מספר המבקרים המינימלי בכל הפעלה הוא 7 ומספר המבקרים המקסימלי הוא 25.
כלומר לכל הפחות היו 210 מבקרים במהלך השעתיים. ניתן כבר בשלב זה לראות כי המספר בתשובה (1) קטן מ-210, כלומר זוהי התשובה הנכונה ואין צורך לחשב את מספר המבקרים המקסימלי.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 17-25)

17. **השאלה**: מכפלת מספר הבולים שיש לבועז במספר הבולים שיש ללימור היא a $(a \neq 0)$.

מכפלת מספר הבולים שיש לבועז במספר הבולים שיש לדפנה הוא $\frac{2}{3}a$.

מספר הבולים שיש ללימור גדול פי _____ ממספר הבולים שיש לדפנה.

פיתרון:

דרך א': אלגברה

מכפלת מספר הבולים שיש לבועז במספר הבולים שיש ללימור היא a.
נסמן את מספר הבולים של בועז ב-B ואת מספר הבולים שיש ללימור ב-L. כלומר $B \cdot L = a$.
מכפלת מספר הבולים שיש לבועז במספר הבולים שיש לדפנה הוא $\frac{2}{3}a$. נסמן את מספר הבולים שיש לדפנה ב-D, ונקבל: $B \cdot D = \frac{2}{3}a$.

קיבלנו שתי משוואות עם שלושה נעלמים שמאחד מהם – B ברצוננו להיפטר.

נחלץ את B מהמשוואה הראשונה, ונקבל: $B = \frac{a}{L}$.

נציב נתון זה במשוואה השניה: $B \cdot D = \frac{2}{3}a$, ונקבל: $\frac{a}{L} \cdot D = \frac{2}{3}a \Leftarrow \frac{a \cdot D}{L} = \frac{2a}{3}$

נכפול את שני האגפים ב-3L, ונקבל: $3a \cdot D = 2a \cdot L$, נחלק את שני האגפים ב-a, ונקבל: $3D = 2L$.
מכיוון שנתבקשנו למצוא פי כמה גדול מספר הבולים שיש ללימור ממספר הבולים שיש לדפנה נחלץ מהמשוואה את L – מספר הבולים שיש ללימור.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $L = \frac{3D}{2}$.

מספר הבולים שיש ללימור גדול פי $\frac{3}{2}$ ממספר הבולים שיש לדפנה.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נציב כי מספר הבולים שיש לבועז הוא 2 וכי מספר הבולים שיש ללימור הוא 6 (מכיוון שמכפלת מספר הבולים שיש לבועז ולימור הוא $\frac{2}{3}a$, אנו בחורים בכוונה תחילה מספרים שתוצאת מכפלתם תהיה מספר המתחלק ב-3).

מכפלת מספר הבולים שיש לבועז ודפנה הוא $\frac{2}{3}$ ממספר הבולים שיש לבועז ולימור, כלומר 8 בולים $\left(\frac{2}{3}\cdot 12=\right)$.

מכיוון שהצבנו כי לבועז יש 2 בולים, הרי שדפנה יש 4 בולים $\left(\frac{8}{2}=\right)$.

מספר הבולים שיש ללימור גדול פי $\frac{3}{2}$ ממספר הבולים שיש לדפנה $\left(\frac{6}{4}=\right)$.

תשובה (1).

.18 **השאלה**: $\sqrt{2\sqrt{2}}=?$

פיתרון: לצורך פישוט הביטוי הנתון בשאלה נשתמש בחוק השורשים ולפיו $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ונמיר את הביטוי כך שיהיה כתוב בצורת חזקה ואם יהיה צורך נמיר גם את התשובות הכתובות בצורת שורש לכתיבה בצורת חזקה.

נתחיל מהשורש הפנימי: $\sqrt{2^{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$.

נמשיך תוך שימוש באותו חוק, ונקבל: $2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}$.

תשובה (3).

.19 **השאלה**: מכיוון שאנו מתבקשים למצוא את זווית DAC וכל התשובות משתמשות ב-α, הרי שעלינו למצוא את הקשר בין זווית זו ל-α.

פיתרון:
זווית DAC היא זווית היקפית הנשענת על הקשת הקצרה DC.
על מנת למצוא גודל הזווית עלינו למצוא מה גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת DC.

זווית α הנתונה בשאלה היא זווית היקפית הנשענת על הקשת הקצרה AE. זווית EOA היא זווית המרכזית הנשענת על אותה קשת ומכאן שהיא כפולה ממנה בגודלה, כלומר שווה ל-2α.

על פי נתוני השאלה הקשת הקצרה AE שווה לקשת הקצרה AB, ומכאן שהזווית המרכזית AOB הנשענת על הקשת AB שווה אף היא ל-2α.
מצאנו כי הזווית המרכזית EOB שווה ל-4α.

הזווית המרכזית על הקשת DC, זווית DOC, היא זווית קודקודית לזווית EOB, ומכאן שאף היא שווה ל-4α והזווית ההיקפית DAC שווה למחצית ממנה, כלומר ל-2α.

תשובה (2).

.20 **השאלה**: לשירה 2 זוגות מכנסיים, ארבע חולצות, שמלה אחת ושני זוגות נעליים.
חליפה היא צירוף של שמלה וזוג נעליים או צירוף של מכנסיים חולצה וזוג נעליים.

כמה חליפות השונות זו מזו לפחות בפריט אחד יכולה שירה ללבוש?

פיתרון: זוהי שאלת צירופים שבה עלינו למצוא את מספר הצירופים השונים לחליפות שיכולה שירה ליצור מן הפריטים שברשותה.

בכדי למצוא את מספר החליפות השונות הכוללות שמלה וזוג נעליים נכפול את מספר האפשרויות השונות לבחירת שמלה (1) במספר זוגות הנעליים השונות (2), ונקבל: $2 \ (= 1 \cdot 2)$.

בכדי למצוא את מספר החליפות השונות הכוללות מכנסיים, חולצה וזוג נעליים נכפול את מספר האפשרויות השונות לבחירת מכנסיים (2) במספר החולצות השונות (4) ובמספר האפשרויות לבחירת זוג נעליים (2), ונקבל: $16 \ (= 2 \cdot 4 \cdot 2)$.

סך הכול מספר החליפות השונות שיכולה שירה ליצור הוא $18 \ (= 2 + 16)$.

תשובה (4).

.21 **השאלה**: אברהם הטיל מטבע הוגן 6 פעמים. כאשר המטבע נפל על "עץ" קיבל 3 שקלים וכאשר נפל על "פלי" קיבל אברהם שקל אחד. מספר השקלים שקיבל אברהם מתחלק ב-5 ללא שארית.

כמה שקלים קיבל אברהם מחברו בסך הכול?

פיתרון: ראשית נחשב את הסכום המינימלי והמקסימלי שיכול היה אברהם לקבל.
הסכום המינימלי שיכול היה אברהם לקבל מחברו הוא 6 שקלים $(= 6 \cdot 1)$ והסכום המקסימלי הוא 18 שקלים $(= 6 \cdot 3)$. תשובות (1) ו-(4) נפסלות.

מכיוון שידוע כי הסכום שקיבל אברהם מתחלק ב-5, הרי שאברהם יכול לקבל 10 או 15 שקלים.
על מנת לקבל 10 שקלים על אברהם לקבל ב-2 הטלות "עץ" וב-4 הטלות "פלי" $(= 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1)$.

על מנת שאברהם יקבל 15 שקלים עליו לקבל ב-4 הטלות "עץ" וב-3 הטלות "פלי" אך מכיוון שעל מנת להשיג זאת עליו להטיל את המטבע 7 פעמים בעוד שידוע כי הטיל את המטבע 6 פעמים בלבד, אין זה אפשרי כי אברהם קיבל 15 שקלים.

תשובה (2).

.22 **השאלה**: נתון x הוא מספר שלם.

$$|x + 8| < 3$$

כמה ערכי x שונים מקיימים את הנתונים?

פיתרון:
מכיוון שמדובר במספרים שלמים והתשובות הם מספרים קטנים עדיף לפתור באמצעות ספירה ידנית של האפשרויות הקיימות.

הערכים השלמים של x המקיימים את הנתון הם: 10-, 9-, 8-, 7- ו-6-.

סך הכול 5 ערכים שונים.

תשובה (1).

.23 **השאלה**: הצורה שבסרטוט נוצרה ממעגל שרדיוסו 1 ס"מ ומ-3 משולשים שווי צלעות שקודקודיהם במרכז המעגל אשר שטח כל אחד מהם הוא $\frac{1}{2}\pi$ סמ"ר.

מה שטח הצורה שנוצרה?

פיתרון: נסרטט את המשכן של צלעות המשולש עד למרכז המעגל.
הצורה שקיבלנו מורכבת מ-3 משולשים ומ-3 גזרות.
סכום שטחי המשולשים הוא $1\frac{1}{2}\pi$ סמ"ר $\left(= 3 \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$.

מכיוון שהמשולשים הם שווי צלעות, הרי שסכום הזוויות המרכזיות שלהם הוא 180° ומכאן שסכום הזוויות המרכזיות היוצרות את שלושת הגזרות אף הוא שווה ל-180°.

זווית או זוויות מרכזיות בנות 180° מהוות מחצית משטח המעגל $\left(=\frac{180^\circ}{360^\circ}\right)$, ומכאן ששטח הגזרות המרכזיות שווה למחצית משטח המעגל, כלומר ל- $\frac{1}{2}\pi$ סמ"ר $\left(=\pi\,1^2\cdot\frac{180^\circ}{360^\circ}\right)$.

שטח הצורה הכולל שווה ל-2π סמ"ר $\left(=\pi\frac{1}{2}+\pi\frac{1}{2}1\right)$.

תשובה (2).

.24 **השאלה**: a, b ו-c הם מספרים שלמים.
סכום שלושת המספרים מתחלק ב-3.
a לא מתחלק ב-3.

איזו מן הטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

פיתרון:
דרך א': הצבת דוגמה

נציב $a=1$; $b=3$ ו- $c=2$.

<u>תשובה (1)</u>: המכפלה $b\cdot c$ מתחלקת ב-3. המכפלה $b\cdot c$ שווה ל-6 $(=3\cdot 2)$ ולכן מתחלקת ב-3.

<u>תשובה (2)</u>: גם b וגם c לא מתחלקים ב-3. מכיוון שעל פי ההצבה שביצענו b מתחלק ב-3, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (3)</u>: הסכום $b+c$ לא מתחלק ב-3. הסכום $b+c$ שווה ל-5, מספר שאינו מתחלק ב-3.

<u>תשובה (4)</u>: ההפרש $b-c$ מתחלק ב-3. ההפרש $b-c$ שווה ל-1 ולכן ניתן לפסול תשובה זו.

נותרנו עם תשובות (1) ו-(3) נציב $a=2$; $b=2$ ו- $c=2$.

<u>תשובה (1)</u>: המכפלה $b\cdot c$ מתחלקת ב-3. המכפלה $b\cdot c$ שווה ל-4 $(=2\cdot 2)$ ולכן אינה מתחלקת ב-3.
ניתן לפסול את תשובה (1) ולסמן את תשובה (3).

דרך ב': אלגברית

סכומם של שלושת המספרים מתחלק ב-3 ללא שארית.
מכיוון שנתון כי a אינו מתחלק ב-3 ללא שארית הרי שבחלוקתו a ב-3 נוצרת שארית כלשהי.
אם כאשר מחברים ל-a את b ו-c אין שארית בחלוקה ב-3, הרי זה אך ורק משום שסכום השאריות של a, b ו-c הוא מספר המתחלק ב-3. כלומר הסכום $b+c$ אינו מתחלק ב-3.

תשובה (3).

.25 השאלה מבקשת מאיתנו למצוא באמצעות על פי נתוני הסרטוט את אורכו של BC כתלות ברדיוס המעגל - r.

ראשית נוריד רדיוסים לנקודות ההשקה D ו-E ונסמן 90°.

קיבלנו כי הקו OD מקביל לאחת מצלעות המשולש, הצלע BC.

מצב זה מחייב כי בשאלה שלפינו נוצרו שני משולשים דומים: משולש AOD ומשולש ABC.

במשולשים דומים נוצרות זוגות של צלעות מתאימות אשר היחס ביניהן זהה. כלומר: $\frac{AD}{AB}=\frac{OD}{BC}$.

על פי נתוני הסרטוט, אורך הצלע OD הוא r. אורך הצלע AD הוא 3 ואורך הצלע AB הוא $(3+r)$.

כלומר: $\frac{3}{r+3}=\frac{r}{BC}$. נכפול את שני האגפים ב-$BC\cdot(r+3)$, ונקבל:

$r\cdot(r+3)=3\cdot BC \Leftarrow \frac{r^2+3r}{3}=BC \Leftarrow \frac{r^2}{3}+r$.

תשובה (4).
