מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)	(2)	(1)	(4)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)	(2)	(3)	(3)	(1)

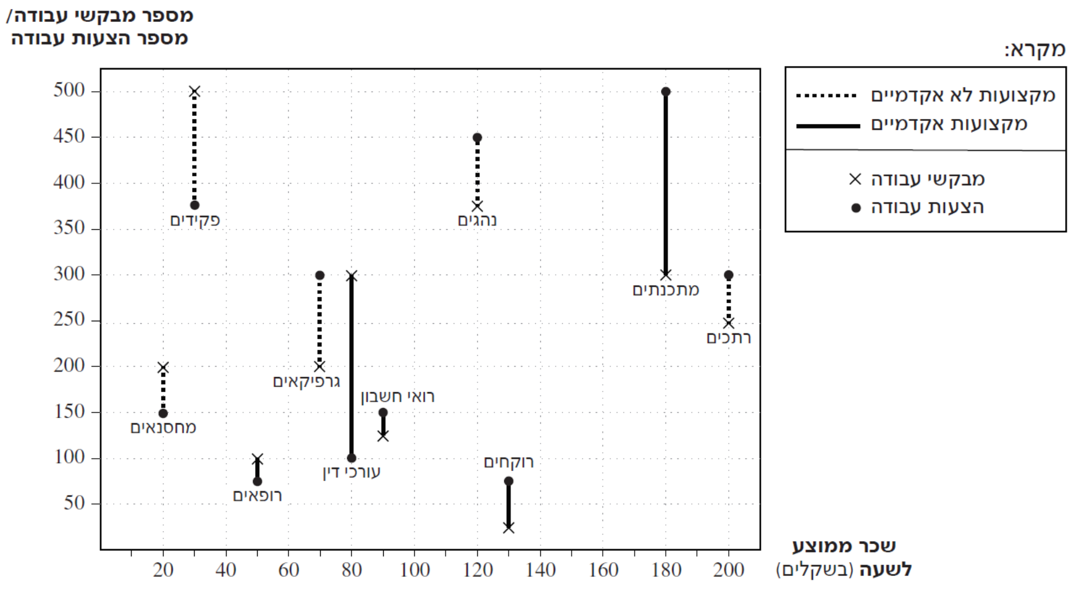
הסברים

הסקה מתרשים (שאלות 4-1)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

בתרשים מוצגים נתונים על מספר הצעות העבודה ועל מספר מבקשי העבודה ב-10 מקצועות שונים, וכן על השכר הממוצע לשעה במקצועות אלו, בחודש מסוים. 10 המקצועות המופיעים בתרשים מחולקים ל-5 מקצועות אקדמיים ו-5 מקצועות לא אקדמיים. עבור כל אחד מהמקצועות מופיעים בתרשים שני סימנים - האחד מציין את מספר הצעות העבודה, והאחר - את מספר מבקשי העבודה (ראו מקרא).

לדוגמה: בחודש המתואר בתרשים היו 200 גרפיקאים המבקשים עבודה ו-300 הצעות עבודה לגרפיקאים.
שכרם הממוצע של הגרפיקאים (שמקצועם אינו אקדמי) היה 70 שקלים לשעה.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.1 **השאלה**: באיזה מהמקצועות הבאים ההפרש (בערך מוחלט) בין מספר הצעות העבודה לבין מספר מבקשי העבודה היה **הקטן** ביותר?

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות, ועבור כל מקצוע נוציא נמצא בתרשים את ההפרש בין מספר הצעות העבודה ומספר מבקשי העבודה:

<u>תשובה (1)</u>: מחסנאים

עבור מחסנאים יש 150 הצעות עבודה ו-200 מבקשי עבודה ומכאן שההפרש ביניהם בערך מוחלט שווה ל-50 $(|150-200|=)$.

תשובה (2): **רואי חשבון**

עבור רואי חשבון יש 150 הצעות עבודה ו-125 מבקשי עבודה ומכאן שההפרש ביניהם בערך מוחלט שווה ל-25 $\left(=\left|150-125\right|\right)$. מכיוון שערך זה קטן מהערך שהתקבל בתשובה (1) ניתן לפסול את תשובה (1).

תשובה (3): רוקחים

עבור רוקחים יש 75 הצעות עבודה ו-25 מבקשי עבודה ומכאן שההפרש ביניהם בערך מוחלט שווה ל-50 $\left(=\left|75-25\right|\right)$. מכיוון שהערך שהתקבל גדול מזה שהתקבל בתשובה (2) ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): רתכים

עבור רתכים יש 300 הצעות עבודה ו-250 מבקשי עבודה ומכאן שההפרש ביניהם בערך מוחלט שווה ל-50 $\left(=\left|300-250\right|\right)$. מכיוון שהערך שהתקבל גדול מזה שהתקבל בתשובה (2) ניתן לפסול את התשובה.

הערך שהתקבל בתשובה (2) הוא הערך הקטן ביותר, ולכן זו התשובה הנכונה.

הערה: הקו בתרשים המחבר בין מספר הצעות העבודה ומספר מבקשי העבודה למעשה מייצג את ההפרש בין שני הערכים בערך מוחלט. מכאן שניתן להתבונן באורך הקו עבור המקצועות הנ"ל ולפיכך לקבוע עבור איזה מקצוע ההפרש הוא הקטן ביותר וכך להימנע מחישובים מיותרים. כפי שניתן לראות, מבין המקצועות שבתשובות, אכן הקו המחבר בין מספר הצעות העבודה ומספר מבקשי העבודה הוא הכי קצר אצל רואי החשבון.

תשובה (2).

---

2. **השאלה**: מה מספר המקצועות שבהם היה מספר מבקשי העבודה גדול ממספר הצעות העבודה?

פתרון: עלינו לסרוק את הסרטוט ולמצוא באלו מהמקצועות, מספר מבקשי העבודה, המסומן בתרשים ב-x, גדול ממספר הצעות העבודה, המסומן בנקודה.
מספר מבקשי העבודה גדול ממספר הצעות העבודה אצל המחסנאים; הפקידים; הרופאים ועורכי הדין.
סך הכול מספר המקצועות שבהם מספר מבקשי העבודה גדול ממספר הצעות העבודה הוא 4.

תשובה (4).

---

3. **השאלה**: מה מספר המקצועות שבהם השכר הממוצע לשעה הוא פי 2 או יותר מהשכר הממוצע לשעה של רופאים?

פתרון: לפי הנתונים שבתרשים, השכר הממוצע לשעה של רופאים הוא 50 שקלים, ומכאן שעלינו למצוא את כל מי ששכרו הממוצע גבוה או שווה ל-100 שקלים, מבין המקצועות שבתרשים הנהגים, הרוקחים, המתכנתים והרתכים מרוויחים מעל 100 שקלים לשעה בממוצע. לכן, ב-4 מקצועות השכר הממוצע לשעה הוא פי 2 או יותר מהשכר הממוצע לשעה של רופאים.

תשובה (4).

---

4. **השאלה**: כמה הצעות עבודה במקצועות לא אקדמיים היו בסך הכול בחודש המתואר בתרשים?

פתרון: מבין המקצועות שבתרשים, הפקידים, המחסנאים, הגרפיקאים, הנהגים והרתכים עובדים בעבודות שאינן אקדמאיות. עבור פקידים היו בסך הכול 375 הצעות עבודה, עבור מחסנאים 150 הצעות עבודה, עבור גרפיקאים 300 הצעות עבודה, עבור נהגים 450 הצעות עבודה, ועבור רתכים 300 הצעות עבודה, סך הכול היו 1,575 הצעות עבודה במקצועות לא אקדמאיים $\left(=375+150+300+450+300\right)$.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 5-20)

5. **השאלה**: רונית מחכה בתור לנדנדה בגן המשחקים. כל ילד מתנדנד בין 5 ל-8 דקות, ומיד כשהוא מסיים הילד הבא בתור מתחיל להתנדנד.
ילד אחד סיים עכשיו להתנדנד, ו-4 ילדים מחכים בתור לפני רונית.

מה הטווח המדויק של מספר הדקות שיחלפו עד שרונית **תסיים** להתנדנד?

פתרון: זו שאלת טווחים, ולכן יש לחשב את הזמן המינימלי והמקסימלי שיחלוף עד שרונית תסיים להתנדנד. הזמן שיחלוף עד שרונית תסיים להתנדנד שווה לזמן שיעבור עד ש-4 הילדים יסיימו להתנדנד + הזמן שיעבור עד שרונית תסיים להתנדנד.
כלומר, בסך הכול הזמן שיחלוף עד שרונית תסיים להתנדנד שווה לזמן שיחלוף עד ש-5 ילדים יסיימו להתנדנד. הזמן הקצר ביותר שיחלוף עד ש-5 ילדים יסיימו להתנדנד הוא כאשר כל ילד יתנדנד במשך 5 דקות, ומכאן שהזמן הקצר ביותר שיחלוף עד שרונית תסיים להתנדנד שווה ל-25 דקות $(5\cdot5=)$. כעת ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(2). הזמן הארוך ביותר שיעבור עד ש-5 ילדים יסיימו להתנדנד יתקבל כאשר כל ילד יתנדנד 8 דקות, ומכאן שהזמן הארוך ביותר שיחלוף עד שרונית תסיים להתנדנד שווה ל-40 דקות $(5\cdot8=)$. הטווח המדויק של מספר הדקות שיחלפו עד שרונית תסיים להתנדנד הוא בין 25 ל-40 דקות.

תשובה (4).

---

6. **השאלה**: $1!\cdot2!\cdot3!\cdot4!=?$

פתרון: $1!\cdot2!\cdot3!\cdot4! \Leftarrow (1)\cdot(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4)$.

מכיוון שהתשובות מופיעות בצורה של כפולות המספרים 2 ו-3, נפשט את הביטוי שקיבלנו באותו אופן:
$(1)\cdot(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4) \Leftarrow 2^3\cdot3^2\cdot4 \Leftarrow 2^3\cdot3^2\cdot2^2 \Leftarrow 2^5\cdot3^2$.

תשובה (2).

---

7. **השאלה**: נתון: $y=-x$

$0<x$

איזה מהביטויים הבאים **שונה** בערכו משאר הביטויים?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית.

נציב $x=1$ ומכאן ש-$y=-1$. נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: x^3. כאשר $x=1$, ערכו של x^3 שווה ל-1 $(x^3=(1)^3=)$.

<u>תשובה (2)</u>: y^3. כאשר $y=-1$, ערכו של הביטוי y^3 שווה ל-(-1) $((-1)^3=)$.

מכיוון שערכן של תשובות (1) ו-(2) שונה, הרי שכבר בשלב זה ניתן לקבוע כי התשובה הנכונה תהיה אחת מהן, וכי על מנת לקבוע מי מהן היא התשובה הנכונה, יש לבדוק את תשובה (3) בלבד.

<u>תשובה (3)</u>: $|x|^3$. כאשר $x=1$, ערכו של הביטוי $|x|^3$ שווה ל-1 $(|1|^3=)$.

מכיוון שמצאנו כי ערכה של תשובה (3) זהה לערכה של תשובה (1), הרי שניתן לקבוע כי התשובה הנכונה היא תשובה (2). על מנת להשלים את ההסבר נבדוק מה ערכה של תשובה (4).

<u>תשובה (4)</u>: $|y|^3$. כאשר $y=-1$, ערכו של הביטוי $|y|^3$ שווה ל-1 $(|-1|^3=)$.

<u>דרך ב'</u>: פתרון אלגברי.

לפי הנתונים x חיובי ו- $y=-x$ ומכאן ש-y בהכרח שלילי.
נעבור על התשובות המוצעות ונחליף בכל אחת מהן את y ב- $(-x)$:

<u>תשובה (1)</u>: x^3

מכיוון ש-x חיובי כאשר נעלה אותו בחזקה הוא יישאר חיובי ומכאן שערך הביטוי x^3 חיובי גם הוא.

<u>תשובה (2)</u>: y^3. נציב במקום y ב- $(-x)$, ונקבל: $(-x)^3 \Leftarrow -x^3$. מכיוון שהעלנו מספר שלילי בחזקה אי-זוגית הוא נותר שלילי. כבר בשלב זה ניתן לראות כי הביטויים בתשובות (1) ו-(2) הפוכים בסימן, ומכאן שאחת מן התשובות היא התשובה הנכונה. כדי לקבוע מי מהביטויים שונה בערכו מהביטויים האחרים יש לבדוק תשובה נוספת.

<u>תשובה (3)</u>: $|x|^3$. כאמור, x הוא מספר חיובי ולכן הערך המוחלט לא ישנה את הסימן שלו, כלומר הביטוי $|x|^3$ שווה לביטוי x^3. מכיוון שערכן של תשובות (1) ו-(3) חיובי, וערך הביטוי בתשובה (2) הוא שלילי, הרי שתשובה (2) היא התשובה הנכונה. לשם השלמת ההסבר נבדוק גם את תשובה (4).

<u>תשובה (4)</u>: $|y|^3$. נציב במקום y ב- $(-x)$, ונקבל: $|-x|^3 \Leftarrow x^3$. גם בתשובה זו קיבלנו ביטוי השווה בערכו לביטויים שבתשובות (1) ו-(3).

תשובה (2).

---

8. **השאלה**: a ו-b הם מספרים שלמים שונים מ-0.
c הוא מספר לא שלם.

איזה מהמספרים הבאים **בהכרח אינו** שלם?

פתרון: נציב $a=b=1$, $c=\frac{1}{2}$. נעבור על התשובות המוצעות, ונפסול כל תשובה אשר ערכה הוא מספר שלם:

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{c}{a\cdot b}$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1} \Leftarrow \frac{\frac{1}{2}}{1} \Leftarrow \frac{1}{2}$. מכיוון שקיבלנו תוצאה שאינה שלמה, הרי שהתשובה אינה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $c\,(a+b)$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $\frac{1}{2}(1+1) \Leftarrow \frac{1}{2}\cdot 2 \Leftarrow 1$. מכיוון שקיבלנו מספר שלם, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{a+b}{c}$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $\frac{1+1}{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} \Leftarrow 2\cdot\frac{2}{1} \Leftarrow 4$. מכיוון שקיבלנו מספר שלם, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $a\cdot b\cdot c$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $1\cdot1\cdot\frac{1}{2}$ ⇦ $\frac{1}{2}$. מכיוון שקיבלנו תוצאה שאינה שלמה, הרי שהתשובה אינה נפסלת.

נציב פעם נוספת ונבדוק שוב רק את שתי התשובות עימן נותרנו. כעת נציב: $a=b=2$, $c=\frac{1}{2}$.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{c}{a\cdot b}$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot2}$ ⇦ $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ ⇦ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ ⇦ $\frac{1}{8}$. מכיוון שהתוצאה שהתקבלה אינה שלמה, הרי שעדיין לא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (4)</u>: $a\cdot b\cdot c$. נציב את הערכים שבחרנו, ונקבל: $2\cdot2\cdot\frac{1}{2}$ ⇦ 2. מכיוון שקיבלנו מספר שלם, הרי שניתן לפסול את התשובה.

פסלנו שלוש תשובות ולכן תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

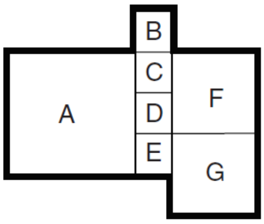
ננתח את התשובות, ונבדוק מי מהן בהכרח אינה שלמה.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{c}{a\cdot b}$. נתון כי c הוא מספר שאינו שלם, וכי a ו-b הם מספרים שלמים, ומכאן שגם מכפלתם היא בהכרח מספר שלם.
תוצאת הביטוי שבתשובה היא חלוקה של מספר שאינו שלם (c) במספר שלם. חלוקה במספר שלם היא למעשה מכפלה בשבר (ההופכי של המספר השלם). מכאן שלמעשה על מנת לחשב את תוצאת התרגיל יש לכפול את c שהוא מספר שאינו שלם בעצמו בשבר. מכאן שתוצאת המכפלה תהיה בהכרח מספר שאינו שלם. ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

9. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם A, B, C, D, E, F ו-G הם ריבועים.
אורך הקו המודגש הוא 44 ס"מ.



מה **שטח** הריבוע B (בסמ"ר)?

פתרון: נסמן את אורך צלע הריבוע B ב-a. אורך הקו המודגש שווה לסכום אורכי חלק מצלעותיהם של הריבועים שבסרטוט, ולכן, כדי למצוא את אורך צלע הריבוע B, נבטא את כל צלעות הריבועים בעזרת a.
כפי שניתן לראות בסרטוט הריבועים B, C, D ו-E זהים ומכאן שאורך צלעותיהם גם שווה ל-a. כמו כן, ניתן לראות שאורך צלעו של הריבוע F שווה לסכום צלע אחת של הריבוע C וצלע אחת של הריבוע D, ומכאן שאורך צלעו של הריבוע F שווה ל-$2a$ $(a+a=)$. בנוסף, ניתן לראות שהריבוע G זהה לריבוע F, ומכאן שאורך צלעו של הריבוע G שווה גם ל- $2a$. כמו כן, ניתן לראות שאורך צלעו של הריבוע A שווה לסכום אורכי צלעות הריבועים C, D ו- E, ומכאן שאורך צלעו של הריבוע A שווה ל- $3a$ $(a+a+a=)$.
כפי שניתן לראות בסרטוט, אורך הקו המודגש שווה לסכום 3 צלעות של הריבוע A, 3 צלעות של הריבוע B, 2 צלעות של הריבוע F, 2 צלעות של הריבוע G, צלע אחת של הריבוע E וחלק מהצלע של הריבוע G. אותו חלק מצלעו של הריבוע G שווה למעשה ל-a וזאת מכיוון שאורך כל הצלע של הריבוע G שווה ל- 2a וחלקה העליון של הצלע שווה לצלעו של הריבוע E השווה ל-a. מכאן שאורך הקו המודגש שווה ל- $3\cdot3a+3a+2\cdot2a+2\cdot2a+a+a$ ⇦ $9a+3a+4a+4a+2a$ ⇦ $22a$. ידוע כי אורך הקו המודגש שווה ל-44 ס"מ ומכאן ש- $22a=44$ ⇦ $a=2$. שטח ריבוע שווה לאורך צלעו בריבוע ומכאן ששטחו של הריבוע B שווה ל- 2^2 ⇦ 4 סמ"ר.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: לענת יש a מדבקות כחולות זהות ו- $(a-1)$ מדבקות אדומות זהות.
היא רוצה להדביק את כל המדבקות בשורה בלי רווחים ובלי שיהיו שתי מדבקות סמוכות זו לזו באותו הצבע.

בכמה דרכים היא יכולה לעשות זאת?

פתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית.

נציב $a=1$, כלומר לענת יש מדבקה אחת כחולה ו-0 מדבקות אדומות $(1-1=)$. מכיוון שלענת יש רק מדבקה אחת יש לה רק דרך אחת להדביק את המדבקות שלה בשורה. נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 1. התשובה מתאימה.

<u>תשובה (2)</u>: 2. התשובה אינה מתאימה.

<u>תשובה (3)</u>: 0. התשובה אינה מתאימה.

<u>תשובה (4)</u>: $a-1$. $1-1=0$. התשובה אינה מתאימה.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות, הרי שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית.

לענת יש כמות מסוימת של מדבקות כחולות וכמות הקטנה ב-1 של מדבקות אדומות. על מנת שענת תוכל להדביק את המדבקות בשורה, מבלי שיהיו שתי מדבקות זהות סמוכות, עליה להדביק את המדבקות לסירוגין: נניח כחול-אדום-כחול וכך הלאה. מבלי להתחשב בכמות המדבקות שיש לענת, היא יכולה לסדר את המדבקות כך שהמדבקה הראשונה תהיה אדומה, ולאחריה מדבקה כחולה, שוב אדומה וכך הלאה, או שהמדבקה הראשונה תהיה כחולה, ולאחריה מדבקה אדומה, שוב כחולה וכך הלאה. עם זאת, מכיוון שמספר המדבקות הכחולות גדול באחד ממספר המדבקות האדומות שלה היא חייבת להדביק קודם כל מדבקה כחולה, אחר כך אדומה, שוב כחולה וכך הלאה. אחרת, אם היא תדביק בפעם הראשונה מדבקה אדומה יישארו לה שתי מדבקות כחולות בקצה השורה הסמוכות זו לזו. מכאן שיש לענת רק דרך אחת לסדר את המדבקות.

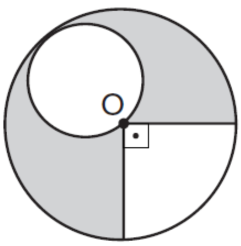
תשובה (1).

---

11. **השאלה**: בתוך מעגל שמרכזו O ורדיוסו $\frac{1}{3}$ ס"מ מסורטט מעגל קטן המשיק למעגל הגדול (ראו סרטוט).

הנקודה O נמצאת על היקף המעגל הקטן.

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?



פתרון: השטח המושחר אינו צורה גיאומטרית מוכרת ולכן כדי לחשב אותו יש לחשב את שטח המעגל הגדול וממנו להחסיר את כל שטח המעגל הקטן ואת שטח הגזרה הלבנה.

לפי הנתונים אורכו של רדיוס המעגל הגדול הוא $\frac{1}{3}$ ס"מ, ומכאן ששטח המעגל הוא $\frac{1}{9}\pi$ $\left(\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\right)$.

לפי הסרטוט הורידו גזרה של $90°$ מהמעגל, מכאן שהיא מהווה רבע משטח המעגל הגדול $\left(\frac{90°}{360°}=\right)$.

כפי שחישבנו, שטח המעגל הגדול שווה ל- $\frac{1}{9}\pi$, מכאן שהשטח שנותר לאחר הורדת הגזרה הוא $\frac{3}{4}$ משטח של המעגל, כלומר: $\frac{1}{12}\pi$ $\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\pi=\right)$.

על מנת למצוא את שטח המעגל הקטן יש למצוא את אורך רדיוס המעגל.
רדיוס המעגל הגדול שווה לקוטר המעגל הקטן, ומכאן שרדיוס המעגל הקטן שווה למחצית רדיוס המעגל הגדול, כלומר ל- $\frac{1}{6}$ ס"מ $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\right)$.

שטח המעגל הקטן הוא $\frac{1}{36}\pi$ $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^2\pi=\right]$.

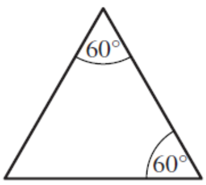
השטח הכהה הוא השטח שנותר מהמעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן, כלומר $\frac{1}{18}\pi$ $\left[\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{36}\pi=\right]$

תשובה (2).

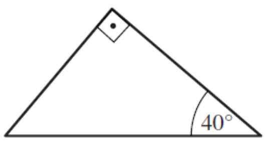
---

12. **השאלה**: איזה מהמשולשים הבאים אפשר לחלק לשני חלקים שכל אחד מהם הוא משולש הדומה למשולש המקורי?

פתרון: משולשים דומים הם משולשים שכל זוויותיהם שוות, מכאן שכדי לקבל שני משולשים הדומים למשולש המקורי יש ליצור משולשים שזוויותיהם שוות לאלה של המשולש המקורי. נעבור על התשובות המוצעות:



<u>תשובה (1)</u>: המשולש שבתשובה הוא משולש שווה צלעות, ולכן כל חלוקה שלו תחלק את זווית המשולשים שייווצרו לזוויות הקטנות מ-$60°$.
מכאן שלא ניתן לחלק את המשולש לשני משולשים הדומים למשולש המקורי. התשובה אינה מתאימה.



<u>תשובה (2)</u>: המשולש שבסרטוט הוא משולש ישר זווית. אם נוריד גובה ליתר המשולש נקבל שני משולשים ישרי זווית. המשולש הימני שיתקבל הוא בעל זווית ישרה, זווית השווה ל-$40°$, המסומנת בסרטוט, וזווית נוספת. במשולש סכום הזוויות שווה ל-$180°$, ומכאן שהזווית השלישית שווה ל-$50°$ $\left(180°-90°-40°=\right)$. המשולש השמאלי שיתקבל הוא גם משולש ישר זווית, ובו זווית המשותפת למשולש המקורי. זווית זו שווה ל-$50°$ לפי סכום הזווית במשולש המקורי $\left(180°-90°-40°=\right)$. מכאן שהזווית השלישית במשולש השמאלי שווה ל-$40°$ $\left(180°-90°-50°=\right)$.
בשני המשולשים שהתקבלו, ובמשולש המקורי, הזוויות שוות ל-$40°$, $50°$ ו-$90°$, ולכן שלושת המשולשים דומים. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

13. **השאלה**: $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}=?$, $a \neq \pm b$, $a,b \neq 0$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית.

נציב: $a=1$, $b=2$ ⇦ $\frac{(1+2)^2+(1-2)^2}{(1+2)^2-(1-2)^2}$ ⇦ $\frac{3^2+1^2}{3^2-1^2}$ ⇦ $\frac{9+1}{9-1}$ ⇦ $\frac{10}{8}$ ⇦ $\frac{5}{4}$.

נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: -1. מכיוון שערך התשובה שונה מערך הביטוי שקיבלנו, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{a^2+b^2}{2ab}$. נציב $a=1$ ו- $b=2$, ונקבל: $\frac{1^2+2^2}{2\cdot1\cdot2}$ ⇦ $\frac{1+4}{4}$ ⇦ $\frac{5}{4}$. התשובה מתאימה.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{a^2+b^2}{4}$. נציב $a=1$ ו- $b=2$, ונקבל: $\frac{1^2+2^2}{4}$ ⇦ $\frac{1+4}{4}$ ⇦ $\frac{5}{4}$. התשובה מתאימה.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$. נציב $a=1$ ו- $b=2$, ונקבל: $\frac{(1+2)^2}{(1-2)^2}$ ⇦ $\frac{3^2}{1^2}$ ⇦ $\frac{9}{1}$ ⇦ 9. מכיוון שקיבלנו ערך שונה מהערך שקיבלנו בהצבת המספרים בביטוי המקורי, הרי שהתשובה נפסלת.

נציב פעם נוספת, למשל: $a=3$, $b=2$: $\frac{(3+2)^2+(3-2)^2}{(3+2)^2-(3-2)^2}$ ⇦ $\frac{5^2+1^2}{5^2-1^2}$ ⇦ $\frac{25+1}{25-1}$ ⇦ $\frac{26}{24}$ ⇦ $\frac{13}{12}$.

כעת נציב אותם מספרים בתשובות שנותרו:

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{a^2+b^2}{2ab}$. נציב $a=3$ ו- $b=2$, ונקבל: $\frac{3^2+2^2}{2\cdot3\cdot2}$ ⇦ $\frac{9+4}{12}$ ⇦ $\frac{13}{12}$. התשובה מתאימה.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{a^2+b^2}{4}$. נציב $a=3$ ו- $b=2$, ונקבל: ⇦ $\frac{3^2+2^2}{4}$ ⇦ $\frac{9+4}{4}$ ⇦ $\frac{13}{4}$. מכיוון שערכה של התשובה אינו שווה לערך הביטוי, ניתן לפסול אותה.

לאחר שפסלנו שלוש תשובות, ניתן לקבוע שתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פתרון אלגברי.

$\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$. נפשט את הביטוי על ידי פתיחת הביטויים שבמונה ובמכנה תוך שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר $\frac{(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)}{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}$ ⇦ $\frac{2a^2+2b^2}{4ab}$ ⇦ $\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}$ ⇦ $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

תשובה (2).

.14 **השאלה**: $1.5\cdot 0.3:9=?$

פתרון: לשם הנוחות נמיר את השברים העשרוניים לשברים רגילים, כלומר שברים שאינם עשרוניים:

$$0.05 \Leftarrow \frac{5}{100} \Leftarrow \frac{1}{20} \Leftarrow \frac{\cancel{3}^{1}}{2}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{10}\cdot\frac{1}{\cancel{9}_{1}} \Leftarrow 1\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}:9 \Leftarrow 1.5\cdot 0.3:9$$.

תשובה (3).

הערה: אפשרות נוספת לפתרון לאחר שמצאנו כי ערכה של התשובה הוא $\frac{1}{20}$, היא להפוך כל אחת מהתשובות העשרוניות המוצעות לשבר פשוט, לצמצם ולראות מי מהן שווה ל- $\frac{1}{20}$.

.15 **השאלה**: חרוט שגובהו 4 ס״מ ורדיוס בסיסו 2 ס״מ חסום בתיבה (בסיסו חסום בבסיס התיבה, וקצהו העליון נוגע בפאה העליונה של התיבה).

מה נפח התיבה (בסמ״ק)?

פתרון: על מנת למצוא את נפח התיבה, יש למצוא את אורך מקצועותיה.
נתון כי החרוט חסום בתיבה. בסיס החרוט הוא מעגל, ומכאן שקוטר בסיס החרוט שווה לאורך ורוחב מקצועות הבסיס של התיבה. אורכו של רדיוס החרוט הוא 2 ס״מ, ומכאן שאורך כל אחד ממקצועות הבסיס של התיבה שווה ל-4 ס״מ $(=2\cdot 2)$.
קצהו העליון של החרוט נוגע הפאה העליונה של התיבה, ומכאן שגובה החרוט שווה לגובה התיבה, כלומר גובה התיבה שווה אף הוא ל-4 ס״מ.
נפח תיבה שווה למכפלת שטח בסיסה בגובה, ומכאן שנפח התיבה שווה ל-64 סמ״ק $(=4\cdot 4\cdot 4)$.

תשובה (4).

.16 **השאלה**: בשנתו הראשונה של תינוק גדל משקלו ב- $\frac{1}{2}$ ק״ג בכל חודש.

7 חודשים לאחר היוולדו שקל אפרים פי 2 מכפי ששקל כשנולד.

מה יהיה משקלו (בק״ג) של אפרים שנה לאחר היוולדו?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות.

נשאלנו מה יהיה משקלו של אפרים בגיל שנה ומכאן שהתשובות מציעות מה גילו של אפרים בגיל שנה, כלומר גיל של 12 חודשים. הנתונים מתייחסים ליחס בין משקלו של אפרים בגיל 7 חודשים לבין משקלו כשנולד (בגיל 0 חודשים).

נתון כי משקלו של בשנתו הראשונה של תינוק גדל משקלו ב- $\frac{1}{2}$ ק״ג בכל חודש.

מגיל 7 חודשים ועד גיל שנה חלפו 5 חודשים $(=12-7)$, ולכן על מנת למצוא בעזרת התשובות את משקלו של אפרים בגיל 7 חודשים, עלינו להפחית $2\frac{1}{2}$ ק״ג $\left(=\frac{1}{2}\cdot 5\right)$.

מרגע שאפרים נולד ועד גיל שנה חלפו 12 חודשים, ולכן על מנת למצוא בעזרת התשובות את משקלו של אפרים כאשר שנולד, עלינו להפחית מכל ערך שבתשובות 6 ק״ג $\left(=12\cdot\frac{1}{2}\right)$.

כעת נעבור על התשובות המוצעות, ונעצור בתשובה שבה נקבל כי משקלו של אפרים 7 חודשים לאחר היוולדו הוא פי 2 מכפי ששקל כשנולד:

<u>תשובה (1)</u>: 8. אם אפרים שקל בגיל שנה 8 ק״ג, אז בגיל 7 חודשים הוא שקל $5\frac{1}{2}$ ק״ג $\left(8-5\frac{1}{2}=\right)$,
וכאשר נולד הוא שקל 2 ק״ג $\left(=6-8\right)$. מכיוון שמשקלו של אפרים בגיל 7 חודשים אינו כפול ממשקלו כאשר נולד, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $9\frac{1}{2}$. אם בגיל שנה אפרים שקל $9\frac{1}{2}$ ק״ג, אז בגיל 7 חודשים הוא שקל 7 ק״ג $\left(9\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=\right)$, וכאשר נולד הוא שקל $3\frac{1}{2}$ ק״ג $\left(9\frac{1}{2}-6=\right)$. מכיוון שמצאנו כי משקלו של אפרים בגיל 7 חודשים הוא 7 ק״ג, וכי משקל זה גדול פי 2 ממשקלו כאשר נולד, שהוא $3\frac{1}{2}$ ק״ג, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב׳</u>: בניית משוואה.

נסמן את משקלו של אפרים בלידתו ב-x. אפרים מוסיף $\frac{1}{2}$ ק״ג למשקלו כל חודש ומכאן שלאחר 7 חודשים הוסיף אפרים למשקלו $3\frac{1}{2}$ ק״ג $\left(7\cdot\frac{1}{2}=\right)$.

משקלו של אפרים בגיל 7 חודשים הוא: $\left(x+3\frac{1}{2}\right)$.

לפי הנתונים, משקלו של אפרים בגיל 7 חודשים כפול ממשקלו כאשר נולד, ומכאן ש: $2\cdot x=x+3\frac{1}{2}$.

נחסר x משני האגפים, ונקבל: $x=3\frac{1}{2}$. מצאנו כי משקלו של אפרים בזמן הלידה הוא $3\frac{1}{2}$ ק״ג.

נתבקשנו למצוא את משקלו של אפרים שנה לאחר היוולדו. מכיוון שמרגע הלידה חלפו 12 חודשים, הרי שלאחר שנה הוסיף אפרים למשקלו 6 ק״ג $\left(12\cdot\frac{1}{2}=\right)$.

מכאן שבגיל שנה משקלו של אפרים הוא $9\frac{1}{2}$ ק״ג $\left(3\frac{1}{2}+6=\right)$.

תשובה (2).

---

17. **השאלה**: במדינה מסוימת 4 מיליון תושבים. 84% מהתושבים דוברים אנגלית.
34% מהתושבים דוברים גם אנגלית וגם צרפתית.

כמה תושבים במדינה דוברים אנגלית ואינם דוברים צרפתית?

פתרון: כדי למצוא את מספר התושבים במדינה שדוברים אנגלית ואינם דוברים צרפתית נמצא את מה גודלה באחוזים של אוכלוסייה זו, ולאחר מכן נחשב את מספרם.
נתון כי 84% מהתושבים במדינה הם דוברי אנגלית.
כמו כן נתון ש- 34% מהתושבים דוברים גם אנגלית וגם צרפתית.
מכאן ש-50% מהתושבים הם דוברי אנגלית ש**אינם** דוברים צרפתית $\left(84\%-34\%=\right)$.
מכיוון ש-50% מהתושבים שייכים לאוכלוסיית דוברי האנגלית שאינם דוברי צרפתית, ומספר תושבי המדינה הוא 4 מיליון תושבים, הרי שדוברי האנגלית שאינם דוברי צרפתית הם 2 מיליון תושבים $\left(\frac{50}{100}\cdot 4=\right)$.

תשובה (2).

---

18. **השאלה**: x הוא מספר שלם וחיובי.

נתון: $2^{2x}-2^{x}=A$

A הוא בהכרח -

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית.

נציב בביטוי מספר נוח, למשל $x=1$, ונקבל כי ערכו של **A** שווה ל-**2** $\left(2^{2\cdot1}-2^{1}=A\right)$.

כעת נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: מספר אי-זוגי. מכיוון שמצאנו כי ערכו של הביטוי הוא 2, שהוא מספר זוגי, הרי שניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: חזקה של 2. מכיוון שמצאנו כי ערך הביטוי הוא 2 אשר שווה ל- 2^{1}, הרי שמצאנו כי יתכן שערכה של התשובה יהיה חזקה של 2, ולכן בשלב זה לא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: מכפלה של שני מספרים עוקבים. 2 שווה ל- $\left(=1\cdot2\right)$, ומכאן שניתן לטעון שהביטוי הוא מכפלה של שני מספרים עוקבים, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (4)</u>: מספר גדול מ-4. 2 אינו מספר הגדול מ-4, ולכן התשובה נפסלת.

נותרנו עם שתי תשובות, ולכן על מנת למצוא את התשובה, עלינו להציב פעם נוספת. נציב למשל ש- $x=2$, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 12 $\left(2^{2\cdot2}-2^{2}=A \leftarrow 16-12=A\right)$.

כעת נעבור על התשובות שנותרו:

<u>תשובה (2)</u>: חזקה של 2. מכיוון ש-12 אינו חזקה של 2, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: מכפלה של שני מספרים עוקבים. 12 שווה למכפלת 3 ו-4 שהם שני מספרים עוקבים, ומכאן שהתשובה אינה נפסלת.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות, תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פתרון אלגברי.

נתון כי $2^{2x}-2^{x}=A$.

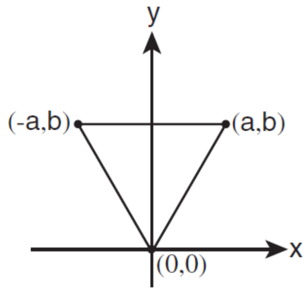
נפשט את הביטוי על ידי הוצאת גורם משותף: $2^{x}\left(2^{x}-1\right)=A$.

כפי שניתן לראות לפי הביטוי שהתקבל, A הוא מכפלה של שני מספרים, אחד מהם הוא 2^{x} והשני הוא $\left(2^{x}-1\right)$. כלומר אחד מהם הוא מספר מסוים, והשני הוא מספר הקטן ממנו ב-1.

מספרים עוקבים מוגדרים כמספרים שההפרש ביניהם הוא 1, ומכאן ש-A הוא מכפלה של שני מספרים עוקבים.

תשובה (3).

19. **השאלה**: במערכת הצירים שלפניכם מסורטט משולש שווה-צלעות.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = ?$$

פתרון: ערכי ה-y של קודקודי המשולש שבסרטוט שווים (שניהם שווים ל-b) ומכאן שבסיס המשולש מקביל לציר ה-x.
מכיוון שבסיס המשולש מקביל לציר ה-x, הרי שבהכרח ציר ה-y מאונך לו. גובה במשולש שווה צלעות הוא גם חוצה זווית וגם תיכון, ומכאן ששני המשולשים שהתקבלו משני צדיו של ציר ה-y חופפים, ושניהם משולשי זהב בהם הזוויות שוות ל-30°, 60° ו-90°.

נתבונן על המשולש הימני שנוצר: ערכי ה-x של הנקודה המסומנת ב-(a, b) מסמנים את מרחקה של הנקודה מציר ה-y, שזהו למעשה אורכו של הניצב העליון של המשולש. מכאן שאורך הניצב העליון של המשולש שווה ל-a. בנוסף, ערכי ה-y של הנקודה מסמנים את מרחקה של הנקודה מציר ה-x, שזהו למעשה אורכו של הניצב המתלכד עם ציר ה-y. מכאן שאורך הניצב השני של המשולש, המתלכד עם ציר ה-y, שווה ל-b.
במשולש זהב היחס בין הניצבים שווה ל- $1:\sqrt{3}$ כאשר 1 מייצג את הניצב הקטן ו- $\sqrt{3}$ מייצג את הניצב הגדול. במשולש זה, הזווית בנקודה (a, b) היא זווית במשולש שווה צלעות ולכן שווה ל-60°, ומכאן שהניצב שמולה, השווה באורכו ל-b, הוא הניצב הגדול במשולש, והניצב השני, אשר מסומן ב-a, הוא הניצב הקטן.
מצאנו כי היחס בין b ל-a הוא $\sqrt{3}$ $\left(\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} =\right)$.

כאשר נעלה את הביטוי בחזקת 2, נקבל כי ערכו הוא 3 $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2\right)$.

תשובה (3).

---

20. **השאלה**: שפן וארנבת התחרו בריצה. שניהם התחילו לרוץ יחד מאותה נקודה בתחתית ההר. הם רצו באותו מסלול לראש ההר וגם ירדו במסלול זה. השפן רץ במהירות קבועה v לאורך כל הדרך. הארנבת עלתה במעלה ההר לאט, במהירות של $\frac{1}{2}v$, ואילו במורד ההר היא רצה מַהֵר, במהירות של 2v.

מי הגיע ראשון לתחתית ההר?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית.

מכיוון שהמדובר בשאלת תנועה, נשתמש בנוסחה התנועה: **זמן · מהירות = דרך**.

אין בשאלה נתונים מספריים לגבי מהירות השפן והארנבת כמו גם לגבי אורך המסלול, ומכאן שניתן להציב מספרים נוחים לעבודה, למשל כי $v = 60$, ושאורך הדרך כולה שווה ל-60 ק"מ.

<u>שפן</u>: לפי המספרים שהצבנו, השפן רץ במהירות של 60 קמ"ש לאורך כל הדרך אשר אורכה שווה ל-60 ק"מ.
מכאן שלקח לשפן בדיוק שעה אחת להשלים את הדרך $\left(= \frac{60}{60}\right)$.

<u>ארנבת</u>: לפי המספרים שהצבנו, הארנבת רצה במעלה ההר במהירות של 30 קמ"ש $\left(= \frac{60}{2}\right)$, לאורך מחצית מהדרך אשר אורכה שווה ל-30 ק"מ $\left(= \frac{60}{2}\right)$. מצאנו כי הזמן שנדרש לארנבת לעלות במעלה ההר הוא שעה אחת $\left(= \frac{30}{30}\right)$. מכיוון שהארנבת צריכה עדיין לרדת מההר, הרי שכבר בשלב זה ניתן לקבוע שהזמן שנדרש לארנבת לעבור את הדרך כולה גדול מהזמן שנדרש לשפן, וניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3).

לפי תשובה (4) לא ניתן לדעת מהנתונים מי הגיע ראשון, ולכן עלינו להציב פעם נוספת ולבדוק האם אכן מתקבלת שוב אותה תשובה גם בהצבה השנייה.

נציב: $v = 50$ ונקבע כי אורך הדרך שווה ל-100 ק״מ. נחשב כמה זמן לקח לשפן להשלים את הדרך:
השפן רץ במהירות של 50 קמ״ש לאורך דרך השווה ל-100 ק״מ ומכאן שנדרשות לו שעתיים להשלים את הדרך $\left(=\frac{100}{50}\right)$.

ארנבת: הארנבת רצה במעלה ההר במהירות של 25 קמ״ש $\left(=\frac{50}{2}\right)$, לאורך מחצית מהדרך אשר אורכה הוא 50 ק״מ, ומכאן שהזמן שנדרש לארנבת לעלות במעלה ההר הוא שעתיים $\left(=\frac{50}{25}\right)$.

ושוב. מכיוון שהארנבת צריכה עדיין לרדת מההר, הרי שכבר בשלב זה ניתן לקבוע שהזמן שנדרש לה לעבור את הדרך כולה גדול מהזמן שנדרש לשפן, ומצאנו כי השפן מגיע ראשון.
מכיוון שבשתי ההצבות מצאנו שהשפן מגיע ראשון, הרי שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פתרון אלגברי.

נשתמש במשוואת התנועה כדי למצוא מה הזמן שנדרש לשפן ולארנבת להשלים את המסלול.
לשם הנוחות נסמן את אורך הדרך ב-x.

<u>שפן</u>: השפן רץ לאורך כל הדרך במהירות קבועה של v, ומכאן שהזמן שנדרש לשפן לעבור את הדרך הוא $\frac{x}{v}$.

<u>ארנבת</u>: הארנבת רצה במעלה ההר במהירות של $\frac{1}{2}v$, לאורך מחצית מהמסלול השווה באורכו ל- $\frac{x}{2}$, ומכאן שהזמן שנדרש לארנבת זמן לעלות במעלה ההר הוא $\frac{x}{v}$ $\left(=\frac{x}{v}\cdot\frac{2}{2}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{v}{2}}\right)$.

כפי שניתן לראות, הזמן שנדרש לארנבת לעלות במעלה ההר שווה לזמן הנדרש מן השפן להשלים את כל הדרך, ומכאן שהשפן בוודאות מגיע לפני הארנבת.

תשובה (1).