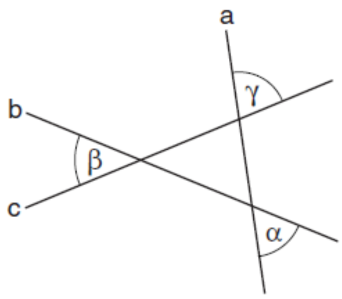
מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(1)	(2)	(3)	(3)	(2)	(1)	(1)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-10)



.1 **השאלה** : a, b ו-c הם שלושה ישרים החותכים זה את זה בשלוש נקודות.

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון : הזוויות שבסרטוט הן זוויות קודקודיות לזוויות הפנימיות של המשולש שנוצר, כלומר α, β ו-γ הן זוויותיו הפנימיות של המשולש, ומכאן שסכום הזוויות הוא $180°$.

תשובה (2).

.2 **השאלה** : במרכז קניות **א** יש x קומות, ובכל קומה יש 10 חנויות.
במרכז קניות **ב** יש x קומות, ובכל קומה יש 15 חנויות.
x הוא מספר שלם הגדול מ-1.

פי כמה גדול מספר החנויות במרכז קניות **ב** ממספר החנויות במרכז קניות **א**?

פתרון : מספר החנויות בכל מרכז קניות שווה למספר הקומות במרכז כפול מספר החנויות שבכל קומה.
במרכז קניות **ב** יש x קומות, ובכל קומה יש 15 חנויות, ולכן מספר החנויות במרכז **ב** הוא 15x,
במרכז קניות **א** יש x קומות, ובכל קומה יש 10 חנויות, ולכן מספר החנויות במרכז **א** הוא 10x.
מספר החנויות במרכז **ב** גדול פי 1.5 ממספר החנויות במרכז **א** $\left(\frac{15x}{10x}=\right)$.

תשובה (1).

.3 **השאלה** : נתונים שלושה מספרים חיוביים a, b ו-c.
איזה מהביטויים הבאים שווה לביטוי $(a-c)$?

פתרון : נעבור על התשובות המוצעות, ונפשט כל אחת מהן :

<u>תשובה (1)</u> : $(a-b)+(b-c)$ ⇦ $a-b+b-c$ ⇦ $a-c$.

מכיוון שמצאנו ביטוי ששווה לביטוי שבתשובה.

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: נתון מעגל ששטחו π סמ"ר.

מה היקף המעגל (בס"מ)?

פתרון: נתון כי שטח המעגל הוא π סמ"ר.

הנוסחה לשטח מעגל היא $r^2\pi$, כלומר: $r^2\pi = \pi$.

נחלק את שני האגפים ב-π, ונקבל: $r^2 = 1$, כלומר אורכו של רדיוס המעגל הוא 1 ס"מ.

היקף מעגל שווה למכפלת קוטר המעגל ב-π, ומכאן שהיקף המעגל הוא 2π ס"מ.

תשובה (2).

---

5. **השאלה**: בסלסילה של יעל 20 לימונים. משקלו הממוצע של לימון בסלסילה של יעל הוא 100 גרם. בסלסילה של רועי 40 לימונים. משקלו הממוצע של לימון בסלסילה של רועי הוא 70 גרם.

יעל ורועי שמו את כל הלימונים בסלסילה אחת גדולה.
מה משקלו **הממוצע** של לימון בסלסילה זו (בגרמים)?

פתרון: ממוצע משקל הלימונים בסלסילה שווה לסכום משקלי כל הלימונים לחלק במספר הלימונים.

סכום משקלי הלימונים של יעל הוא 2,000 גרם $(= 20 \cdot 100)$.

סכום משקלי הלימונים של רועי הוא 2,800 גרם $(= 40 \cdot 70)$.

מצאנו כי סכום משקלי הלימונים הכולל הוא 4,800 גרם $(= 2{,}000 + 2{,}800)$.

מספר הלימונים הכולל הוא 60 $(= 20 + 40)$.

ממוצע משקל הלימונים בסלסילה הוא 80 גרם $\left(= \frac{4{,}800}{60}\right)$.

תשובה (2).

---

6. **השאלה**: נתון: $-1 < x < 0$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית.

נתון כי x הוא שבר שלילי, ונשאלנו איזה מהביטויים הבאים הוא הגדול ביותר. אם נציב שבר שלילי כלשהו, למשל ונחשב את ערכן של התשובות, נוכל לקבוע בוודאות ערכו של מי מהביטויים המוצעים הוא הגדול ביותר.

<u>תשובה (1)</u>: x. כאשר $x = -\frac{1}{2}$, ערכו של הביטוי הוא $-\frac{1}{2}$

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{1}{x}$. כאשר $x = -\frac{1}{2}$, ערכו של הביטוי הוא -2 $\left(\frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot -2 = \right)$

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{1}{x^2}$. כאשר $x = -\frac{1}{2}$, ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \cdot 4 = \right)$.

<u>תשובה (4)</u>: x^2. כאשר $x = -\frac{1}{2}$, ערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{4}$ $\left(x^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \right)$.

מבין הביטויים המוצעים, כאשר x הוא שבר שלילי, ערך הביטוי המוצע בתשובה (3) הוא הגדול ביותר.

תשובה (3).

---

7. **השאלה** : a, b ו-c הם מספרים שלמים.

נתון : $a+b$ הוא מספר אי-זוגי.
$a\cdot b+c$ הוא מספר זוגי

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח

פתרון : מהנתון הראשון : $a + b$ הוא מספר אי-זוגי, ניתן להסיק כי a ו-b הם בהכרח שני מספרים שאינם מאותו סוג, כלומר אחד מהם זוגי, והאחר אי-זוגי.
מהנתון השני : $a\cdot b+c$ הוא מספר זוגי, ניתן להסיק כי מכיוון שמצאנו שאחד מהמספרים a ו-b הוא זוגי, הרי שתוצאת המכפלה $a\cdot b$ היא בהכרח זוגית, ולכן גם c זוגי, שהרי אחרת תוצאת החיבור הייתה אי-זוגית.

תשובה (1).

---

8. **השאלה** : לסבא אליעזר אוסף תקליטים.
אם יחלק את התקליטים שווה בשווה בין 3 ילדיו, יישאר לו תקליט אחד.
אם יחלק את התקליטים שווה בשווה בין 7 נכדיו, יישארו לו ארבעה תקליטים.

מה מהבאים יכול להיות מספר התקליטים באוסף של סבא אליעזר?

פתרון: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u> : 31. אם נחלק את 31 ב-3 נקבל שארית אחת $\left(\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}\right)$, אולם אם נחלק אותו ב-7 נקבל שארית 3 $\left(\frac{31}{7}=4\frac{3}{7}\right)$, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u> : 46. אם נחלק את 46 ב-3 נקבל שארית אחת $\left(\frac{46}{3}=15\frac{1}{3}\right)$, ואם נחלק אותו ב-7 נקבל שארית 4 $\left(\frac{46}{7}=6\frac{4}{7}\right)$, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

9. **השאלה** : שטח בסיסו של חרוט שווה לשטח פֵּאה של קובייה.
גובהו של החרוט שווה למקצוע הקובייה.

$$\frac{\text{נפח החרוט}}{\text{נפח הקובייה}}=?$$

פתרון: **<u>דרך א'</u>** : הצבת דוגמה מספרית

בשאלה שלפנינו אין נתונים מספריים, ולכן נציב לשם הנוחות כי גודל מקצוע הקובייה הוא 1.
נפח כל מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה. קובייה היא סוג של מנסרה, ולכן נפח הקובייה שווה לשטח בסיס הקובייה השווה ל-1 סמ"ר כפול גובה הקובייה השווה ל-1. מכאן שנפח הקובייה שווה ל-1 סמ"ק $(1\cdot1=)$.

נוסחת הנפח של כל פירמידה שווה לשטח הבסיס כפול הגובה חלקי 3.
החרוט הוא סוג של פירמידה, ולכם נפחו שווה לשטח בסיס החרוט, השווה לשטח פאת הקובייה, כלומר ל-1 סמ"ר, כפול גובה החרוט (אשר שווה למקצוע הקובייה) לחלק ל-3.
נפח החרוט שווה ל- $\frac{1}{3}$ סמ"ק $\left(\frac{1\cdot1}{3}=\right)$. ומכאן שערך הביטוי שנתבקשנו למצוא הוא $\frac{1}{3}$

$$\left(\frac{\text{נפח החרוט}}{\text{נפח הקובייה}}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\right).$$

<u>דרך ב'</u>: הבנה

נפח כל מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה. קובייה היא סוג של מנסרה, ולכן נפח הקובייה שווה לשטח בסיס הקובייה כפול מקצוע הקובייה.
נוסחת הנפח של כל פירמידה שווה לשטח הבסיס כפול הגובה חלקי 3.
החרוט הוא סוג של פירמידה, ולכם נפחו שווה לשטח בסיס החרוט, השווה לשטח פאת הקובייה, כפול גובה החרוט, השווה לפי הנתון למקצוע הקובייה, לחלק ל-3.

מכיוון ששטח בסיסי שתי הצורות וגובהן זהה, הרי שנפח החרוט יהיה שווה בהכרח ל- $\frac{1}{3}$ מנפח הקובייה בשל החלוקה ב-3 בנוסחת הנפח של הפירמידה.

תשובה (3).

---

10. **השאלה**: מספר התמונות במוזיאון מסוים גדול ב-6 ממספר הפסלים בו.
ידוע ש- $\frac{1}{5}$ ממספר התמונות שווה ל- $\frac{1}{3}$ ממספר הפסלים.

כמה תמונות ופסלים סך הכול יש במוזאון זה?

פיתרון: <u>דרך א'</u>: בדיקת תשובות.

נתחיל מבדיקת אחת התשובות האמצעיות, למשל 24**.**

<u>תשובה (2)</u>: 24. אם יש במוזיאון 24 תמונות ופסלים, ומספר התמונות גדול ב-6 ממספר הפסלים, הרי שיש במוזיאון 15 תמונות ו-9 פסלים. $\frac{1}{5}$ ממספר התמונות הם 3 תמונות $\left(\frac{1}{5}\cdot 15=\right)$, ו- $\frac{1}{3}$ ממספר הפסלים שווים אף הם ל-3 $\left(\frac{1}{3}\cdot 9=\right)$. מכיוון שמצאנו כי תשובה זו מקיימת את נתוני השאלה, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה - בניית משוואה

נתון כי מספר התמונות במוזיאון מסוים גדול ב-6 ממספר הפסלים בו, ולכן נסמן את מספר הפסלים ב-x ואת מספר התמונות ב- $x+6$.
ידוע ש- $\frac{1}{5}$ ממספר התמונות שווה ל- $\frac{1}{3}$ ממספר הפסלים, ולכן ניתן ליצור את המשוואה: $\frac{1}{5}(x+6)=\frac{1}{3}x$.
נכפול את שני האגפים ב-15, ונקבל: $3(x+6)=5x \Leftarrow 3x+18=5x$
נחסר משני האגפים 3x, ונקבל: $18=2x \Leftarrow 9=x$.
מצאנו כי מספר הפסלים, שהוא x, שווה ל-9, ומכאן שמספר התמונות הגדול ממנו ב-6 הוא 15, ומספר התמונות והפסלים הכולל במוזיאון הוא 24 $(=9+15)$.

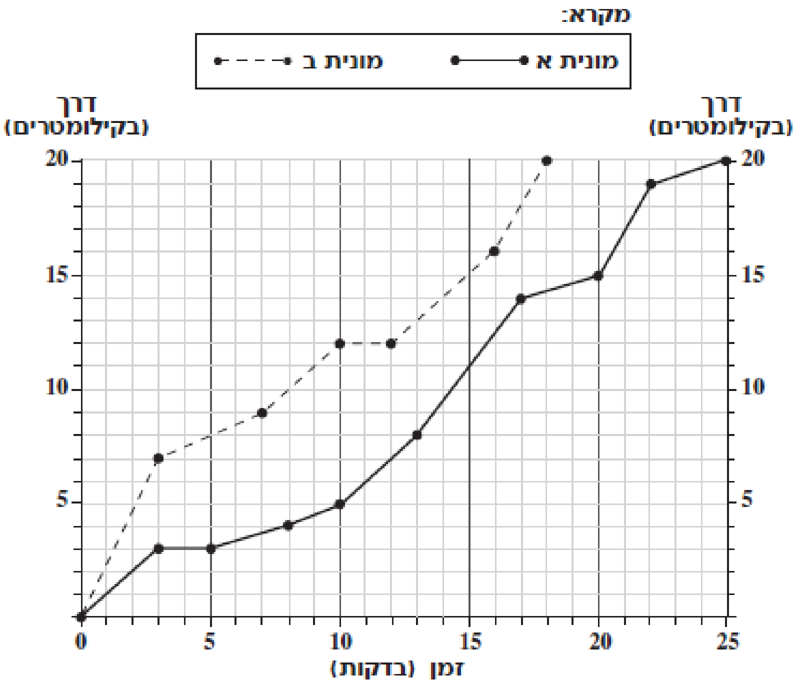
תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 14-11)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

שתי מוניות, מונית **א** ומונית ב, יצאו לדרך באותו זמן ומאותה נקודת מוצא ונסעו במסלול שאורכו 20 קילומטרים.
בתרשים מתוארת הדרך שעברה כל אחת מהמוניות ביחס לזמן שחלף מתחילת הנסיעה (ראו מקרא).
הציר האנכי מציין את מספר הקילומטרים שעברו המוניות מאז שעזבו את נקודת המוצא, והציר האופקי מציין את מספר הדקות שחלפו מרגע שעזבו המוניות את נקודת המוצא.
הגרף המתאר את דרכה של כל מונית מחולק למקטעים המופרדים בנקודות מודגשות. מהירות הנסיעה בכל אחד מן המקטעים קבועה.
בטבלת התעריפים שמתחת לתרשים מפורטים אופני התשלום עבור הנסיעה בשתי המוניות.
הערה: כאשר המונית עומדת במקומה, התשלום מחושב ביחס לזמן העמידה ונקבע על פי התעריף **האִטי**.

לדוגמה: בין הדקה ה-10 לדקה ה-13 נסעה מונית **א** במקטע החמישי, שאורכו 3 קילומטרים, במהירות של קילומטר לדקה (60 קמ"ש). לכן התשלום על מקטע זה מחושב על פי תעריף מהיר והוא עומד על 9 שקלים.



טבלת תעריפים

תעריף	מהירות	התשלום
אִטי	פחות מ-30 קמ"ש	2 שקלים לדקה
מהיר	30 קמ"ש או יותר	3 שקלים לקילומטר

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות

11. **השאלה**: באיזה ממקטעי הנסיעה הבאים חושב התשלום בעבור הנסיעה של מונית **א** על פי התעריף האִטי?

פתרון: חישוב לפי התעריף האטי נעשה כאשר מהירות המונית נמוכה מ-30 קמ״ש, כלומר כאשר מספר הקילומטרים שהיא עוברת ביחידת זמן הוא קטן. אם ברצוננו להימנע מחישובי מהירות לגבי כל אחד מהמקטעים, מוטב שנחפש מיהו המקטע מבחינה ויזואלית, אשר בו השיפוע של הקו של מונית **א** הוא הקטן ביותר.
מבין כל המקטעים המוצעים בתשובות, המקטע השלישי נראה בעל השיפוע הקטן ביותר. כעת נבדוק מה הייתה מהירותה של מונית **א** במקטע זה: מונית **א** נסעה במקטע השלישי בין הדקה ה-5 לדקה ה-8, כלומר במשך 3 דקות, ועברה במהלך זמן זה 1 ק״מ.
על מנת למצוא את מהירותה של המונית בקמ״ש עלינו למצוא מה המרחק שהייתה עוברת המונית ב-60 דקות. אם במשך 3 דקות עברה מונית **א** ק״מ אחד, הרי שב-60 דקות, שהם פרק זמן הגדול פי 20, הייתה המונית עוברת מרחק הגדול ב-20, כלומר 20 ק״מ. מצאנו כי מהירותה של מונית **א** במקטע השלישי הוא 20 קמ״ש. מכאן שבמקטע השלישי התשלום מחושב לפי התעריף האטי.

תשובה (3).

---

12. **השאלה**: מה היה התשלום על מקטע הנסיעה האחרון של מונית **א**?

פתרון: מונית **א** נסעה במקטע האחרון בין הדקה ה-22 לדקה ה-25, כלומר במשך 3 דקות, ועברה במהלכו ק״מ אחד. מכיוון שנתונים אלו זהים לנתונים אשר חישבנו בשאלה הקודמת, אנו כבר יודעים כי מהירותה של מונית **א** במהלך מקטע זה היא 20 קמ״ש, ומכיוון שמהירות זו נמוכה מ-30 קמ״ש, הרי שהתעריף במצב זה הוא התעריף האטי.
התשלום לפי המקרא במקרה של התעריף האִטי הוא 2 שקלים לדקה.
מכיוון שזמן הנסיעה במקטע האחרון הוא 3 דקות, הרי שהתשלום על מקטע הנסיעה האחרון הוא 6 שקלים $(3\cdot 2=)$.

תשובה (2).

---

13. **השאלה**: כמה קילומטרים עברה מונית **ב** בזמן שמונית **א** עמדה במקומה?

פתרון: ראשית, נמצא מה היו הדקות שבהן עמדה מונית **א** במקומה. מבחינה ויזואלית עלינו למצוא את המקטע שבו הקו המתאר את התקדמותה של מונית **א** הוא אופקי, כלומר במהלך ההתקדמות על פני ציר הזמן (ציר ה-x), אין כל עליה במספר הקילומטרים שעברה המונית (ציר ה-y).
הקו המתאר את המקטע השני של מונית **א** הוא כזה. מקטע זה התחיל בדקה ה-3 והסתיים בדקה ה-5, כלומר ארך שתי דקות.
כעת נתבונן בתרשים ונמצא מה היה מספר הקילומטרים שעברה מונית **ב** במהלך פרק זמן זה.
בין הדקות ה-3 לדקה ה-5, התקדמה מונית **ב** מהקילומטר השביעי למסעה לקילומטר השמיני, כלומר עברה בסך הכול קילומטר אחד.

תשובה (1).

---

14. **השאלה**: מונית שלישית (שאינה מיוצגת בתרשים) יצאה יחד עם מוניות **א** ו-**ב** ונסעה באותו מסלול, **במהירות קבועה** ובלי לעצור, עד שהגיעה לסוף הדרך **יחד** עם מונית **א**.

מה הייתה מהירות נסיעתה של המונית השלישית?

פתרון: על מנת למצוא את מהירות נסיעתה של המונית עלינו למצוא את המרחק שעליה לעבור והזמן שבו היא עוברת מרחק זה.
לפי נתוני השאלה, המונית השלישית צריכה לעבור את כל המסלול, אשר אורכו, לפי התרשים, הוא 20 ק"מ.
הזמן שבו עליה לעבור מרחק זה אמור להיות שווה לזמן שבו מונית **א** עברה מרחק זה, כלומר עליה לעבור את המרחק ב-25 דקות.
נתבקשנו למצוא מה מהירותה של המונית השלישית, והתשובות הן בקמ"ש, ולכן עלינו למצוא מה המרחק שתעבור המונית בשעה, כלומר ב-60 דקות. נמצא את התשובה באמצעות ריבוע יחסים:

מרחק (בק"מ)	זמן (בדקות)
20	25
x	60

מכיוון שהיחס בכל עמודה שווה, ניתן ליצור את המשוואה: $\frac{x}{20}=\frac{60}{25}$ ⇦ $\frac{x}{20}=\frac{12}{5}$.

נכפול ב-20 את שני האגפים, ונקבל: $4\cdot12=x$ ⇦ $48=x$.

מצאנו שמהירות נסיעתה של המונית השלישית היא 48 קמ"ש.

תשובה (2).

שאלות ובעיות (שאלות 15-20)

15. **השאלה**: נתונים שני משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים: משולש **א** ומשולש **ב**.
שטחו של משולש **א** הוא 50 סמ"ר ושטחו של משולש **ב** הוא 25 סמ"ר.

מה היחס בין אורך היתר של משולש **א** לאורך היתר של משולש **ב**?

פתרון: <u>דרך א'</u>: יחס קווי/יחס שטחים בצורות דומות

מכיוון שכל זוויותיהם של שני המשולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים שוות בהתאמה, הרי ששני המשולשים דומים זה לזה.
כפי שלמדנו בין כל שתי צורות דומות: יחס שטחים $=$ (יחס קווי)^2 ⇦ יחס קווי$=\sqrt{\text{יחס שטחים}}$.

מכיוון שנתון כי שטח משולש **א** הוא 50 סמ"ר ושטח משולש **ב** הוא 25 סמ"ר, כלומר שטח משולש **א** גדול פי 2 משטח משולש **ב** או יחס שטחי המשולשים הוא 2:1, ומכאן שיחס אורכי היתרים של שני המשולשים, שהן זוג צלעות מתאימות שווה לשורש יחס השטחים, כלומר ל- $\sqrt{2}:1$ $\left(\sqrt{2:1}=\sqrt{2}:\sqrt{1}=\right)$.

<u>דרך ב'</u>: מציאת אורך היתר של כל משולש

נתון כי שני משולשים הם ישרי-זווית ושווי-שוקיים, וכי שטחו של משולש **א** הוא 50 סמ"ר.
שטח משולש ישר זווית שווה-שוקיים שווה למכפלת ניצבי המשולש (השווים זה לזה) חלקי 2.
אם נסמן ב-x את אורך כל אחד מהניצבים, הרי שנוכל לבנות את המשוואה הבאה: $50=\frac{x\cdot x}{2}$ ⇦

$x^2=100$ ⇦ $x=10$. מצאנו כי אורך כל אחד מניצבי המשולש הוא 10 ס"מ. מכיוון שאורך היתר במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב, הרי שאורך היתר במשולש **א** הוא $10\sqrt{2}$ ס"מ.

שטחו של משולש **ב** הוא 25 סמ"ר.

אם נסמן ב-x את אורך כל אחד מהניצבים, הרי שנוכל לבנות את המשואה הבאה: $25 = \frac{x \cdot x}{2}$ ⇦

$x^2 = 50$ ⇦ $x = \sqrt{50}$ ⇦ $x = \sqrt{25 \cdot 2}$ ⇦ $x = 5\sqrt{2}$.

מצאנו כי אורך כל אחד מניצבי המשולש הוא $5\sqrt{2}$ ס"מ, מכיוון שאורך היתר במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב, הרי שאורך היתר במשולש **ב** הוא 10 ס"מ $\left(5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2 =\right)$.

מצאנו כי אורך היתר במשולש **א** הוא $10\sqrt{2}$ ס"מ, וכי אורך היתר במשולש **ב** הוא 10 ס"מ, ומכאן שהיחס בין אורך היתר של משולש **א** לאורך היתר של משולש **ב** הוא $10\sqrt{2} : 10$.

נחלק את שני האגפים של היחס ב-10, ונקבל כי יחס אורכי היתרים הוא: $\sqrt{2} : 1$.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: נתונים שני מספרים שלמים וחיוביים a ו-b.
הגורמים הראשוניים ש-a מתחלק בהם הם 2 ו-3 בלבד.
הגורמים הראשוניים ש-b מתחלק בהם הם 3 ו-5 בלבד.
נתון: $b < a$

הביטוי $\frac{a \cdot b}{30}$ שווה לכל הפחות ל-

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

נשאלנו מה ערכו המינימלי של ביטוי מסוים, ולכן נחפש מיהם המספרים הקטנים ביותר אשר ניתן להציב במקום a ו-b והמקיימים את נתוני השאלה.
נתון כי הגורמים הראשוניים ש-a מתחלק בהם הם 2 ו-3 בלבד, המספר הקטן ביותר אשר מתחלק ב-2 וב-3 בלבד הוא 6.
נתון כי הגורמים הראשוניים ש-b מתחלק בהם הם 3 ו-5 בלבד. המספר הקטן ביותר אשר מתחלק ב-3 וב-5 בלבד הוא 15.
מכיוון שנתון כי $b < a$, הרי שעלינו למצוא את ה-a הקטן ביותר אשר מקיים את הנתונים וגדול מה-b הקטן ביותר, כלומר מ-15. המספר הקטן ביותר אשר מתחלק ב-2 ו-3 וגדול מ-15 הוא 18.
כעת נציב בביטוי כי $a = 18$, ו- $b = 15$, ונמצא כי ערכו המינימלי של הביטוי הוא 9 $\left(\frac{a \cdot b}{30} = \frac{18 \cdot \cancel{15}^{1}}{{}_{2}\cancel{30}} =\right)$.

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: לכל מספר שלם וחיובי a מוגדר $\$(a)$ כמספר השלם הגדול ביותר המקיים את התנאים הבאים:

$\$(a)$ קטן מ-a ואינו שווה לו.

$\$(a)$ מתחלק ב-5 ללא שארית.

לדוגמה: $\$(10)=5$

$\$(\$(123))=?$

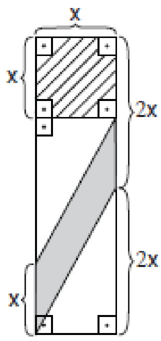
פתרון: הפעולה המומצאת \$ עבור כל a מוגדרת כמספר השלם הגדול ביותר המשלב שני כללים:
א) הוא קטן מ-a ואינו שווה לו.
ב) הוא מתחלק ב-5 ללא שארית.

על מנת למצוא את התשובה לשאלה שלפנינו, יש לבצע את פעולת ה-\$ פעמיים, בפעם הראשונה על המספר 123, ולאחר מכן על המספר שנקבל כתוצאה מפעולת ה-\$.
נבצע את הפעולה \$ על המספר 123: מכיוון שהמספר השלם הגדול ביותר אשר קטן מ-123, ומתחלק ב-5 ללא שארית הוא 120, הרי ש: $\$(123)=120$.
כעת נבצע את הפעולה \$ על המספר 120: מכיוון שהמספר השלם הגדול ביותר אשר קטן מ-120, ומתחלק ב-5 ללא שארית הוא 115, הרי ש: $\$(120)=115$.

תשובה (2).

---

18. **השאלה**: לפי הנתונים שבסרטוט,



$\frac{\text{השטח המקווקו}}{\text{השטח הכהה}}=?$

פתרון: ראשית, נחשב את גודל כל אחד מהשטחים המבוקשים.
<u>שטח מקווקו</u>: השטח המקווקו שבסרטוט הוא שטחו של ריבוע שאורך צלעו x ס״מ.
שטח ריבוע שווה ל- $(\text{אורך הצלע})^2$, ומכאן ששטח הריבוע הוא x^2.

<u>שטח כהה</u>: הצורה הלבנה שבתוכה כלוא השטח הכהה, היא מרובע אשר כל זוויותיו שוות ל-$90°$, כלומר מלבן. יש שתי אפשרויות לחישוב השטח הכהה:
א) השטח הכהה הוא מקבילית, ומכאן ששטחו שווה למכפלת צלע המקבילית בגובהה.

אורך צלע המקבילית - הצלע התחתונה משמאל בסרטוט, שווה ל-x.
גובה המקבילית שווה למרחק בין בסיסי המקבילית, אשר אף הוא שווה ל-x (ראה אורך הצלע העליונה שבסרטוט), ומכאן ששטח המקבילית שווה ל- x^2.

ב) שטח המלבן פחות שטחי שני המשולשים ישרי הזווית הלבנים.

שטח המלבן (השטח הלבן + הכהה) שווה למכפלת אורך המלבן ברוחבו.
צלעה הימני של הצורה מורכב משני קטעים שאורכם 2x. אם נפחית את אורך צלע הריבוע, השווה ל-x, נמצא כי אורך המלבן שווה ל- $3x$ $(2x+2x-x=)$. רוחב המלבן שווה לרוחבו של הריבוע, כלומר ל-x, ומכאן ששטח המלבן הוא $3x^2$ $(3x\cdot x=)$.

שני המשולשים הלבנים ישרי הזווית זהים זה לזה, ואורך הניצבים של כל אחד מהם הם: x ו-2x, ומכאן ששטח כל אחד מהמשולשים שווה ל- x^2 $\left(\frac{x\cdot 2x}{2}=\right)$, ושטח שני המשולשים גם יחד שווה $2x^2$.

השטח הכהה שווה לשטח המלבן פחות שטח שני המשולשים ישרי הזווית, ומכאן שהשטח הכהה שווה ל- x^2 $(3x^2-2x^2=)$. מצאנו כי $\frac{\text{השטח המקווקו}}{\text{השטח הכהה}}=\frac{x^2}{x^2}=1$

תשובה (1).

19. **השאלה**: נתון: $x \cdot y + z < 0$

$x < z$

אם נוסיף לנתונים אלו את הנתון ______, y יהיה בהכרח מספר שלילי.

פתרון: מהנתון: $x \cdot y + z < 0$, ניתן להסיק כי לפחות אחד מהמשתנים הוא שלילי.

כעת נעבור על התשובות המוצעות, ונבדוק צירוף של מי מהן עם הנתון כי $x < z$, מביא למסקנה כי y האו בהכרח מספר שלילי.

<u>תשובה (1)</u>: $0 < x$. צירוף הנתון כי x חיובי לנתון כי $x < z$, מביא בהכרח למסקנה שבהכרח z חיובי. אם x ו-z הם חיוביים, הרי שעל מנת שתוצאת אי-השיוויון הנתון תהיה שלילית, y בהכרח שלילי. מכיוון שמצאנו תשובה נכונה, ניתן לעצור את הבדיקה בשלב זה.

לשם השלמת ההסבר נמשיך ונבדוק את יתר התשובות:

<u>תשובה (2)</u>: $x < 0$. צירוף הנתון כי x שלילי לנתון כי $x < z$, אינו יכול להביא למסקנה חד משמעית לגבי z, שכן יתכן במצב כזה כי z אף הוא מספר שלילי (אשר גדול מ-x); z שווה ל-0 או ש-z הוא חיובי. במצב זה, ברור שגם לא ניתן להסיק דבר בהכרח לגבי זהותו של y, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $0 < z$. צירוף הנתון כי z חיובי לנתון לפיו: $x < z$, אינו יכול להביא לכל מסקנה לגבי x, שכן יתכן במצב כזה כי x חיובי הקטן מ-z; x שווה ל-0 או ש-x הוא שלילי. מכיוון שיתכן ש-x שלילי, הרי שלא ניתן להסיק בוודאות כי y שלילי, ולפיכך התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $z < 0$. צירוף הנתון כי z שלילי לנתון לפיו: $x < z$, מביא למסקנה כי x הקטן מ-z אף הוא שלילי. מכיוון ש-x ו-z שליליים, לא ניתן להסיק בוודאות כי y שלילי, ולפיכך התשובה נפסלת.

תשובה (1).

---

20. **השאלה**: עופר וגלית בוחרים באקראי, כל אחד בנפרד, מספר מן המספרים 1 ו-2.

מה ההסתברות שהיחס $\frac{\text{המספר שבחר עופר}}{\text{המספר שבחרה גלית}}$ יהיה מספר שלם?

פתרון: הסתברות שווה ל- $\frac{\text{רצוי}}{\text{מצוי}}$, כלומר למספר האפשרויות הרצויות לחלק לסך הכול מספר האפשרויות. על מנת למצוא את התשובה לשאלה, עלינו למצוא מהן סך כל האפשרויות שיש לעופר ולגלית לבחירת צמד מספרים, ואז למצוא מהן האפשרויות ה'רצויות', כלומר בכמה מזוגות המספרים האפשריים, תוצאת החלוקה של המספר שעופר בחר במספר שגלית בחרה הוא מספר שלם.

<u>סך הכול מספר האפשרויות</u>: מכיוון שלא מדובר במספר גדול של אפשרויות, ניתן למצוא את מספר האפשרויות הכולל באמצעות ספירה ידנית של מספר האפשרויות. כאשר עופר בוחר את הספרה 1, גלית יכולה לבחור את הספרה 1 או את הספרה 2, כלומר יש שני זוגות של אפשרויות: 1,1 ו-1,2.

כאשר עופר בוחר את הספרה 2, גלית יכולה לבחור את הספרה 1 או את הספרה 2, כלומר יש שני זוגות של אפשרויות: 2,1 ו-2,2.

מצאנו שיש סך הכול 4 אפשרויות שונות לזוגות של מספרים שעופר וגלית יכולים לבחור.

(ניתן למצוא את מספר האפשרויות הכולל גם באמצעות חישוב מתמטי, כפי שלמדנו, באופן הבא: לעופר יש שתי אפשרויות לבחירת מספר כלשהו, ולגלית יש שתי אפשרויות, ולפיכך יש להם בסך הכול 4 אפשרויות לבחירת זוגות מספרים $(2 \cdot 2 =)$).

מספר האפשרויות הרצויות: כעת נמצא בכמה מזוגות המספרים, תוצאת החילוק של המספר שבחר עופר במספר שבחרה גלית הוא מספר שלם.
ישנם 3 זוגות מספרים שבהם תוצאת החילוק היא מספר שלם: כאשר עופר מקבל 1 וגלית מקבלת 1, כאשר עופר מקבל 2 וגלית מקבלת 1, וכאשר עופר מקבל 2 וגלית מקבלת 2.
מכיוון שמצאנו 3 אפשרויות שרצויות לנו מבין 4 האפשרויות, הרי שהסיכוי שהיחס

$\frac{\text{המספר שבחר עופר}}{\text{המספר שבחרה גלית}}$ יהיה מספר שלם הוא $\frac{3}{4}$.

תשובה (4).
