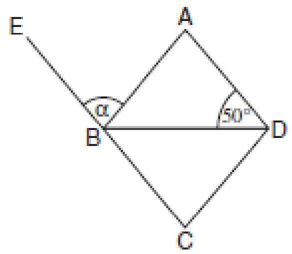
מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(1)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(1)	(2)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(1)	(4)	(2)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(2)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

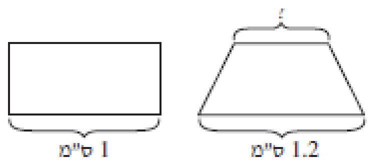


.1 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מעוין. BE הוא המשך הצלע CB.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
$\alpha = ?$

פתרון: על מנת למצוא את זווית α, עלינו למצוא את גודלה של הזווית הצמודה לה, זווית ABC. הנתון היחיד בסרטוט לגבי גודל זווית כלשהי, הוא הנתון לגבי גודלה של זווית ADB, ולפיכך יש להשתמש בנתון זה כדי למצוא את גודלה של זווית ABC.
האלכסונים במעוין חוצים את זוויות המעוין, ומכאן שזווית ADC שווה ל-$100°$ $(2 \cdot 50° =)$.
זוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו, ומכאן שזווית ABC, הזווית הצמודה לזווית α, שווה ל-$100°$.
זווית α צמודה לזווית ABC, ולפיכך ניתן לקבוע כי α שווה ל-$80°$ $(180° - 100° =)$.

תשובה (2).



.2 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מלבן וטרפז שגובהם שווה ושטחם שווה.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הבסיס העליון של הטרפז (בס״מ)?

פתרון: לפי נתוני השאלה שטח וגובה המלבן והטרפז שווים. נשתמש בנתונים אלו לשם בניית משוואה, אשר בעזרתה נמצא את אורך בסיסו העליון של הטרפז.
אין כל נתון מספרי לגבי גובה המלבן והטרפז. ניתן לסמן נתון זה ב-h, אולם מכיוון שאיננו מתבקשים למצוא את הגובה, הרי שניתן לשם הנוחות להציב כי הוא שווה ל-1.
שטח מלבן שווה למכפלת אורך המלבן בגובהו. אורך המלבן שווה לפי הנתון ל-1, ומכיוון שהצבנו כי גובה המלבן שווה ל-1, הרי ששטח המלבן שווה ל-1 סמ״ר $(1 \cdot 1 =)$.
שטח טרפז שווה למכפלת סכום אורכי בסיסי הטרפז בגובהו לחלק ב-2.
נתון כי שטח הטרפז שווה לשטח המלבן, כלומר ל-1 סמ״ר.
גובה הטרפז הוא 1 ס״מ, נסמן את בסיסו העליון של הטרפז ב-x, ונקבל: $\frac{(1.2 + x) \cdot 1}{2} = 1$.

נכפול ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $1.2 + x = 2$.
נחסר 1.2 מכל אחד מהאגפים, ונקבל: $x = 0.8$.

תשובה (1).

---

3. **השאלה**: מספר העציצים של יוסי גדול פי 4 ממספר העציצים של רינה.

איזה מהמספרים הבאים עשוי להיות **ההפרש** בין מספר העציצים של יוסי למספר העציצים של רינה?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין ערכים מספריים בשאלה, נציב דוגמה מספרית המקיימת את נתוני השאלה, למשל שמספר העציצים של רינה הוא אחד ושל יוסי הוא 4. במקרה כזה ההפרש בין מספר העציצים של יוסי למספר העציצים של רינה הוא 3 $(=4-1)$.

מכיוון שערכן של כל התשובות גדול מערך זה, נציב מספרים גדולים יותר, למשל 2 ו-8. מכיוון שההפרש הוא 6, נגדיל שוב את המספרים, הפעם, ל-3 ו-12, ונמצא כי ההפרש הוא 9 $(=12-3)$. מכיוון שערך זה מופיע בתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: יחסים

נתון כי מספר העציצים של יוסי גדול פי 4 ממספר העציצים של רינה.
אם נסמן את מספר העציצים של רינה ב-x, הרי שמספר העציצים של יוסי יהיה 4x.
ההפרש בין מספר העציצים של יוסי למספר העציצים של רינה הוא 3x $(=4x-x)$.

מכיוון ש-x מייצג את מספר העציצים שהוא מספר שלם, הרי שניתן לקבוע כי ההפרש בין מספר העציצים של יוסי לרינה הוא כפולה של 3. יש רק תשובה אחת שהיא כפולה שלמה של 3 – תשובה (2).

תשובה (2).

---

4. **השאלה**: $\frac{a^{x^2}}{a^{2x-1}} = ?$ $(0<a)$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נשאלנו לגבי ערכו של ביטוי ולא לגבי ערכם של a או x. משום כך, נוכל להציב מספרים במקום a ו-x.
נציב מספרים נוחים שאינם סותרים את נתוני השאלה, נציב: $a=x=2$. כאשר נציב כי $a=x=2$,

נקבל: $\frac{2^{2^2}}{2^{2\cdot2-1}} \Leftarrow \frac{2^4}{2^3} \Leftarrow 2$.

נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: a^{x^2-x}. כאשר נציב כי $a=x=2$, נקבל: $2^{2^2-2} \Leftarrow 2^{4-2} \Leftarrow 2^2 \Leftarrow 4$. מכיוון שהביטוי שהתקבל אינו שווה לביטוי שקיבלנו בפתרון השאלה התשובה אינה מתאימה, ולפיכך ניתן לפסול אותה.

<u>תשובה (2)</u>: a^{x^2+x}. כאשר נציב כי $a=x=2$, נקבל: $2^{2^2+2} \Leftarrow 2^{4+2} \Leftarrow 2^6 \Leftarrow 64$. מכיוון שהביטוי שהתקבל אינו שווה לביטוי שקיבלנו בפתרון השאלה התשובה אינה מתאימה, ולפיכך ניתן לפסול אותה.

<u>תשובה (3)</u>: $a^{(x+1)^2}$. כאשר נציב כי $a=x=2$, נקבל: $2^{(2+1)^2} \Leftarrow 2^{3^2} \Leftarrow 2^9 \Leftarrow 512$. מכיוון שהביטוי שהתקבל אינו שווה לביטוי שקיבלנו בפתרון השאלה התשובה אינה מתאימה, ולפיכך ניתן לפסול אותה.

<u>תשובה (4)</u>: $a^{(x-1)^2}$. כאשר נציב כי $a=x=2$, נקבל: $2^{(2-1)^2} \Leftarrow 2^{1^2} \Leftarrow 2^1 \Leftarrow 2$. מכיוון שהביטוי שהתקבל שווה לביטוי שקיבלנו בפתרון השאלה מתאימה. פסלנו 3 תשובות ולפיכך זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

לפי חוקי החזקות: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

נפשט את הביטוי באמצעות חוק זה, ונקבל: $\frac{a^{x^2}}{a^{2x-1}}=a^{x^2-(2x-1)}=a^{x^2-2x+1}=a^{(x-1)^2}$.

תשובה (4).

---

5. **השאלה**: אורך הכביש שבין עיר **א** לעיר **ב** הוא 120 ק"מ.
אביבה יצאה בשעה 8:00 מעיר **א** ונסעה בכביש לעיר **ב** במהירות קבועה של 60 קמ"ש.
פזית יצאה בשעה 8:30 מעיר **א** ונסעה בכביש לעיר **ב** במהירות קבועה של 80 קמ"ש.

מי משתיהן הגיעה ראשונה לעיר **ב**?

פתרון: לפי נוסחת התנועה: דרך = זמן · מהירות

אביבה יצאה בשעה 8:00 מעיר **א** ונסעה בכביש לעיר **ב** במהירות קבועה של 60 קמ"ש.

הזמן הנדרש על מנת לעבור דרך של 120 ק"מ במהירות של 60 קמ"ש הוא שעתיים $\left(=\frac{120}{60}\right)$, ומכאן שאם אביבה יצאה בשעה 8:00 היא תגיע בשעה 10:00 $(=8:00+2:00)$.

פזית יצאה בשעה 8:30 מעיר **א** ונסעה בכביש לעיר **ב** במהירות קבועה של 80 קמ"ש, הזמן הנדרש לעבור מרחק של 120 ק"מ במהירות של 80 קמ"ש הוא שעה וחצי $\left(=\frac{120}{80}\right)$, ומכאן שאם פזית יצאה בשעה 8:30 היא תגיע בשעה 10:00 $(=8:30+1:30)$.

מצאנו כי אביבה ופזית הגיעו באותה שעה לעיר **ב**.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: 8 הם ______ מתוך 120.

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: ריבוע יחסים

שואלים כמה הם 8 מתוך 120. 120 הוא השלם, ולכן נסמן אותו ב-100 אחוז, ונמצא באמצעות ריבוע היחסים כמה אחוזים מהווה 8 מתוך 120:

מספר	אחוזים
120	100
8	x

היחס בכל שורה זהה, ולכן ניתן לבנות את המשוואה: $\frac{120}{100}=\frac{8}{x} \Leftarrow \frac{6}{5}=\frac{8}{x}$.

נכפול ב-$5x$ את שני האגפים, ונקבל: $40=6x$.

נחלק את שני האגפים ב-6, ונקבל כי x שווה $6\frac{2}{3}\%$ $\left(\frac{40}{6}=\frac{20}{3}=\right)$.

<u>דרך ב'</u>: חישוב לפי 10%

10% מ-120 הם 12, ולכן 5%, שהם מחצית מ-10%, הם מחצית מ-12, כלומר 6 $\left(\frac{1}{2}\cdot 12=\right)$.

מצאנו כי 6 הם 5%. אנו רוצים לדעת לכמה אחוזים שווים 8, ולכן עלינו למצוא לכמה אחוזים שווים ה-2 הנוספים.

6 הם 5%, ולכן 2, שהם שליש מ-6, שווים לשליש מ-5%, כלומר ל- $1\frac{2}{3}\%$ $\left(\frac{1}{3}\cdot 5\%=\frac{5}{3}\%=\right)$.

אם 6 הם 5% , ו-2 הם $1\frac{2}{3}\%$, הרי ש-8, שהוא סכומם של 2 ו-6, שווה לסכום האחוזים שלהם, כלומר ל- $6\frac{2}{3}\%$ $\left(5\%+1\frac{2}{3}\%=\right)$.

תשובה (2).

---

7. **השאלה**: $x+y<x-y<-x-y$

איזה מהביטויים הבאים חיובי **בהכרח**?

פתרון: אלגברה

נפרק את אי-השיוויון לשני אי-שיוויונים: $x+y<x-y$ ו- $x-y<-x-y$.

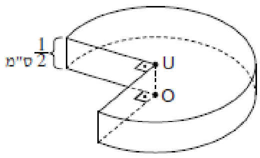
נפתור כל אחד מהם בנפרד:

א) $x+y<x-y$. נחסר x ונחבר y מכל אחד מהאגפים, ונקבל: $2y<0 \Leftarrow y<0$.

ב) $x-y<-x-y$. נחבר x ו-y לכל אחד מהאגפים, ונקבל: $2x<0 \Leftarrow x<0$.

מצאנו כי x ו-y הם בהכרח מספרים שליליים, ומכאן שמכפלתם היא בהכרח ביטוי חיובי.

תשובה (4).



8. **השאלה**: מגליל שגובהו $\frac{1}{2}$ ס"מ ורדיוסו 2 ס"מ הוציאו פרוסה בת $90°$ (ראו סרטוט).

O ו-U הם מרכזי הבסיסים של הגליל.

מה נפח הגוף שנותר (בסמ"ק)?

פתרון: הצורה שבסרטוט היא גליל אשר חתכו ממנו פרוסה בת $90°$.
נחשב את נפח בגליל ואז נמצא מה גודלו של החלק שנותר ממנו לאחר החיתוך.
נפח של כל מנסרה ישרה, ומכאן גם נפח גליל, שווה למכפלת שטח בסיס המנסרה בגובהה.
שטח בסיס הגליל הוא מעגל שאורך רדיוסו 2 ס"מ, ומכאן ששטחו הוא 4π סמ"ר $\left(r^2\pi = 2^2\pi =\right)$.
גובה הגליל הוא $\frac{1}{2}$ ס"מ, ומכאן שנפח הגליל הוא 2π סמ"ר $\left(\text{שטח בסיס} \cdot \text{גובה} = 4\pi \cdot \frac{1}{2} =\right)$.

חתכו מן הגליל פרוסה בת $90°$. מכיוון שהגליל כולו הוא $360°$, הרי שפרוסה בת $90°$ מהווה $\frac{1}{4}$ ממנו

$\left(\frac{90°}{360°} =\right)$, והנפח שנותר מהווה $\frac{3}{4}$ מנפח הגליל, כלומר שווה ל- $\frac{3\pi}{2}$ סמ"ר $\left(\frac{3}{4} \cdot 2\pi =\right)$.

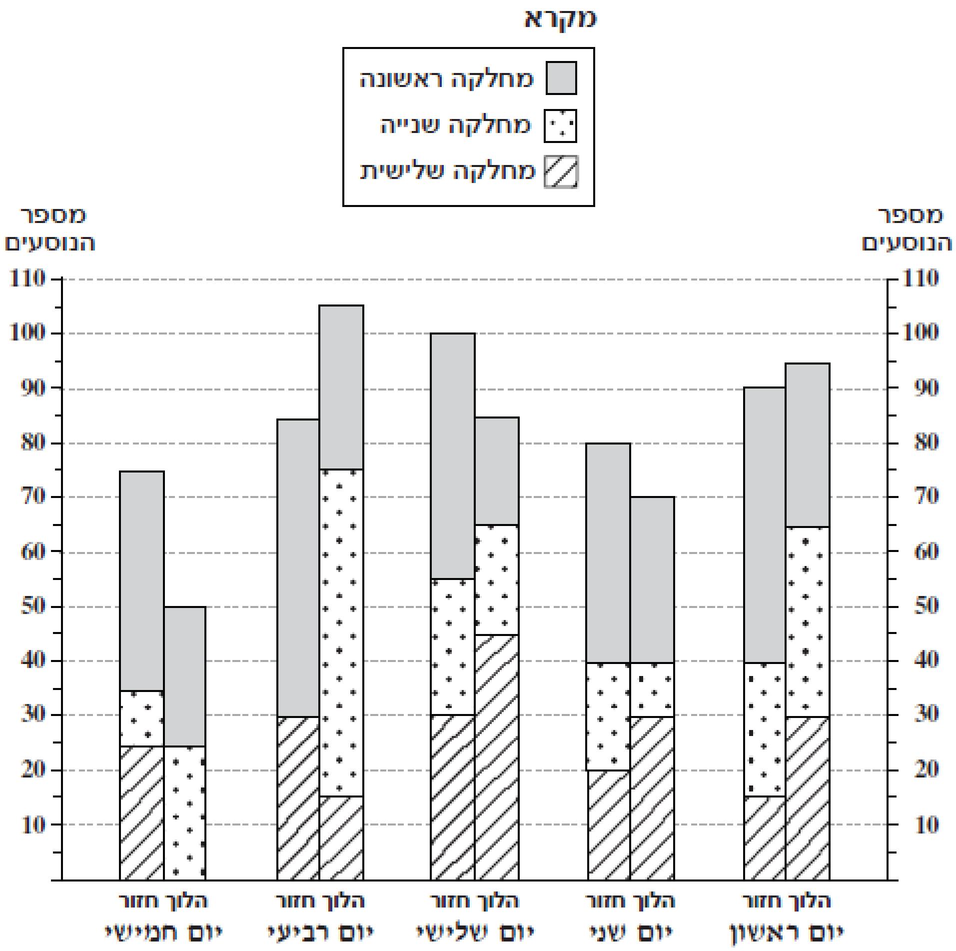
תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 12-9)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

בתרשים מתוארות נסיעותיה של רכבת מיום ראשון עד יום חמישי בשבוע מסוים.
הנוסעים ברכבת ישבו ב-3 מחלקות: ראשונה, שנייה ושלישית.
בכל אחד מן הימים נסעה הרכבת שתי נסיעות: נסיעה הלוך ונסיעה חזור.
כל נסיעה מתוארת בתרשים באמצעות עמודה: גובה העמודה מייצג את סך כל הנוסעים ברכבת, והחלוקה הפנימית של העמודה מייצגת את מספר הנוסעים בכל מחלקה (ראו מקרא). מתחת לעמודה רשומים יום הנסיעה וכיוונה.

לדוגמה, ביום ראשון נסעו ברכבת בנסיעה חזור 90 נוסעים: 50 במחלקה הראשונה, 25 במחלקה השנייה ו-15 במחלקה השלישית.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

9. **השאלה**: באחת מן הנסיעות המתוארות בתרשים היה מספר הנוסעים במחלקה הראשונה גדול פי שניים ממספר הנוסעים **בכל אחת** מן המחלקות האחרות.

באיזה יום הייתה נסיעה זו?

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות ונבדוק באיזה מהימים היה מצב שבו מספר הנוסעים במחלקה הראשונה גדול פי שניים ממספר הנוסעים בכל אחת מן המחלקות האחרות.

תשובה (1): ראשון.

בנסיעה הלוך ביום ראשון נסעו 30 אנשים במחלקה הראשונה ו-35 במחלקה השנייה, ולכן כבר בשלב זה ניתן לעצור ולקבוע כי מכיוון שמספר הנוסעים במחלקה הראשונה אינו גדול פי שניים ממספר הנוסעים בכל אחת מן המחלקות האחרות, זו אינה יכולה להיות הנסיעה אליה התכוונו.
בנסיעה חזור ביום ראשון נסעו 50 אנשים במחלקה הראשונה; 25 אנשים במחלקה השנייה ו-15 במחלקה השלישית. מכיוון שגם נסיעה זו אינה מתאימה לנתוני השאלה, נפסול גם נסיעה זו ונעבור לבדיקת התשובה הבאה.

תשובה (2): שני.

בנסיעה הלוך ביום שני נסעו 30 אנשים במחלקה הראשונה ו-10 אנשים במחלקה השנייה. מכיוון שנתונים אלה אינם תואמים את מה שאנו מחפשים, ניתן לעצור ולעבור לבדיקת הנסיעה חזור.
ביום שני נסעו בנסיעה חזור 40 אנשים במחלקה הראשונה; 20 אנשים במחלקה השנייה ו-20 במחלקה השלישית. נסיעה זו מתאימה למצב המתואר בנתוני השאלה, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

10. **השאלה**: משלחת של 30 ספורטאים נסעה ביום מסוים ברכבת בנסיעה הלוך, **ולמחרת** – בנסיעה חזור. בשתי הנסיעות נסעו כל חברי המשלחת, ורק הם, במחלקה השלישית.

באיזה יום נסעו חברי המשלחת ברכבת בנסיעה **הלוך**?

פתרון: בכדי לענות על השאלה יש לעבור על התשובות המוצעות ולבדוק אם בנסיעה **הלוך באותו יום** נסעו בדיוק 30 אנשים, וכן **בנסיעה חזור** ביום שלמחרת נסעו 30 אנשים:

תשובה (1): ראשון.

לפי התרשים ביום ראשון נסעו בנסיעה הלוך 30 אנשים במחלקה השלישית, אולם מכיוון שביום שני נסעו במחלקה השלישית בנסיעה חזור 20 אנשים הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2): שני

לפי התרשים ביום שני נסעו בנסיעה הלוך 30 אנשים במחלקה השלישית, וביום שלישי נסעו במחלקה השלישית בנסיעה חזור 30 אנשים, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

11. **השאלה**: בכל נסיעה ברכבת, כל נוסע יושב על מושב אחד.

כמה מושבים **לכל הפחות** יש במחלקה הראשונה?

פתרון: מכיוון שבכל נסיעה, כל נוסע יושב על מושב אחד, הרי שעל מנת למצוא את מספר המושבים המינימלי שיש במחלקה הראשונה, יש למצוא מה היה המספר הגדול ביותר של נוסעים שנסעו במחלקה זו באחת הנסיעות, שהרי כל אחד מאותם נוסעים היה ישוב במושב כלשהו. נסרוק את התרשים, ונחפש מבחינה ויזואלית באיזה מהימים המלבנים המתארים את מספר הנוסעים במחלקה זו הם הגדולים ביותר. מספר הנוסעים המקסימלי שנסע במחלקה הראשונה הוא ביום רביעי בנסיעה חזור - 55 נוסעים, ולכן זה מספר המושבים המינימלי.

תשובה (1).

---

12. **השאלה**: בשבוע המתואר בתרשים, **ההפרש בערך מוחלט** בין מספר הנוסעים בנסיעה הלוך לבין מספר הנוסעים בנסיעה חזור באותו יום -

פתרון: נעבור על התרשים ונחשב בכל אחד מהימים, מה ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים בנסיעה הלוך למספר הנוסעים בנסיעה חזור:

<u>יום ראשון</u>: מספר הנוסעים בנסיעה הלוך ביום ראשון היה 95, מספר הנוסעים בנסיעה חזור הוא 90.
ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים הלוך למספר הנוסעים חזור הוא $5 = |95-90|$.

<u>יום שני</u>: מספר הנוסעים בנסיעה הלוך ביום שני היה 70, מספר הנוסעים בנסיעה חזור הוא 80.
ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים הלוך למספר הנוסעים חזור הוא $10 = |70-80|$.

<u>יום שלישי</u>: מספר הנוסעים בנסיעה הלוך ביום שלישי היה 85, מספר הנוסעים בנסיעה חזור הוא 100.
ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים הלוך למספר הנוסעים חזור הוא $15 = |85-100|$.

<u>יום רביעי</u>: מספר הנוסעים בנסיעה הלוך ביום רביעי היה 105, מספר הנוסעים בנסיעה חזור הוא 85.
ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים הלוך למספר הנוסעים חזור הוא $20 = |105-85|$.

<u>יום חמישי</u>: מספר הנוסעים בנסיעה הלוך ביום חמישי היה 50, מספר הנוסעים בנסיעה חזור הוא 75.
ההפרש בערך מוחלט בין מספר הנוסעים הלוך למספר הנוסעים חזור הוא $25 = |50-75|$.

מצאנו כי ההפרש הלך וגדל.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. **השאלה**: לכל זוג מספרים חיוביים a ו-b הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(a,b) = a + 2b$

נתון: x הוא מספר חיובי.

$$\frac{\$(x,\$(x,x))}{\$(\$(x,x),x)} = ?$$

פתרון: נפשט את הביטוי באמצעות הגדרת פעולת ה-$:

$$\frac{\$(x,\$(x,x))}{\$(\$(x,x),x)} = \frac{\$(x,(x+2x))}{\$((x+2x),x)} = \frac{\$(x,3x)}{\$(3x,x)} = \frac{x+2\cdot 3x}{3x+2\cdot x} = \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}$$

תשובה (4).

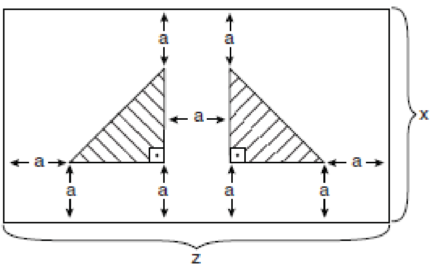
.14 **השאלה**: כמה מספרים תלת-ספרתיים יש, שבהם אם נחליף בין ספרת האחדות לספרת המאות, יתקבל אותו מספר?

פתרון: על מנת שערכו של מספר אשר החלפנו בין ספרת המאות והאחדות שלו לא ישתנה, ספרת המאות והאחדות צריכות להיות זהות זו לזו, וערכה של ספרת העשרות אינו משנה.
כלומר, כאשר ספרת העשרות שווה ל-0, ספרת המאות והאחדות יכולות להיות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ו-9.
כלומר, מצאנו כי יש 9 מספרים תלת-ספרתיים שונים שכאשר נחליף את ספרת המאות והאחדות שלהם, ערכו של המספר לא ישתנה. באותו אופן גם כאשר ספרת העשרות תהיה שווה ל-1, יהיו 9 מספרים תלת-ספרתיים שונים שכאשר נחליף את ספרת המאות והאחדות שלהם, ערך המספר יהיה זהה, וכך גם כאשר ספרת העשרות תהיה 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ו-9. כלומר בכל אחת מ-10 האפשרויות השונות שניתן למקם בספרת העשרות, יהיו 9 מספרים תלת-ספרתיים שונים שכאשר נחליף את ספרת המאות והאחדות שלהם ערכם לא ישתנה. מכאן שיש בסך הכול 90 מספרים תלת-ספרתיים שבהם החלפת ספרת האחדות בספרת המאות לא תשנה את ערך המספר $(= 10 \cdot 9)$.

תשובה (2).

.15 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מלבן שסומנו בו שני משולשים ישרי-זווית חופפים.
המרחק בין כל קדקוד מקדקודי המשולשים לצלעות המלבן הוא a,
והמרחק בין שני המשולשים גם הוא a.

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט, מה גודל השטח המקווקו?



פתרון: השטח המקווקו מורכב משטחם של שני משולשים, אשר גובהם זהה. ניתן להתייחס לשני המשולשים כאל משולש אחד, אשר שטחו שווה למכפלת אורך בסיסו, השווה לסכום בסיס של שני המשולשים, בגובהם חלקי 2. ממבט שני בסרטוט, ניתן למצוא כי אורך בסיסם המשותף של שני המשולשים שווה לאורך המלבן, שהוא z, פחות 3a, וגובהם שווה לרוחבו של המלבן, השווה ל-x, פחות 2a.

מכאן ששטח המשולש שווה ל- $\frac{(z-3a)\cdot(x-2a)}{2}$.

תשובה (2).

.16 **השאלה**: נתון: $2 \le a$

$2 < b$

איזו מהאפשרויות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית + הבנה אלגברית

נציב בכל אחת מהתשובות מספרים המקיימים את נתוני השאלה, למשל $a = 2$ ו-$b = 3$.

<u>תשובה (1)</u>: $1 \le \frac{a}{b}$. כאשר נציב כי $a = 2$ ו-$b = 3$, נקבל: $1 \le \frac{2}{3}$. מכיוון שהביטוי שקיבלנו אינו נכון, הרי שניתן לקבוע כי טענה זו אינה התשובה הנכונה, ולפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $a + b < a \cdot b$. כאשר נציב כי $a = 2$ ו-$b = 3$, נקבל: $2 + 3 < 2 \cdot 3$ ⇦ $5 < 6$. מכיוון שהביטוי שקיבלנו נכון, לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

<u>תשובה (3)</u>: $a \cdot b < a + b$. כאשר נציב כי $a = 2$ ו-$b = 3$, נקבל: $2 \cdot 3 < 2 + 3$ ⇦ $6 < 5$. מכיוון שהביטוי שקיבלנו אינו נכון, הרי שניתן לקבוע כי טענה זו אינה התשובה הנכונה, ולפסול את התשובה.

פסלנו את תשובות (1) ו-(3) ונותרנו עם תשובות (2) ו-(4). על מנת לקבוע כי תשובה (2) נכונה בהכרח יש להציב מספרים נוספים על מנת לוודא כי הביטוי נכון תמיד, או להבין את ההיגיון האלגברי העומד

מאחורי אי-השיוויון.
<u>ההיגיון האלגברי</u>: נתון כי a שווה או גדול מ-2, וכי b גדול מ-2.
נציב את הערך המינימלי האפשרי עבור a, כלומר $a=2$ באי-השיוויון הנתון, ונקבל: $2+b<2b$.
נחסר b משני האגפים, ונקבל: $2<b$. מצאנו כי אי-השיוויון מתקיים בוודאות כאשר $a=2$.
גם הצבה של ערכים הגדולים מ-2 עבור a, תיתן בהכרח אי-שיויון נכון, למשל נציב כי $a=3$, ונקבל:
$3+b<3b$. נחסר b משני האגפים, ונקבל: $3<2b$.
נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $1\frac{1}{2}<b$.
בשלב זה ניתן להסיק כי ככל שנגדיל יותר את a ילך ויקטן היחס בין שני האגפים, כך שבאגף ימין, נקבל b ובאגף ימין נקבל מספר שילך ויקטן. למעשה, ככל שנגדיל את a נקבל באגף השמאלי מספר קטן יותר.
לפי נתוני השאלה b גדול מ-2, ולפיכך כל מספר שנציב ישאיר את אי-השיוויון נכון, שכן אם b גדול מ-2 הרי שהוא גם גדול מכל המספרים הקטנים מ-2.
כמו כן, תוצאת המכפלה של מספרים השווים או הגדולים מ-2, ב-2 או במספר הגדול ממנו תיתן תמיד תוצאה הגדולה מתוצאת החיבור שלהם, הרי שהביטוי שבתשובה (2) נכון תמיד.

תשובה (2).

.17 **השאלה**: השעון של חווה ממהר: בכל 5 דקות שחולפות הוא מתקדם 6 דקות.

מרגע שכיוונה חווה את השעון שלה לשעה הנכונה, כמה זמן (בשעות) יחלוף עד שהוא יקדים בשעה שלמה?

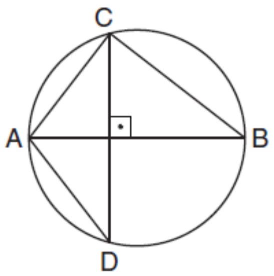
פתרון: לפי הנתונים בכל 5 דקות שחולפות מתקדם שעונה של חווה 6 דקות, ומכאן שלמעשה בכל 5 דקות ממהר שעונה של חווה בדקה אחת מעבר לזמן שעבר בפועל $\left(6-5=\right)$.

נתבקשנו למצוא כמה זמן (בשעות) יחלוף עד ששעונה של חווה ימהר בשעה שלמה, כלומר ב-60 דקות.
לשם הפתרון, ניעזר בריבוע יחסים:

זמן (בדקות)	ממהר (בדקות)
5	1
x	60

היחס בכל שורה זהה, ולכן ניתן לבנות את המשוואה: $\frac{x}{60}=\frac{5}{1}$ ⇦ $5=\frac{x}{60}$.
נכפול ב-60 את שני האגפים, ונקבל: $300=x$.
מצאנו כי הזמן שיעבור עד שהשעון ימהר ב-60 דקות הוא 300 דקות.
מכיוון שביקשו למצוא את הזמן בשעות הרי ש-300 דקות הם 5 שעות $\left(=\frac{300}{60}\right)$.

תשובה (4).



18. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם AB הוא קוטר במעגל.

נתון: $CD \perp AB$
$BC = 3$ ס״מ
$AD = 2$ ס״מ

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה אורכו של **הקוטר** AB (בס״מ)?

פתרון: נתון כי AB הוא קוטר המעגל.
זווית ACB היא זווית היקפית הנשענת על הקוטר, ומכאן שהיא שווה ל-$90°$.
מכאן ניתן לקבוע כי משולש ACB הוא משולש ישר-זווית אשר אורכו של הניצב BC הוא 3 ס״מ.
על מנת למצוא באמצעות משפט פיתגורס את אורך הקוטר AB, עלינו למצוא מה אורכו של הניצב השני, הניצב AC. על מנת לעשות זאת, עלינו למצוא קשר כלשהו בין הנתון הנוסף בשאלה, שלפיו אורכו של AD שווה ל-2 ס״מ, לבין אורכה של הצלע AC.
לשם ההסבר נסמן את נקודת החיתוך בין הקוטר AB לקטע CD ב-M.
נסמן ב-α את הזווית ההיקפית, זווית CBA, אשר נשענת על הקשת AC.
נבדוק איזה עוד זוויות היקפיות נשענות על הקשת AC: זווית ADC היא זווית היקפית נוספת הנשענת על הקשת, ומכאן שאף היא שווה ל-α.
כעת ננסה להשלים, על סמך הידע הזה, זוויות במשולשים נוספים שבסרטוט.
נתבונן במשולש CMB: המשולש הוא משולש ישר-זווית, אשר בו זווית השווה ל-α (זווית CBA), ומכאן שזווית MCB שווה ל-$(90° - \alpha)$.
זווית ACB היא זווית השווה ל-$90°$ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר), ואשר מורכבת משתי זוויות: זווית ACD וזווית MCB. אם זווית MCB שווה ל-$(90° - \alpha)$, הרי שזווית ACD המשלימה אותה ל-$90°$ שווה ל-α $[90° - (90° - \alpha) =]$.
כעת נתבונן במשולש DAC: שתיים מזוויות המשולש שוות ל-α: זווית ADC וזווית ACD, ומכאן שהמשולש שווה-שוקיים, כלומר $AD = AC$. לפי הנתון אורכה של הצלע AD הוא 2 ס״מ, ולפיכך גם אורך הצלע AC שווה ל-2 ס״מ.
מצאנו כי אורכם של שני הניצבים במשולש ישר-הזווית ACB הוא 2 ו-3 ס״מ, ולכן כעת ניתן באמצעות משפט פיתגורס למצוא את אורך היתר, שהוא למעשה הקוטר AB: $2^2 + 3^2 = (AB)^2$ ⇦ $4 + 9 = (AB)^2$ ⇦ $13 = (AB)^2$ ⇦ $AB = \sqrt{13}$.

תשובה (3).

.19 **השאלה**: בארגון מסוים 40 עובדים (גברים ונשים). במשך השנה יצאו 21 מהגברים לחופשה של חודש, ו-5 מהנשים יצאו לחופשה של 3 חודשים.

אילו עבדו כל עובדי הארגון 12 חודשים בשנה (בלי לצאת לחופשות), כמה מהם היו דרושים כדי להגיע למספר הכולל של חודשי העבודה ש-40 העובדים עבדו בפועל?

פתרון: נשאלנו מה מספר עובדי הארגון אשר דרוש שיעבדו 12 חודשים, כדי להגיע למספר הכולל של חודשי העבודה ש-40 העובדים עבדו בפועל. ראשית עלינו למצוא מה מספר חודשי העבודה שעבדו 40 העובדים בפועל לפי נתוני השאלה.
אם כל 40 הפועלים היו עובדים בפועל כל אחד 12 חודשים, הרי שמספר חודשי העבודה הכולל שהם היו עובדים היה 480 $(=40\cdot12)$. נתון כי במשך השנה יצאו 21 מהגברים לחופשה של חודש, כלומר אותם 21 גברים **לא עבדו** 21 חודשי עבודה $(=21\cdot1)$, ו-5 מהנשים יצאו לחופשה של 3 חודשים, כלומר אותן 5 נשים **לא עבדו** 15 חודשי עבודה $(=5\cdot3)$.
סך הכול העובדים אשר יצאו לחופש **לא עבדו** בסך הכול 36 חודשים $(=21+15)$, ומכאן שמספר החודשים אשר 40 העובדים עבדו בפועל הוא 444 $(=480-36)$.
מכיוון שהתשובות מציעות את מספר העובדים שהיו אמורים לעבוד 12 חודשים, כדי להגיע למספר זה, הרי שניתן בשלב זה לעבור על התשובות, ולבדוק מכפלה של מי מהתשובות ב-12 נותנת תוצאה של 444 חודשים.

<u>תשובה (1)</u>: 25. אם כל אחד מ-25 העובדים היה עובד 12 חודשים, מספר חודשי העבודה הכולל שהם היו עובדים היה 300 $(=25\cdot12)$, ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: 37. אם כל אחד מ-37 העובדים היה עובד 12 חודשים, מספר חודשי העבודה הכולל היה 444 $(=37\cdot12)$, ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>**הערה**</u>: מצאנו כי העובדים אשר יצאו לחופש **לא עבדו** בסך הכול 36 חודשים, ולכן למעשה מספר חודשי החופש שלהם הוא שווה ערך למספר חודשי העבודה של 3 עובדים $(=3\cdot12)$.
בארגון יש 40 עובדים. מספר חודשי החופש שלקחו עובדי הארגון שווה ערך למספר חודשי העבודה של 3 עובדים, ולכן דרושים 37 עובדים אשר יעבדו 12 חודשים כדי להגיע לאותו מספר חודשי עבודה $(=40-3)$.

תשובה (2).

.20 **השאלה**: m ו-n הם מספרים עוקבים.

$$x = \frac{|m| - |n|}{|m + n|}$$

x **אינו** יכול להיות -

פתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית

נציב שני מספרים עוקבים, למשל $m = 1$ ו $n = 0$, ונמצא כי ערך הביטוי המתקבל הוא 1 $\left(\frac{|m| - |n|}{|m + n|} = \frac{|1| - |0|}{|1 + 0|} = \frac{1}{1} = \right)$. מצאנו כי ניתן לפסול את תשובה (1).

נציב את זוג המספרים העוקבים הבא: $m = 2$ ו- $n = 1$, ונמצא כי ערך הביטוי המתקבל הוא $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{|m| - |n|}{|m + n|} = \frac{|2| - |1|}{|2 + 1|} = \frac{1}{3} = \right)$, על מנת להגיע לערך המופיע בתשובה (3) נציב כי $m = 1$ ו- $n = 2$, ונקבל כי ערך הביטוי המתקבל הוא $-\frac{1}{3}$ $\left(\frac{|m| - |n|}{|m + n|} = \frac{|1| - |2|}{|1 + 2|} = \frac{-1}{3} = \right)$.

על מנת לפסול את תשובה (4) אשר ערכה שלילי, נציב מראש את הזוג הבא כך ש- $m < n$, כלומר נציב כי $m = 2$ ו- $n = 3$, ונקבל כי ערך הביטוי המתקבל הוא $-\frac{1}{5}$ $\left(\frac{|m| - |n|}{|m + n|} = \frac{|2| - |3|}{|2 + 3|} = \frac{-1}{5} = \right)$.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את התשובה הנותרת, תשובה (2).

דרך ב': הבנה אלגברית

בביטוי שלפנינו, מונה השבר הוא ההפרש בין שני מספרים עוקבים, והמכנה שלו הוא סכומם בערך מוחלט.
ההפרש בין שני מספרים עוקבים שווה תמיד ל-1 או ל-(1-).
מכיוון שבכל שני מספרים עוקבים, אחד המספרים יהיה זוגי והאחר אי-זוגי, הרי שסכומם של שני מספרים עוקבים הוא בהכרח אי-זוגי. מכאן שלא ניתן לקבל את הביטוי המוצע בתשובה (2).

תשובה (2).