

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(4)	(2)	(4)	(2)	(3)	(2)	(3)	(2)	(4)	(3)	תשובה

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	שאלה
(4)	(2)	(1)	(2)	(2)	(1)	(1)	(4)	(3)	(3)	תשובה

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

- 1.** **השאלה:** a ו-b הם שני מספרים שלמים, $0 < b < a$.
 הממוצע של a ו-b שווה להפרש בין a ל-b.
 איזה מזוגות המספרים הבאים יכול להיות a ו-b?
פיתרון: מכיוון שהשאלה מפנה אותנו לתשובות, נבדוק את התשובות המוצעות.
תשובה (1): 2 ; 1.
 הממוצע של זוג המספרים 2 ו-1 הוא 1.5 וההפרש ביניהם הוא $1 (= 2 - 1)$, ולכן ניתן לפסול תשובה זו אשר אינה עונה על תנאי השאלה.
תשובה (2): 5 ; 2.
 הממוצע של זוג המספרים 5 ו-2 הוא 3.5 וההפרש ביניהם הוא $3 (= 5 - 2)$, ולכן ניתן לפסול תשובה זו.
תשובה (3): 9 ; 3.
 הממוצע של זוג המספרים 9 ו-3 הוא 6 וההפרש ביניהם הוא $6 (= 9 - 3)$. זו התשובה הנכונה.
תשובה (3).

- 2.** **השאלה:** לענבר היו n תפוחים (n הוא מספר שלם). היא אכלה 3 תפוחים. לאחר מכן, היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ ממספר התפוחים שנשארו לה (היא נתנה לו מספר שלם של תפוחים).
 לבסוף היא הכינה רסק משני תפוחים שלמים.
 איזה מן המספרים הבאים יכול להיות ערכו של n?
פיתרון: מכיוון שהשאלה מפנה אותנו לתשובות, נבדוק את התשובות המוצעות.
תשובה (1): 5.
 אם לענבר היו בתחילה 5 תפוחים, הרי שלאחר שהיא אכלה 3 תפוחים, נותרו ברשותה 2 תפוחים $(= 5 - 3)$.
 מכיוון שנתון כי היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ מהתפוחים שהיו לה, הרי שהיא נתנה לו תפוח אחד $(= \frac{1}{2} \cdot 2)$.
 לאחר שענבר נתנה לעודד תפוח אחד, נותר בידה תפוח אחד בלבד. מכיוון שלפי נתוני השאלה ענבר הכינה רסק משני תפוחים שלמים, הרי שלא יתכן כי מספר התפוחים ההתחלתי שהיה ברשותה הוא 5.

יולי 2013 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

תשובה (2): 6.

אם לענבר היו בתחילה 6 תפוחים, הרי שלאחר שהיא אכלה 3 תפוחים, נותרו ברשותה 3 תפוחים ($6-3=$).

מכיוון שנתון כי היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ מהתפוחים שהיו לה, הרי שהיא אמורה לתת לעודד תפוח וחצי

$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 =\right)$. מכיוון שלפי נתוני השאלה, ענבר נתנה לעודד מספר שלם של תפוחים, הרי שלא יתכן כי

מספר התפוחים ההתחלתי שהיה ברשותה הוא 6.

תשובה (3): 8.

אם לענבר היו בתחילה 8 תפוחים, הרי שלאחר שהיא אכלה 3 תפוחים, נותרו ברשותה 5 תפוחים ($8-3=$).

מכיוון שנתון כי היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ מהתפוחים שהיו לה, הרי שהיא אמורה לתת לעודד $2\frac{1}{2}$ תפוחים

$\left(\frac{1}{2} \cdot 5 =\right)$. מכיוון שלפי נתוני השאלה, ענבר נתנה לעודד מספר שלם של תפוחים, הרי שלא יתכן כי

מספר התפוחים ההתחלתי שהיה ברשותה הוא 8.

תשובה (4): 9.

אם לענבר היו בתחילה 9 תפוחים, הרי שלאחר שהיא אכלה 3 תפוחים, נותרו ברשותה 6 תפוחים ($9-3=$).

מכיוון שנתון כי היא נתנה לעודד $\frac{1}{2}$ מהתפוחים שהיו לה, הרי שהיא נתנה לעודד 3 תפוחים $\left(\frac{1}{2} \cdot 6 =\right)$.

לאחר שענבר נתנה לעודד 3 תפוחים, נותרו ברשותה 3 תפוחים ($6-3=$). מכיוון שלפי נתוני השאלה ענבר הכינה רסק משני תפוחים שלמים, הרי שיתכן כי מספר התפוחים ההתחלתי שהיה ברשותה הוא 9.

תשובה (1).

הערה: למעשה לאחר בדיקת תשובה (2) ניתן להסיק כי לא יתכן שבידי ענבר היה מספר זוגי של תפוחים. ענבר אוכלת 3 תפוחים מתוך מספר התפוחים הכולל שברשותה, ולאחר מכן עליה לתת לעודד $\frac{1}{2}$ ממספר התפוחים שברשותה.

כאשר נפחית 3 ממספר זוגי של תפוחים נקבל בהכרח מספר אי-זוגי.

$\frac{1}{2}$ ממספר אי-זוגי יתן בהכרח תוצאה שאינה מספר שלם, ולפיכך לא יתכן שמספר התפוחים ההתחלתי

הוא מספר זוגי. מי שהבין זאת בשלב בדיקת תשובה (2) יכול לפסול את תשובה (3) ולסמן את תשובה (4).

3.

השאלה: מחיר ליטר דלק בתחנת דלק מסוימת היה 4 שקלים.

בעל התחנה הוזיל ב-40 אגורות את המחיר לליטר דלק, ולאחר מכן העלה את המחיר החדש ב-10%.

מה מחירו של ליטר דלק כעת (בשקלים)?

פיתרון: המחיר ההתחלתי של ליטר דלק הוא 4 שקלים.

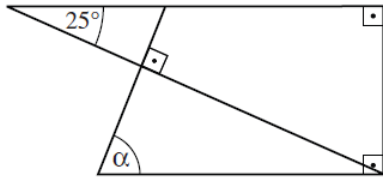
לאחר שבעל התחנה הוזיל ב-40 אגורות את המחיר לליטר דלק, היה המחיר לליטר דלק 3.60 שקלים ($4.00 - 0.40 =$).

10% מ-3.60 שקלים הם 36 אגורות, ומכאן שלאחר שבעל התחנה העלה את מחיר הדלק ב-10% היה מחירו של ליטר דלק 3.96 שקלים ($3.60 + 0.36 =$).

תשובה (2).

יולי 2013 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

4. **השאלה:** לפי הנתונים בסרטוט שלפניכם, $\alpha = ?$



פיתרון: הזווית המבוקשת - α היא זווית פנימית במשולש שאחת מזוויותיו החיצוניות שווה ל- 90° .

הזווית הפנימית הצמודה לזווית החיצונית שווה אף היא ל- 90° , ומכאן שעל מנת למצוא את גודלה של α עלינו למצוא את גודלה של הזווית הפנימית הנוספת במשולש.

זווית פנימית זו היא זווית z לזווית בת ה- 25° ומכאן שאף היא שווה ל- 25° . נתבונן שוב במשולש בו נמצאת הזווית α :

מצאנו כי אחת הזוויות הפנימיות שווה ל- 90° , הזווית הפנימית השנייה שווה ל- 25° , ומכאן ש- α שווה ל- $65^\circ (= 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ)$.

תשובה (3).

5. **השאלה:** עבור כל x הוגדרה הפעולה \$ כך: $\$(x) = x(x-1)$

$$\$(\$(2)) = ?$$

פיתרון: לפי סדר פעולות חשבון יש להתחיל בסוגריים הפנימיים. לפי הגדרת פעולת ה-\$: $\$(2) = 2 \cdot (2-1) = 2 \cdot 1 = 2$.

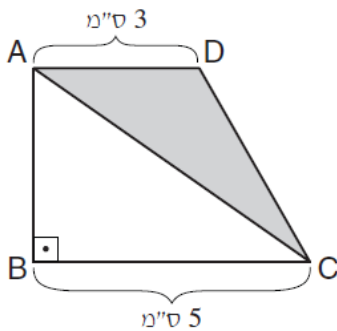
אם נבצע שוב את פעולת ה-\$ על התוצאה שקיבלנו: 2, נקבל שוב כמובן את אותה תוצאה. ומכאן שתוצאת הביטוי היא 2.

תשובה (2).

6. **השאלה:** ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AD \parallel BC$).

גודל השטח הכהה הוא 6 סמ"ר.

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, מה שטח הטרפז (בסמ"ר)?



פיתרון: דרך א': חישוב השטח באמצעות מציאת גובה הטרפז

נתון כי שטח המשולש הכהה הוא 6 סמ"ר. מכיוון שגובה המשולש שווה לגובה הטרפז, הרי שבאמצעות מציאת גובה המשולש נוכל לחשב את שטח הטרפז.

$$\text{שטח משולש שווה ל-} \frac{\text{גובה לצלע} \cdot \text{צלע}}{2}$$

$$\frac{3 \cdot h}{2} = 6 \quad \text{ומכאן ש: } h = 4$$

נכפול ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $3h = 12 \Leftrightarrow h = 4$.

$$\text{שטח טרפז שווה ל-} \frac{\text{גובה} \cdot (\text{סכום הבסיסים})}{2}, \text{ ומכאן ששטח הטרפז ABCD הוא } 16 \text{ סמ"ר} \left(\frac{(3+5) \cdot 4}{2} = \right)$$

יולי 2013 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

דרך ב': יחסי שטחים.

מכיוון שלשני המשולשים גובה זהה, הרי שיחס שטחי המשולשים שווה ליחס שטחי אורכי הבסיסים

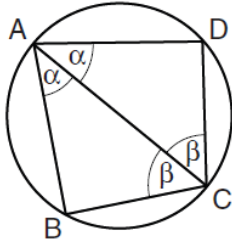
$$\text{שלהם. כלומר, אם נסמן ב-} x \text{ את שטח המשולש הלבן, הרי ש: } \frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\text{נכפול ב-} 5x \text{ את שני האגפים, ונקבל: } 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$$

נתון כי שטח המשולש הכהה הוא 6 סמ"ר, ומצאנו כי שטח המשולש הלבן הוא 10 סמ"ר, ומכאן ששטח הטרפז הוא 16 סמ"ר ($10 + 6 =$).

תשובה (3).

7. השאלה: המרובע ABCD חסום במעגל ששטחו π סמ"ר.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, מה אורכו של AC (בס"מ)?

פיתרון: סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל- 180° ,

$$\text{ומכאן ש: } \alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

מכיוון שמצאנו כי $\alpha + \beta = 90^\circ$, הרי שבמשולש ABC, זווית

ABC שווה ל- 90° .

זווית היקפית השווה ל- 90° נשענת על קוטר המעגל, ומכאן ש-AC הוא קוטר המעגל שבסרטוט.

$$\text{שטח המעגל הוא } \pi \text{ סמ"ר, כלומר } \pi r^2 = \pi$$

נחלק את שני האגפים ב- π , ונקבל: $r^2 = 1$, ומכאן שאורכו של רדיוס המעגל הוא 1 ס"מ.

מכיוון שמצאנו כי AC הוא קוטר המעגל, הרי שאורכו של AC שווה לשני רדיוסים, כלומר ל-2 ס"מ.

תשובה (2).

8. השאלה: איזה מן המספרים הבאים הוא הגדול ביותר?

$$\text{פיתרון: נתבקשנו למצוא איזה מבין השברים הבאים הוא הגדול ביותר: } \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}$$

על מנת לקבוע מי מהשברים הוא הגדול ביותר ניתן להשוות מונים או מכנים, אולם במקרה שלפנינו מכיוון שניתן להבחין כי יש מאפיין זהה לכל השברים והוא שמרחקם מ-1 שווה ל-1 חלקי המכנה, ניתן לפתור את השאלה, על ידי מציאת השבר שמרחקו מ-1 הוא הקטן ביותר.

$$\text{מרחקו של } \frac{5}{6} \text{ מ-1 הוא } \frac{1}{6} \left(1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\right)$$

$$\text{מרחקו של } \frac{6}{7} \text{ מ-1 הוא } \frac{1}{7} \left(1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{מרחקו של } \frac{7}{8} \text{ מ-1 הוא } \frac{1}{8} \left(1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}\right)$$

$$\text{מרחקו של } \frac{8}{9} \text{ מ-1 הוא } \frac{1}{9} \left(1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}\right)$$

לכל ארבעת השברים $\frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}$, מונה זהה. השבר הקטן ביותר הוא השבר בעל המכנה הגדול

ביותר, כלומר $\frac{1}{9}$.

מכיוון שהשבר $\frac{1}{9}$ הוא הקטן ביותר, הרי שמרחקו של השבר $\frac{8}{9}$ מ-1 הוא הקטן ביותר, כלומר הוא

השבר הגדול ביותר.

תשובה (4).

9.

השאלה: אורית ובני רצו 2 ק"מ כל אחד. הריצה של בני ארכה 15 דקות. אורית החלה לרוץ 5 דקות אחרי בני וסיימה את ריצתה 2 דקות אחרי בני.

בכמה דקות בממוצע רצה אורית ק"מ אחד?

פיתרון: נתון כי אורית ובני רצו 2 ק"מ כל אחד. על מנת למצוא כמה דקות בממוצע רצה אורית ק"מ אחד, עלינו למצוא ראשית בכמה דקות עברה את המרחק כולו, כלומר בכמה דקות עברה 2 ק"מ. נתון כי הריצה של בני ארכה 15 דקות. אורית החלה לרוץ 5 דקות אחרי בני וסיימה את הריצה 2 דקות אחרי בני.

נניח כי בני התחיל את הריצה בשעה 8:00 בבוקר. מכיוון שנתון כי אורית החלה לרוץ 5 דקות אחרי, הרי שאורית החלה לרוץ ב-8:05.

נתון כי הריצה של בני ארכה 15 דקות. כלומר אם בני התחיל לרוץ בשעה 8:00 הרי שהוא סיים את הריצה ב-8:15. מכיוון שנתון כי אורית סיימה את הריצה 2 דקות אחרי בני, הרי שאורית סיימה את הריצה ב-8:17.

אם אורית החלה לרוץ ב-8:05 וסיימה ב-8:17, הרי שאורית עברה את המרחק כולו, כלומר 2 ק"מ,

$$\text{ב-12 דקות. מכאן שבממוצע אורית רצה ק"מ אחד ב-6 דקות.} \left(\frac{12}{2} = 6 \right)$$

תשובה (2).

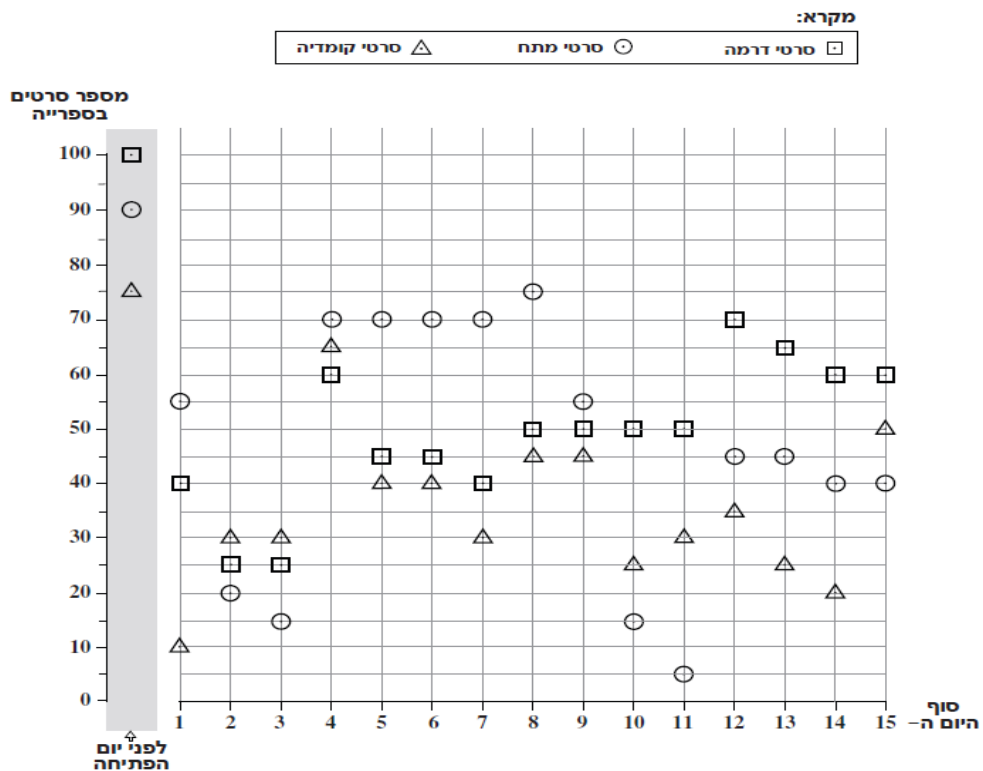
הסקה מתרשים (שאלות 10-14)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, ולנו על חמש השאלות שאחריי.

נפתחה ספרייה להשאלת סרטים, ובה סרטים משלושה סוגים: 100 סרטי דרמה, 90 סרטי מתח ו-75 סרטי קומדיה. התרשים מתאר את מספר הסרטים מכל סוג שנותרו בספרייה בסוף כל אחד מ-15 הימים הראשונים לפעילותה (ראו מקרא).

בנוסף, בתרשים מצויינים מספר הסרטים מכל סוג שהיו בספרייה לפני יום הפתיחה (במלבן האפור).

לדוגמה: בסוף היום ה-4 נותרו בספרייה 60 סרטי דרמה, 70 סרטי מתח ו-65 סרטי קומדיה.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

10. השאלה: בכמה מן הימים המתוארים בתרשים, מספר סרטי הדרמה שנותרו בספרייה בסוף היום היה זהה למספר סרטי הדרמה שהיו בהשאלה?

פיתרון: מלכתחילה היו בספרייה 100 סרטי דרמה. מכיוון שנתבקשנו למצוא בכמה מן הימים מספר סרטי הדרמה שנותרו בספרייה בסוף היום היה זהה למספר סרטי הדרמה שהיו בהשאלה, הרי שעלינו למצוא בכמה ימים היה מספר הסרטים שנותרו בספרייה שווה ל-50. הימים שבהם מספר סרטי הדרמה שנותרו בספרייה היה שווה ל-50 הם הימים 8, 9, 10 ו-11.

תשובה (4).

11. השאלה: שלמה הוא הלקוח הראשון בספרייה בכל בוקר. כשהוא נכנס לספרייה הוא בודק מה סוג הסרטים שבו מספר הסרטים הרב ביותר, ואז שואל סרט אחד מסוג זה.

בכמה מן הימים המתוארים בתרשים שאל שלמה סרט מתח?

פיתרון: מכיוון ששלמה שואל סרט אחד מסוג הסרטים שבו מספר הסרטים הרב ביותר, הרי שעל מנת למצוא בכמה הימים שאל שלמה סרט מתח, עלינו לבדוק בכמה מן הימים היה מספר סרטי המתח שנותרו בספרייה הגדול ביותר. מספר סרטי המתח בספרייה הוא הגדול ביותר בימים הבאים: 1, 4, 5, 6, 7, 8 ו-9. כלומר בסך הכול מספר סרטי המתח היה הגדול ביותר ב-7 מהימים שמתוארים בתרשים.

תשובה (3).

12. השאלה: בסוף היום ה-12, מה היה היחס בין מספר סרטי הדרמה שהיו בהשאלה ובין מספר סרטי הקומדיה שהיו בהשאלה?

פיתרון: על מנת למצוא את היחס בין מספר סרטי הדרמה שהיו בהשאלה ובין מספר סרטי הקומדיה שהיו בהשאלה יש למצוא מה מספר הסרטים מכל סוג שהיו מלכתחילה וכמה היו בספרייה בסוף היום ה-12. סך הכול היו בתחילה 100 סרטי דרמה. בסוף היום ה-12 היו בספרייה 70 סרטי דרמה, כלומר 30 סרטי דרמה נלקחו בהשאלה ($100 - 70 =$). סך הכול היו בתחילה 75 סרטי קומדיה. בסוף היום ה-12 היו בספרייה 35 סרטי קומדיה, כלומר 40 סרטי קומדיה נלקחו בהשאלה ($75 - 35 =$). היחס בין מספר סרטי הדרמה שהיו בהשאלה ובין מספר סרטי הקומדיה שהיו בהשאלה בסוף היום ה-12 הוא 30:40, נחלק את שני האגפים ב-10, ונקבל 3:4.

תשובה (3).

13. **השאלה:** כמה סרטים, לכל הפחות, הוחזרו לספרייה ביום ה-7?

פיתרון: על מנת למצוא מה מספר הסרטים המינימלי שהוחזרו לספרייה ביום ה-7, יש למצוא את ההפרש בין מספר הסרטים שהיו בספרייה בסוף היום ה-6 ומספר הסרטים שהיו בספרייה בסוף היום ה-7 מכל סוג של סרטים. כאשר מספר הסרטים בסוף היום ה-6 שווה או גדול ממספר הסרטים בסוף היום ה-7, יתכן כי נלקחו סרטים מסוימים והוחזרו סרטים אחרים, אולם יתכן כי אף סרט לא הוחזר. בסוף היום ה-6 היו בספרייה 70 סרטי מתח, ובסוף היום ה-7 היו בספרייה 70 סרטי מתח. מכאן שיתכן כי אף סרט מתח לא הוחזר בין 2 הימים. בסוף היום ה-6 היו בספרייה 45 סרטי דרמה, ובסוף היום ה-7 היו בספרייה 40 סרטי דרמה. מכאן שיתכן כי אף סרט דרמה לא הוחזר בין 2 הימים (ונלקחו 5 סרטי דרמה נוספים). בסוף היום ה-6 היו בספרייה 40 סרטי קומדיה, ובסוף היום ה-7 היו בספרייה 30 סרטי קומדיה. מכאן שיתכן כי אף סרט קומדיה לא הוחזר בין 2 הימים (ונלקחו 10 סרטי קומדיה נוספים). מכיוון שמצאנו כי יתכן ואף סרט לא הוחזר בין הימים ה-6 וה-7, הרי שלכל הפחות הוחזרו לספרייה 0 סרטים.

תשובה (4).

14. **השאלה:** כל לקוח רשאי לשאול מהספרייה לכל היותר שלושה סרטים ביום.

מה, לכל הפחות, מספר הלקוחות ששאלו סרטים ביום ה-1?

פיתרון: על מנת למצוא את מספר הלקוחות המינימלי ששאלו סרטים ביום ה-1, נחשב ראשית את מספר הסרטים שנלקחו ביום הראשון ואז נניח כי כל לקוח לקח את מספר הסרטים המקסימלי, כלומר 3 סרטים. בסוף היום ה-1 היו בספרייה 55 סרטי מתח. מכיוון שמלכתחילה היו בספרייה 90 סרטי מתח, הרי שביום ה-1 שאלו 35 סרטי מתח ($90 - 55 =$). בסוף היום ה-1 היו בספרייה 40 סרטי דרמה. מכיוון שמלכתחילה היו בספרייה 100 סרטי דרמה, הרי שביום ה-1 שאלו 60 סרטי דרמה ($100 - 40 =$). בסוף היום ה-1 היו בספרייה 10 סרטי קומדיה. מכיוון שמלכתחילה היו בספרייה 75 סרטי קומדיה, הרי שביום ה-1 שאלו 65 סרטי קומדיה ($75 - 10 =$). סך הכול ביום ה-1 שאלו 160 סרטים ($35 + 60 + 65 =$). כעת ניתן לבדוק את התשובות המוצעות או לפתור את השאלה באלגברה. בדיקת תשובות: מכיוון שנתון כי כל לקוח שאל לכל היותר 3 סרטים, הרי שלא יתכן כי מספר הלקוחות יהיה 40, שכן 40 לקוחות יכולים לשאול לכל היותר 120 סרטים ($40 \cdot 3 =$), 50 לקוחות יכולים לשאול לכל היותר 150 סרטים ($50 \cdot 3 =$), 52 לקוחות - 156 סרטים ($52 \cdot 3 =$), ורק 54 לקוחות יכולים לשאול 160 סרטים.

אלגברה: נתון כי כל לקוח שאל לכל היותר 3 סרטים. מכיוון ש- $\frac{160}{3}$ שווה ל- $53\frac{1}{3}$, הרי שמספר

הלקוחות המינימלי חייב להיות גדול מ-53.

תשובה (1).

15. **השאלה:** k ו- m הם מספרים שלמים.

$$\text{נתון: } 2m + 1 = k \cdot (2k + 1)$$

K בהכרח -

פיתרון: **דרך א'**: אלגברה

m הוא מספר שלם, ומכאן ש- $2m$ הוא בהכרח ביטוי זוגי ו- $2m+1$ הוא בהכרח ביטוי אי-זוגי. באגף ימין של המשוואה כופלים את k בביטוי כלשהו. אם k יהיה מספר זוגי, הרי שהביטוי באגף ימין יהיה בהכרח זוגי. במצב כזה לא יתכן כי אגף ימין של המשוואה אשר הוא ביטוי זוגי יהיה שווה לאגף שמאל שלה שהוא ביטוי אי-זוגי, ומכאן שבהכרח k הוא מספר אי-זוגי.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

$$\text{נציב לדוגמה } k=1, \text{ ונקבל: } 2m+1=1 \cdot (2 \cdot 1+1) \Leftrightarrow 2m+1=3 \Leftrightarrow 2m=2 \Leftrightarrow m=1$$

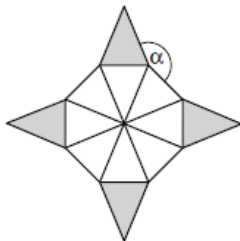
מכיוון שקיבלנו כי m הוא מספר שלם, הרי שהמשוואה מתקיימת עבור k השווה ל-1, ומכאן שניתן לפסול את תשובות (2) ו-(3), שכן לא ניתן לטעון כי k הוא בהכרח מספר זוגי או ש- k מתחלק ב-3 ללא שארית.

כעת נבדוק האם המשוואה מתקיימת עבור k אשר מתחלק ב-3, כלומר נציב $k=3$, ונקבל:

$$2m+1=3 \cdot (2 \cdot 3+1) \Leftrightarrow 2m+1=3 \cdot 7 \Leftrightarrow 2m+1=21 \Leftrightarrow 2m=20 \Leftrightarrow m=10$$

מכיוון שקיבלנו כי m הוא מספר שלם, הרי שהמשוואה מתקיימת עבור k השווה ל-3, ומכאן שניתן לפסול את תשובה (4), שכן לא ניתן לטעון כי k בהכרח אינו מתחלק ב-3 ללא שארית אם $k=3$ מקיים את המשוואה.

תשובה (1).



16. **השאלה:** על ארבע מצלעותיו של מתומן משוכלל סרטוט משולשים

שווי-שוקיים (המשולשים הכהים), החופפים למשולשים שנוצרו מחיתוך אלכסונים של המתומן (ראו סרטוט).

מה גודלה של הזווית α ?

פיתרון: נתון כי כל המשולשים בסרטוט זהים, ומכאן שעל מנת למצוא את

גודלה של α , עלינו למצוא את גודלן של זווית הבסיס במשולשים שווי

השוקיים. אם נתבונן בסרטוט נמצא כי זווית $\alpha + 3$ זוויות זהות, אשר כל

אחת מהן מהווה זווית בסיס במשולש שווה שוקיים, שוות יחדיו ל- 360° .

המתומן חולק ל-8 משולשים זהים, ומכאן שזווית הראש בכל אחד מהמשולשים שנוצרו שווה ל- 45°

$$\left(\frac{360^\circ}{8} = \right)$$

סכום שתי זוויות הבסיס בכל אחד מהמשולשים שווה ל- $135^\circ (= 180^\circ - 45^\circ)$, ומכאן שכל אחת

$$\text{מזוויות הבסיס שווה ל-} 67.5^\circ \left(\frac{135^\circ}{2} = \right)$$

כאמור, זווית $\alpha + 3$ זוויות זהות, אשר כל אחת מהן מהווה זווית בסיס במשולש שווה שוקיים, שוות

$$\text{יחדיו ל-} 360^\circ, \text{ ומכאן: } \alpha + 3 \cdot 67.5^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha + 202.5^\circ = 360^\circ$$

נחסר 202.5° משני האגפים, ונקבל כי $\alpha = 157.5^\circ$.

תשובה (2).

17. **השאלה:** במשחק "קלי קלות" משתתפים שלושה שחקנים. כל סיבוב של המשחק נמשך בדיוק 6 דקות, ובסוף כל סיבוב רק אחד מן המשחקנים מנצח. יואל, מיכה ונחום החליטו לשחק במשחק "קלי קלות" עד שאחד מהם יצבור 3 ניצחונות.

כמה דקות לכל היותר הם ישחקו במשחק?

פיתרון: השאלה מבקשת מאיתנו למצוא כמה דקות לכל היותר הם ישחקו במשחק, כלומר נתבקשנו למצוא מה משך הזמן המקסימלי שיחלוף עד שאחד משלושת השחקנים יצבור שלושה ניצחונות. משך הזמן המינימלי עד לסיום המשחק הוא מצב שבו אחד מהשחקנים זוכה ברציפות בשלושה ניצחונות, ואילו על מנת להגיע למשך הזמן המקסימלי עד שאחד השחקנים יצבור שלושה ניצחונות, יש להביא למצב בו כל אחד משלושת השחקנים יזכה בשני ניצחונות ורק אז אחד מהשחקנים יצבור את הניצחון השלישי.

על מנת שכל אחד משלושת השחקנים יזכה בשני ניצחונות, אנו זקוקים לשישה סיבובים של המשחק ($3 \cdot 2 = 6$). כל סיבוב נמשך 6 דקות, ולפיכך הזמן הדרוש לעריכת 6 סיבובים הוא 36 דקות ($6 \cdot 6 = 36$).

במצב זה יזכה בהכרח בסיבוב השביעי אחד השחקנים בניצחון השלישי שלו, כלומר לאחר שחלפו 42 דקות ($36 + 6 = 42$).

תשובה (2).

18. **השאלה:** נתונים n מספרים עוקבים ובהם יותר מספרים זוגיים ממספרים אי-זוגיים.

מה ההסתברות לבחור באקראי מספר זוגי מתוך המספרים הנתונים?

פיתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נתון כי מספר המספרים הזוגיים גדול ממספר המספרים האי-זוגיים. על מנת שמצב זה יתקיים מספר המספרים העוקבים צריך להיות אי-זוגי, שכן במצב בו מספר המספרים העוקבים זוגי, מספר הזוגיים שווה למספר המספרים האי-זוגי.

נציב לדוגמה כי מספר המספרים הזוגיים הוא 2 ומספר המספרים האי-זוגיים הוא 1, כלומר מספר המספרים העוקבים (n) הוא 3.

במצב המתואר, הסיכוי לבחור באקראי מספר זוגי מבין כלל המספרים הנתונים הוא $\frac{2}{3}$.

נציב $n = 3$ בכל אחת מהתשובות המוצעות, ונקבל:

תשובה (1): $\frac{n+1}{2n}$. כאשר נציב $n = 3$, ונקבל $\left(\frac{3+1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}\right)$.

תשובה (2): $\frac{1}{2}$. ומכאן שתשובה זו נפסלת.

תשובה (3): $1 - \frac{2}{n}$. כאשר נציב $n = 3$, נקבל $\left(1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right)$, ומכאן שתשובה זו נפסלת.

תשובה (4): $\frac{n-1}{n}$. כאשר נציב $n = 3$, נקבל $\left(\frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}\right)$.

מכיוון שנתרנו עם שתי תשובות: תשובות (1) ו-(4), עלינו להציב שוב.

נציב לדוגמה כי מספר המספרים הזוגיים הוא 3 ומספר המספרים האי-זוגיים הוא 2, כלומר מספר המספרים העוקבים (n) הוא 5.

במצב המתואר, הסיכוי לבחור באקראי מספר זוגי מבין כלל המספרים הנתונים הוא $\frac{3}{5}$.

נציב $n = 5$ בשתי התשובות שנתרו, ונקבל:

תשובה (1): $\frac{n+1}{2n}$. כאשר נציב $n = 5$, ונקבל $\left(\frac{5+1}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\right)$.

תשובה (4): $\frac{n-1}{n}$. כאשר נציב $n = 5$, נקבל $\left(\frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}\right)$.

מכיוון שבהצבה זו פסלנו את תשובה (4), הרי שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

דרך ב': אלגברה

נתון כי מספר המספרים הזוגיים גדול ממספר המספרים האי-זוגיים. על מנת שמצב זה יתקיים מספר המספרים העוקבים צריך להיות אי-זוגי, שכן במצב בו מספר המספרים העוקבים זוגי, מספר הזוגיים שווה למספר המספרים האי-זוגי.

נתון כי מספר המספרים העוקבים הוא n , ולכן אם נסמן את מספר המספרים האי-זוגיים ב- x , הרי שמספר המספרים הזוגיים יהיה $x+1$, ומספר המספרים העוקבים הכולל הוא: $2x+1 = (x+x+1)$.

נתון כי מספר המספרים העוקבים הוא n , ולכן ניתן ליצור את המשוואה: $n = 2x+1$.

הסיכוי לבחור באקראי מספר זוגי מבין כלל המספרים הנתונים הוא $\frac{x+1}{2x+1}$.

מכיוון שלמעשה $n = 2x+1$, הרי שניתן להציב במקום הביטוי שבמכנה את n , ולקבל כי הסיכוי לבחור

מספר זוגי הוא $\frac{x+1}{n}$. נחלץ מתוך המשוואה הנתונה את x על מנת להציבו בביטוי.

אם $n = 2x+1$, הרי שאם נחסר 1 משני האגפים, ונקבל: $2x = n-1$, נחלק ב-2 את שני האגפים,

ונקבל: $x = \frac{n-1}{2}$.

$$\left(\frac{x+1}{n} = \frac{\frac{n-1}{2}+1}{n} = \frac{\frac{n-1+2}{2}}{n} = \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{n+1}{2n} \right) \text{ נציב את } x \text{ בביטוי, ונקבל: } \frac{n+1}{2n}$$

תשובה (1).

19. השאלה: נתון: $2a < x < a$

איזה מן הביטויים הבאים הוא הגדול ביותר?

פיתרון: כאשר נתון אי-שוויון משולש, אנו פותרים אותו על ידי פירוקו לשני אי-שוויונים ופתרונם. אולם כאשר פירוק אי-שוויון אינו מסייע בפתרון השאלה, עלינו להסתכל על אי-שוויון הנוסף – אי השוויון של הקצוות.

לפי אי-שוויון הנתון: $2a < x < a$, ומכאן שאי-שוויון של הקצוות הוא: $2a < a$.

נחסר a משני האגפים, ונקבל: $a < 0$.

אם a שלילי, הרי שבהכרח x אשר על פי אי-שוויון קטן מ- a שלילי אף הוא.

בשלב זה ניתן לבחור לפתור את השאלה על ידי הצבת מספרים או על ידי הבנה אלגברית.

דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב לדוגמה כי $a = -2$ ו- $x = -3$, ונקבל:

תשובה (1): a^2 . אם $a = -2$, הביטוי שווה ל- $4 = (-2)^2$

תשובה (2): x^2 . אם $x = -3$, הרי שהביטוי שווה ל- $9 = (-3)^2$

תשובה (3): $(x-a)^3$. אם $a = -2$ ו- $x = -3$, הרי שהביטוי שווה ל- $(-1)^3 = (-3 - (-2))^3 = (-1)^3$

תשובה (4): a^3 . אם $a = -2$, הרי שהביטוי שווה ל- $-8 = (-2)^3$.

מצאנו כי הביטוי הגדול ביותר הוא הביטוי שבתשובה (2).

דרך ב': אלגברה

הביטויים שבתשובות (1) ו-(2) הם מספרים שליליים אשר הועלו בחזקת 2, ומכאן שהם בהכרח חיוביים.

מכיוון שעל פי הנתון $x < a$, הרי שהבסיס בביטוי שבתשובה (3) הוא שלילי (קטן פחות גדול תמיד

שלילי), ומכאן שכאשר נעלה אותו בחזקת 3 נקבל בהכרח מספר שלילי.

בסיס הביטוי שבתשובה (4) הוא מספר שלילי, ומכאן שכאשר נעלה אותו בחזקת 3 נקבל בהכרח מספר

שלילי.

יולי 2013 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

מכיוון שנתבקשנו למצוא את הביטוי הגדול ביותר ניתן בשלב זה לפסול את הביטויים השליליים, כלומר את תשובות (3) ו-(4).
 בתשובות (1) ו-(2) יש מספרים שליליים אשר הועלו בחזקת 2. מכיוון ש- $x < a$, הרי שערכו המוחלט, כלומר מרחקו מ-0 גדול יותר, ומכאן שכאשר נעלה אותו בחזקת 2, נקבל ביטוי חיובי גדול ביותר מן הביטוי שנקבל בתשובה (1).

תשובה (2).

20.

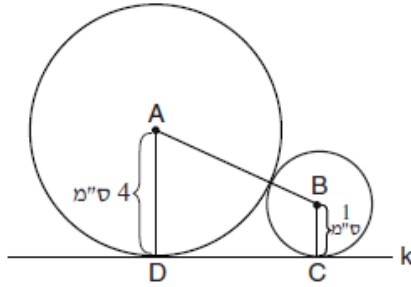
השאלה: בסרטוט שלפניכם שני מעגלים המשיקים זה לזה,

ומשיקים לישר k בנקודות C ו-D.

מרכזי המעגלים הם A ו-B.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

מה היקף המרובע ABCD (בס"מ)?



פיתרון: שתיים מצלעות המרובע ABCD נתונות. הצלע AD אשר

אורכה 4 ס"מ, והצלע BC אשר אורכה 1 ס"מ.

על מנת למצוא את היקף המרובע ABCD עלינו למצוא את אורך

הצלעות AB ו-DC.

הצלע AB היא ישר המחבר את מרכזי שני המעגלים שבסרטוט ולכן שווה לסכום אורכי הרדיוסים של שני המעגלים, כלומר ל-5 ס"מ ($4 + 1 = 5$).

על מנת למצוא את אורכה של הצלע DC נוריד אנך מנקודה B לצלע AD. נסמן את נקודת המפגש של האנך עם הצלע AD ב-E.

קיבלנו מלבן EDCB, אשר אורך צלעותיו הקצרות, BC ו-DE, הוא 1 ס"מ וברצוננו למצוא את אורך הצלעות הארוכות שלו BE ו-DC.

הצלע BE היא ניצב במשולש ישר הזווית AEB.

אורך היתר במשולש AEB, הצלע AB הוא 5 ס"מ ואורך הניצב AE שווה ל- $AD - ED$,

כלומר ל-3 ס"מ ($4 - 1 = 3$).

כעת ניתן לחשב באמצעות משפט פיתגורס או על ידי השלשה המוכרת 3:4:5 כי אורך הניצב BE הוא 4 ס"מ.

מכיוון שמצאנו כי במלבן DC הצלע BE ו-DC שוות זו לזו, הרי שגם אורך הצלע DC שווה ל-4 ס"מ.

סיכום: מצאנו את אורכי כל צלעות המרובע ABCD: AD שווה ל-4 ס"מ, DC שווה ל-4 ס"מ, BC

שווה ל-1 ס"מ ו-AB שווה ל-5 ס"מ, ובסך הכול היקף המרובע שווה ל-14 ס"מ ($4 + 4 + 1 + 5 = 14$).

תשובה (4).