מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(4)	(4)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(4)	(1)	(4)	(2)	(3)	(1)	(2)	(4)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-15)

1. **השאלה**: המרחק בין העיר א׳ לעיר ב׳ הוא 60 קילומטר. יוסי נסע מהעיר א׳ לעיר ב׳ במהירות קבועה של 60 קמ״ש. לאחר שעבר בדיוק מחצית מהדרך, הסתובב וחזר מיד לעיר א׳ באותה מהירות.

כמה זמן (בשעות) ארכה נסיעתו של יוסי?

פתרון: נוסחת תנועה:

זוהי שאלת תנועה, ובה נשאלנו כמה זמן ארכה נסיעתו של יוסי.

נוסחת התנועה היא: דרך = זמן·מהירות, ומכאן ש: $\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$.

נתון כי מהירותו של יוסי היא 60 קמ״ש, ולכן על מנת לדעת כמה זמן ארכה נסיעתו עלינו למצוא מה המרחק שיוסי עבר.

נתון כי בדרך הלוך, יוסי נסע לאורך מחצית מהדרך מהעיר א׳ לעיר ב׳.

המרחק בין עיר א׳ לעיר ב׳ הוא 60 קילומטרים, ומכאן שבדרך הלוך נסע יוסי 30 קילומטרים $\left(=\frac{60}{2}\right)$.

נתון כי בדיוק במחצית הדרך, כלומר לאחר שעבר 30 ק״מ, יוסי הסתובב וחזר לעיר א׳ באותה דרך, ולכן גם בדרך חזרה לעיר א׳ נסע יוסי 30 ק״מ.

בסך הכול נסע יוסי 60 קילומטרים $(=30+30)$.

כאמור, מהירות של יוסי לאורך כל הנסיעה הייתה 60 קמ״ש, ומכאן שנסיעתו של יוסי ארכה שעה אחת $\left(=\frac{60}{60}\right)$.

תשובה (1).

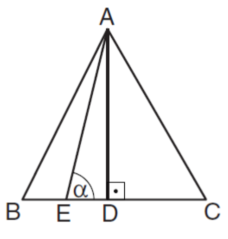
---

2. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש שווה צלעות ABC.

AD הוא גובה לצלע BC.

AE חוצה את הזווית $\angle BAD$.

$\alpha = ?$



פתרון: על פי הנתון משולש ABC הוא משולש שווה צלעות. כל זוויותיו של משולש שווה צלעות שוות ל-$60°$, ומכאן שבמשולש ABC זווית $\angle BAC$ שווה ל-$60°$.

נתון כי AD הוא גובה לצלע BC. במשולש שווה צלעות הגובה הוא גם תיכון וגם חוצה זווית, ולכן AD חוצה את הזווית $\angle BAC$. מכאן ש: $\angle BAD = \angle DAC = 30°$ $\left(=\frac{60°}{2}\right)$.

כמו כן, ידוע כי AE חוצה את הזווית $\angle BAD$ ומכאן ש: $\angle EAD = \angle BAE = 15°$ $\left(=\frac{30°}{2}\right)$.

נתבונן על משולש EAD: במשולש זה יש 2 זוויות ידועות: זווית $\angle EAD$, אשר מצאנו שהיא שווה

ל-$15°$, וזווית $\angle ADE$, הצמודה לזווית הישרה $\angle ADC$, ומכאן שאף היא שווה ל-$90°$.
סכום זוויות בכל משולש הוא $180°$, ומכאן: $15° + 90° + \alpha = 180°$ ⇐ $105° + \alpha = 180°$.
נחסר $105°$ משני צדי המשוואה, ונקבל: $\alpha = 75°$.

תשובה (2).

---

3. **השאלה**: איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר?

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות ונפשט את הביטוי שמופיע בכל תשובה:

<u>תשובה (1)</u>: $(-1)^{27}$. כאשר מעלים מספר שלילי בחזקה אי-זוגית התוצאה תהיה שלילית, ומכאן שערכו המספרי של הביטוי הוא 1-.

<u>תשובה (2)</u>: 1^{-2}. כאשר הבסיס הוא 1, תוצאת התרגיל שווה תמיד ל-1 בלי כל קשר לחזקה שבה העלינו את המספר, ומכאן שערכו של הביטוי בתשובה זו שווה ל-1. מכיוון שהביטוי שהתקבל גדול מהביטוי שבתשובה (1), הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 1^{-25}. כאמור בהסבר לתשובה (2), 1 בחזקת כל מספר שווה ל-1, ומכאן שערכו של הביטוי בתשובה זו שווה אף הוא ל-1. ערך זה גדול מהערך שהתקבל בתשובה (1), ולכן התשובה נפסלת.

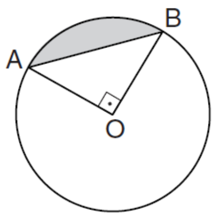
<u>תשובה (4)</u>: $(-1)^4$. כאשר מעלים מספר שלילי בחזקה זוגית התוצאה תהיה חיובית, ומכאן שערכו המספרי של הביטוי הוא 1, ולכן התשובה נפסלת.

מצאנו כי הביטוי שערכו הוא הקטן ביותר הוא הביטוי בתשובה (1).

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו 2 ס״מ.



על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ״ר)?

פתרון: השטח הכהה שעלינו לחשב אינו צורה גיאומטרית מוכרת, ולפיכך עלינו לחשב את גודלו על ידי חיסור שטחים.
השטח הכהה שווה לחיסור שטח המשולש AOB משטח הגזרה AOB.
<u>שטח הגזרה</u>: בחישוב שטח גזרה, החלק היחסי שמהווה הזווית המרכזית שיוצרת את הגזרה מתוך $360°$ שווה לחלק היחסי של שטח הגזרה מתוך שטח המעגל. הזווית המרכזית של הגזרה שווה ל-$90°$, שהיא $\frac{1}{4}$ מ-$360°$ $\left(\frac{90°}{360°} = \right)$, ומכאן שהגזרה מהווה $\frac{1}{4}$ משטח המעגל.

שטח מעגל שווה ל- πr^2. מכיוון שאורכו של רדיוס המעגל הוא 2 ס״מ, הרי ששטח המעגל שווה ל- 4π $\left(2^2 \cdot \pi =\right)$, ושטח הגזרה המהווה $\frac{1}{4}$ משטח המעגל, שווה ל- π סמ״ר $\left(\frac{1}{4} \cdot 4\pi =\right)$.

<u>שטח המשולש</u>: נתון כי זווית $\angle AOB$ שווה ל-$90°$, כלומר משולש AOB הוא משולש ישר זווית. הניצבים במשולש AOB, הצלעות AO ו-BO הם רדיוסים במעגל, ומכאן שמשולש AOB הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים. שטח משולש ישר-זווית שווה למחצית מכפלת ניצביו, ומכאן ששטח המשולש שווה ל-2 סמ״ר $\left(\frac{2 \cdot 2}{2} = \right)$.

מצאנו כי שטח הגזרה שווה ל- π סמ״ר, וכי שטח המשולש שווה ל-2 סמ״ר, ומכאן שהשטח הכהה שווה ל-$(\pi - 2)$ סמ״ר.

תשובה (2).

---

5. **השאלה**: נתון: $a=\frac{1}{1-b^2}$, $b\neq\pm1$

$a\cdot(1+b)=?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פתרון אלגברי

כאשר מתבוננים בתשובות ניתן להבחין שהן אינן כוללות את המשתנה a. מכאן עלינו להסיק כי עלינו 'להיפטר' מ-a, כלומר לחלץ את a מהמשוואה הנתונה, ולבטא אותו בעזרת b, על מנת שנוכל להציב ערך זה בביטוי עליו נשאלנו. מכיוון שבמשוואה הנתונה a מבוטא בעזרת b, ניתן להציב אותו בביטוי עליו נשאלנו.

נציב $a=\frac{1}{1-b^2}$, ונקבל: $\frac{1}{1-b^2}\cdot(1+b)$ ⇦ $\frac{(1+b)}{(1-b^2)}$.

נפשט את המכנה בעזרת נוסחת הכפל המקוצרת השלישית, ונקבל: $\frac{(1+b)}{(1-b)(1+b)}$ ⇦ $\frac{1}{1-b}$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

לפי נתוני השאלה יש קשר בין a ו-b שמבוטא באמצעות המשוואה הנתונה.
נציב מספר במקום b, ונמצא את ערכו של הנעלם a.

לשם הנוחות נציב $b=2$, ונקבל: $a=\frac{1}{1-2^2}$ ⇦ $a=\frac{1}{1-4}$ ⇦ $a=-\frac{1}{3}$.

נציב $b=2$ ו- $a=-\frac{1}{3}$ בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $-\frac{1}{3}\cdot(1+2)$ ⇦ $-\frac{1}{3}\cdot3$ ⇦ -1 .

מצאנו כי כאשר $b=2$ ו- $a=-\frac{1}{3}$ ערך הביטוי הוא 1-, כעת נעבור על התשובות המוצעות ונפסול כל תשובה שערכה שונה מערך זה:

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{1}{b}$. נציב $b=2$, ונקבל: $\frac{1}{2}$. הביטוי שהתקבל שונה מ--1 , ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{1}{1-b}$. נציב $b=2$, ונקבל: $\frac{1}{1-2}$ ⇦ $\frac{1}{-1}$ ⇦ -1 . הביטוי שהתקבל שווה ל--1 , ולכן התשובה אינה נפסלת בשלב זה.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{b}{1+b}$. נציב $b=2$, ונקבל: $\frac{2}{1+2}$ ⇦ $\frac{2}{3}$. הביטוי שהתקבל שונה מ--1 , ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{b}{1+b^2}$. נציב $b=2$, ונקבל: $\frac{2}{1+2^2}$ ⇦ $\frac{2}{1+4}$ ⇦ $\frac{2}{5}$. הביטוי שהתקבל שונה מ--1 ולכן התשובה נפסלת.

מכיוון שפסלנו באמצעות ההצבה 3 תשובות, הרי שהתשובה הנותרת, תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

6. **השאלה**: A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות בין 0 ל-9.
נתון: המספר התלת-ספרתי ABC מתחלק ב-3 ללא שארית.
$$A+B=10$$
C יכולה לייצג את הספרה -

פתרון: סכום ספרותיו של כל מספר אשר מתחלק ב-3 מתחלק ב-3 ללא שארית.
סכום הספרות של המספר התלת-ספרתי ABC הוא $\left(A+B+C\right)$. נתון כי $A+B=10$, ומכאן שסכום ספרותיו של המספר ABC שווה ל- $\left(10+C\right)$, ומכאן שהאות C צריכה לייצג ספרה אשר תוצאת הסכום שלה עם 10 הוא מספר אשר מתחלק ב-3. נעבור על התשובות המוצעות ונחפש ספרה כזו. הספרה 2 בתשובה (2) היא הספרה היחידה מבין הספרות המוצעות אשר סכומה יחד עם 10 נותן מספר אשר מתחלק ב-3, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

7. **השאלה**: שטח הפנים של קובייה הוא x סמ״ר.

מה אורך מקצוע הקובייה (בס״מ)?
פתרון: נסמן את מקצוע הקובייה ב-a. שטח הפנים של קובייה שווה לסכום שטחי כל הפאות שלה.
בקובייה כל המקצועות שווים, ולכן פאות הקובייה הן 6 ריבועים זהים, אשר צלע כל אחד מהם היא a.
שטח כל פאה שווה ל- a^2, ובסך הכול שטח הפנים של הקובייה שווה ל- $6a^2$.
נתון כי שטח הפנים של הקובייה שווה ל-x, ומכאן ש: $6a^2=x$.
נחלק את שני אגפי המשוואה ב-6, ונקבל: $a^2=\frac{x}{6}$.
נוציא שורש ריבועי משני אגפי המשוואה, ונקבל: $a=\sqrt{\frac{x}{6}}$.

תשובה (1).

---

8. **השאלה**: נתון: a שווה ל-40% מ-b.

b שווה ל-_____ מ-a.

פתרון: __דרך א'__: פישוט אלגברי
נתון כי a שווה ל-40% מ-b, ומכאן ש: $a=\frac{40}{100}\cdot b$.

נשאלנו על b ולכן נבודד את b מתוך המשוואה שקיבלנו:

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-100, ונקבל: $100a=40b$.
נחלק ב-40 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $b=\frac{100a}{40} \Leftarrow b=\frac{10}{4}\cdot a \Leftarrow b=\frac{5}{2}a$.
מצאנו כי b גדול פי 2.5 מ-a, כלומר שווה ל-250% מ-a.

__דרך ב'__: הצבת דוגמה מספרית

לא נתבקשנו למצוא את ערכם של a או b, אלא רק את היחס ביניהם, ולכן נוכל לפתור את השאלה באמצעות הצבת דוגמה מספרית.
לפי הנתון b הוא השלם ולכן נציב: $b=100$. a שווה ל-40% מ-b, ומכאן ש-40% מ-b, שווים ל-40.
לסיכום, הצבנו ש- $b=100$ ומצאנו ש- $a=40$. כעת נמצא לכמה אחוזים שווה b מ-a.
לשם כך, נשתמש בריבוע יחסים.

לפי השאלה, a הוא השלם ולכן a שווה ל-100%.

מספר	אחוזים
40	100
100	X

היחס בכל שורה זהה, ולכן ניתן לבנות את המשוואה: $\frac{x}{100} = \frac{100}{40}$.

נכפול ב-100 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $x = \frac{100 \cdot 10\cancel{0}}{4\cancel{0}}$ ⇦ $x = \frac{1000}{4}$ ⇦ $x = 250\%$.

תשובה (4).

---

9. **השאלה**: לדני 40 גולות.

$\frac{1}{n}$ מהגולות של דני שקופות.

$\frac{1}{k}$ מהגולות **השקופות** של דני קטנות.

n ו-k מספרים שלמים וחיוביים.

$n \cdot k$ יכול להיות שווה ל -

פתרון: מספר הגולות השקופות של דני, ומספר הגולות השקופות והקטנות של דני, צריך להיות מספר שלם. מכאן שעלינו למצוא מספרים אפשריים ל-n ול-k שעבורם מספר גולות אלה יהיה שלם.
נבדוק את התשובות המוצעות, ועבור כל תשובה נחפש מכפלות של שני מספרים שלמים אפשריים עבור n ו-k, ונבדוק האם עבור מספרים אלה, מספר הגולות השקופות והשקופות הקטנות של דני, הם אכן מספרים שלמים:

תשובה (1): 60. ניתן לפרק את המספר 60 למכפלות של מספר זוגות מספרים: 15 ו-4; 6 ו-10; 12 ו-5; 3 ו-20; 2 ו-30 ו-60 ו-1. אם נבדוק עבור כל אחד מזוגות המספרים הללו, האם יתכן שמספר הגולות השקופות של דני, וגם מספר הגולות השקופות והקטנות של דני, נמצא שעבור אף אחד מזוגות המספרים לא נקבל מספרים שלמים.

למשל אם נניח ש- $n = 4$ ו- $k = 15$, הרי ש- $\frac{1}{4}$ מהגולות של דני הן שקופות כלומר 10 $\left(\frac{1}{4} \cdot 40 =\right)$, ו- $\frac{1}{15}$ מתוך 10 הגולות השקופות של דני צריכות להיות קטנות.

מכיוון שקיבלנו מספר גולות שאינו שלם, הרי שמצב זה אינו אפשרי. מכיוון שזה המצב גם ביתר זוגות המספרים השלמים אשר מכפלתם שווה ל-60, התשובה נפסלת.

תשובה (2): 15. המספר 15 הוא כפולה של זוגות המספרים 5 ו-3 ו-15 ו-1. גם במקרה זה שימוש בזוגות מספרים אלו אינו מביא לכך שמספר הגולות השקופות של דני, ומספר הגולות השקופות והקטנות של דני, יהיה שלם, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): 6. המספר 6 הוא כפולה של זוגות המספרים 2 ו-3 ו-6 ו-1. מכיוון שזוגות מספרים אלו אינם מאפשרים חלוקה של 40 למספרים שלמים, הרי שגם זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (4): 4. המספר 4 הוא כפולה של זוגות המספרים 1 ו-4 או 2 ו-2. אם נניח כי $n = 2$ אז מספר הגולות השקופות של דני שווה ל-20 $\left(\frac{1}{2} \cdot 40 =\right)$. אם $n = 2$ אז $k = 2$, ומכאן ש- $\frac{1}{2}$ מ-20 הגולות השקופות של דני קטנות, כלומר לדני יש 10 גולות שקופות וקטנות $\left(\frac{1}{2} \cdot 20 =\right)$. מכיוון שקיבלנו כי מספר הגולות הקטנות ומספר הגולות הקטנות והשקופות הם מספרים שלמים הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

<u>הערה</u>: לרוב ככל שהמספר גדול יותר, יהיו מספר גדול יותר של זוגות מספרים אשר מכפלתם שווה למספר, ולכן, בשאלה כזו, עדיף לבדוק קודם כל את התשובה בעלת הערך הקטן ביותר, כלומר תשובה (4).

---

10. **השאלה**: בכיתה יש 20 ילדים. שמותיהם של 12 ילדים מתחילים באות ד׳, ושמותיהם של 5 ילדים מסתיימים באות ד׳. שמותיהם של 3 ילדים מתחילים וגם מסתיימים באות ד׳.

מספר הילדים בכיתה ששמותיהם **לא** מתחילים ב-ד׳ **ולא** מסתיימים ב-ד׳ הוא ______.

פתרון: נתון כי שמותיהם של 12 תלמידים **מתחילים** באות ד׳, וכי שמותיהם של 3 ילדים **מתחילים ומסתיימים** באות ד׳.
מכאן שיש בכיתה 9 תלמידים ששמותיהם **מתחילים באות ד׳, אך לא מסתיימים** באות ד׳ $(=3-12)$.
בנוסף, נתון כי שמותיהם של 5 תלמידים **מסתיימים** באות ד׳.
מכיוון שלפי הנתון שמותיהם של 3 ילדים **מתחילים ומסתיימים** באות ד׳, הרי ששמותיהם של 2 תלמידים **מסתיימים באות ד׳ אך ולא מתחילים בה** $(=3-5)$.

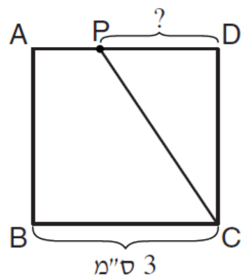
מצאנו כי בכיתה יש:
- 9 תלמידים ששמותיהם מתחילים באות ד׳ **ולא** מסתיימים באות ד׳;
- 2 תלמידים ששמותיהם מסתיימים באות ד׳ **ולא** מתחילים באות ד׳;
- 3 תלמידים ששמותיהם מתחילים **וגם** מסתיימים באות ד׳.

מכיוון שבכיתה יש 20 תלמידים בסך הכול, הרי ששמותיהם של 6 מהתלמידים **לא** מתחיל **ולא** מסתיים באות ד׳ $(=3-2-9-20)$.

תשובה (2).

---

11. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ריבוע ABCD שאורך צלעו 3 ס״מ.
P היא נקודה על הצלע AD.



נתון: $\frac{1}{2} = \frac{\text{שטח המשולש PCD}}{\text{שטח הטרפז ABCP}}$

מה אורך הקטע PD (בס״מ)?

פתרון: <u>דרך א׳</u>: בניית משוואה

נתון יחס בין שטח המשולש PCD לבין שטח הטרפז ABCP. כדי למצוא את אורך הצלע PD, נבטא את שטחן של כל אחת מהצורות בעזרת הצלע PD ונשתמש ביחס הנתון כדי ליצור משוואה.

<u>שטח המשולש PCD</u>:
שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת ניצביו. הניצב CD הוא צלע בריבוע ABCD אשר אורך צלעו היא 3 ס״מ, ומכאן ש- $CD = 3$, ושטח משולש PCD שווה ל- $\frac{3 \cdot PD}{2}$.

<u>שטח הטרפז ABCP</u>:
שטח טרפז שווה למכפלת גובהו בסכום בסיסיו לחלק ב-2. גובהו של הטרפז הוא למעשה צלע הריבוע ABCD, אשר שווה ל-3 ס״מ, והבסיס הארוך של הטרפז, הצלע BC, שווה גם ל-3 ס״מ. אורכו של הבסיס הקצר, הצלע AP, שווה להפרש בין צלע הריבוע AD, שאורכה שווה ל-3 ס״מ, לבין הצלע PD. מכאן ש: $AP = 3 - PD$. שטח הטרפז ABCP שווה ל- $\frac{[(3-PD)+3] \cdot 3}{2} \Leftarrow \frac{(6-PD) \cdot 3}{2} \Leftarrow \frac{18 - 3 \cdot PD}{2}$.

לפי הנתון, שטח הטרפז גדול פי 2 משטח המשולש ומכאן ש: $\frac{18-3\cdot PD}{2}=2\cdot\frac{3\cdot PD}{2}$.

נכפול ב-2 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $18-3\cdot PD=6\cdot PD$.

נחבר $3PD$ לשני צדי המשוואה, ונקבל: $18=9PD$.

נחלק ב-9 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $PD=2$.

<u>דרך ב'</u>: יחסים

אורכה של צלע הריבוע הוא 3 ס"מ, ומכאן ששטח הריבוע הוא 9 סמ"ר.
מכיוון שהריבוע מחולק לשתי צורות: משולש וטרפז אשר יחס השטחים שלהן הוא 1:2, ניתן לקבוע כי שטח המשולש מהווה $\frac{1}{3}$ משטח הריבוע, כלומר שווה ל-3 סמ"ר.

שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת ניצביו. הניצב CD הוא צלע בריבוע ABCD אשר אורך צלעו היא 3 ס"מ, ומכאן ש- $CD=3$, ושטח משולש PCD שווה ל- $\frac{3\cdot PD}{2}$. מכיוון שמצאנו כי שטח המשולש הוא 3 סמ"ר, הרי שניתן לבנות את המשוואה: $3=\frac{3\cdot PD}{2}$.

נכפול ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $3\cdot PD=6 \Leftarrow PD=2$

תשובה (2).

---

12. **השאלה**: נתון: a ו-b הם מספרים שלמים ועוקבים, $a<b$.

$$a\cdot b=b$$

$$b^2<a^2$$

$$a=?$$

פתרון: <u>דרך א'</u>: בדיקת תשובות

מכיוון שנשאלנו מה ערכו של a, נציב במקום a את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 1. a ו-b הם מספרים עוקבים, כאשר נתון כי b גדול מ-a, ומכאן שאם $a=1$ אז $b=2$.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $a\cdot b=b$, ונקבל: $1\cdot 2=2 \Leftarrow 2=2$.
מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, נעבור לבדוק את הנתון הנוסף.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $b^2<a^2$, ונקבל: $2^2<1^2 \Leftarrow 4<1$.
מכיוון שקיבלנו אי-שוויון שאינו נכון, הרי שניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: 2-. a ו-b הם מספרים עוקבים, כאשר נתון כי b גדול מ-a, ומכאן שאם $a=-2$ אז $b=-1$.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $a\cdot b=b$, ונקבל: $(-2)\cdot(-1)=-1 \Leftarrow$
$2=-1$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: 0. אם a שווה ל-0, הרי ש-b אשר הוא המספר העוקב הגדול ממנו שווה ל-1.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $a\cdot b=b$, ונקבל: $0\cdot 1=1 \Leftarrow 0=1$.
מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, הרי שניתן כבר בשלב זה לפסול את התשובה.

<u>תשובה (4)</u>: 1-. אם a שווה ל-1-, הרי ש-b אשר הוא המספר העוקב הגדול ממנו שווה ל-0.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $a\cdot b=b$, ונקבל: $(-1)\cdot 0=0 \Leftarrow 0=0$.
מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, נעבור לבדוק את הנתון הנוסף.
נציב את הערכים שהתקבלו עבור a ו-b בנתון $b^2<a^2$, ונקבל: $0^2<(-1)^2 \Leftarrow 0<1$.
האי-שוויון שהתקבל נכון ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב׳</u>: פתרון אלגברי

נחסר b משני צדי המשוואה $a \cdot b = b$, ונקבל: $ab - b = 0$.
נוציא b גורם משותף, ונקבל: $b(a-1) = 0$.

כאשר נתונה מכפלה השווה ל-0 יש להשוות כל אחד מגורמי המכפלה ל-0.
א) $b = 0$ ואז a שהוא העוקב הקטן ממנו שווה ל- (-1).
ב) $(a-1) = 0$, כלומר $a = 1$ ואז b שהוא העוקב הגדול ממנו שווה ל-2.

נבדוק איזה מהמצבים מקיים את אי-השוויון הנתון: $b^2 < a^2$.
א) כאשר b שווה ל-0 ו-a שווה ל- (-1), נקבל: $0^2 < (-1)^2 \Leftrightarrow 0<1$. מכיוון שאי-השוויון שהתקבל נכון הרי שניתן לקבוע כי $a = -1$.

לשם השלמת ההסבר נבדוק את המקרה השני אשר לפיו a שווה ל-1 ו-b שווה ל-2, על ידי הצבת המספרים בנתון $b^2 < a^2$, ונקבל: $2^2 < 1^2 \Leftrightarrow 4<1$. קיבלנו אי-שוויון שאינו נכון, ולכן פתרון זה אינו אפשרי.

תשובה (4).

---

13. **השאלה**: מספר מסוים של קופסאות, מקצתן אדומות ומקצתן ירוקות, עומדות בשורה. ידוע כי בשורה 10 קופסאות ירוקות, וכי שתי הקופסאות המצויות בשני קצות השורה הן ירוקות. כמו כן ידוע כי בין כל שתי קופסאות ירוקות עומדת לפחות קופסה אדומה אחת, אך לא יותר מ-5 קופסאות אדומות.

לפיכך, התחום המדויק שבו יכול להימצא מספר הקופסאות **הכולל** בשורה הוא בין ______ ל-______.

פתרון: נשאלנו מה התחום שבו יכול להימצא מספר הקופסאות הכולל, כלומר זו שאלת טווחים, ולכן עלינו לחשב את מספר הקופסאות המינימלי והמקסימלי בשורה.

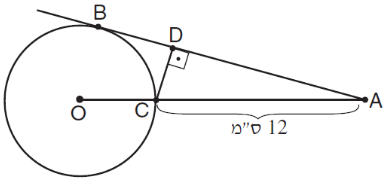
<u>מינימום</u>: נתון כי בשורה יש 10 קופסאות ירוקות, ובין כל שתי קופסאות ירוקות יש קופסה אדומה אחת לפחות. מספרן המינימלי של קופסאות יתקבל כאשר בין כל שתי קופסאות ירוקות תהיה קופסה אדומה אחת בלבד. אם נשים בין כל שתי קופסאות ירוקות קופסה אדומה אחת, נמצא כי יש לכל הפחות 9 קופסאות אדומות. מכאן שמספר הקופסאות הכולל המינימלי בשורה הוא 19 קופסאות $(=9+10)$.

מכיוון שבתשובות (2) ו-(4) המספר המינימלי הוא 20, הרי שניתן לפסול אותן בשלב זה.

<u>מקסימום</u>: המספר המקסימלי של קופסאות יתקבל כאשר בין כל שתי קופסאות ירוקות יהיו 5 קופסאות אדומות. כאמור, יש 10 קופסאות ירוקות וביניהן 9 ׳רווחים׳. אם נמקם בכל רווח 5 קופסאות אדומות, יהיו 45 קופסאות אדומות $(=9 \cdot 5)$. מכאן שמצאנו כי לכל היותר יש 55 קופסאות בשורה $(=45+10)$.

תשובה (1).

.14 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו 3 ס״מ.
הקטע AO חותך את המעגל בנקודה C.
AB משיק למעגל בנקודה B.



על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,

$$\frac{BD}{AD} = ?$$

פתרון: רדיוס למשיק יוצר זווית בת 90° בנקודת ההשקה, ולכן נעביר רדיוס ממרכז המעגל O לנקודת ההשקה B.
זווית OBA היא בת 90°, כלומר קיבלנו משולש ישר זווית, משולש ABO, אשר ניצבו OB הוא גם רדיוס המעגל, ולכן אורכו שווה ל-3 ס״מ.
לפי נתוני הסרטוט, משולש ACD, אף הוא משולש ישר זווית, ולו זווית משותפת עם המשולש ABO, זווית $\angle DAC$. לשני המשולשים 2 זוגות של זווית שוות: הזוויות הישרות, זוויות $\angle CDA$ ו- $\angle OBA$, והזווית המשותפת, זווית $\angle DAC$, ומכאן שהמשולשים ABO ו-ACD דומים זה לזה.
במשולשים דומים קיים יחס קבוע בין כל זוג צלעות מתאימות, ומכאן ש: $\frac{AB}{AD} = \frac{AO}{AC}$.
הצלע AB מורכבת מהצלע AD והקטע BD, והצלע AO מהצלע AC ו-OC, ומכאן ש: $\frac{AD + BD}{AD} = \frac{AC + OC}{AC}$.

הצלע OC היא רדיוס במעגל ומכאן שאורכה שווה ל-3 ס״מ. בנוסף נתון כי אורך הצלע AC שווה ל-12 ס״מ.
נציב את אורכי הצלעות במשוואה שקיבלנו, ונקבל: $\frac{AD + BD}{AD} = \frac{12 + 3}{12}$ ⇦ $\frac{AD + BD}{AD} = \frac{15}{12}$.
נכפול ב-12AD את שני צדי המשוואה, ונקבל: $15 \cdot AD = 12 \cdot (AD + BD)$ ⇦ $15AD = 12AD + 12BD$.
נחסר 12AD משני צדי המשוואה, ונקבל: $3AD = 12BD$.
נחלק ב-3 את שני האגפים, ונקבל: $AD = 4BD$.
כעת נציב נתון זה ביחס המבוקש $\frac{BD}{AD}$, ונקבל כי גודלו של הביטוי המבוקש הוא $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{BD}{AD} = \frac{BD}{4BD} = \right)$

תשובה (4).

.15 **השאלה**: במדינה מסוימת יש מטבעות בשווי אגורה אחת, 10 אגורות ו-25 אגורות.

בכמה דרכים שונות אפשר לשלם סכום של 40 אגורות במטבעות האלה?

פתרון: ספירה ידנית

נשאלנו בכמה דרכים <u>שונות</u> ניתן לשלם סכום של 40 אגורות, ומכאן שזו שאלת צירופים.
מכיוון שמספר האפשרויות המוצע בתשובות הוא קטן באופן יחסי, נשתמש בספירה ידנית על מנת למצוא את מספר הדרכים השונות שבהן ניתן לשלם סכום של 40 אגורות. חשוב מאוד להקפיד על עבודה מסודרת על מנת שלא לפספס אף אפשרות:
ראשית, נמצא את המטבעות שניתן למצוא באמצעותם בלבד את הסכום.
<u>אגורה אחת בלבד</u>: 40 אגורות ניתן לשלם באמצעות 40 מטבעות של אגורה אחת $(40 \cdot 1 =)$. סך הכול יש **אפשרות אחת** לתשלום באמצעות מטבעות של אגורה אחת בלבד.
<u>10 אגורות בלבד</u>: 40 אגורות ניתן לשלם באמצעות 4 מטבעות של 10 אגורות $(4 \cdot 10 =)$. סך הכול יש **אפשרות אחת** לתשלום באמצעות מטבעות של 10 אגורות בלבד.
לא ניתן לשלם סכום של 40 אגורות באמצעות מטבעות של 25 אגורות בלבד ולכן כעת נבדוק את השילובים השונים בין סוגי המטבעות. נתחיל בבדיקה של אפשרויות התשלום באמצעות שני סוגי מטבעות:
<u>10 אגורות ואגורה אחת</u>: ניתן לשלם סכום של 40 אגורות באמצעות 3 מטבעות של 10 אגורות ו-10 מטבעות של אגורה אחת $(3 \cdot 10 + 10 \cdot 1 =)$, או באמצעות 2 מטבעות של 10 אגורות ו-20 מטבעות של אגורה אחת $(2 \cdot 10 + 20 \cdot 1 =)$, או באמצעות מטבע אחד של 10 אגורות ו-30 מטבעות של אגורה אחת

$\left(1\cdot 10+30\cdot 1=\right)$. סך הכול יש **שלוש אפשרויות** לתשלום באמצעות מטבעות של 10 אגורות ואגורה אחת.

<u>25 אגורות ואגורה אחת</u>: ניתן לשלם סכום של 40 אגורות באמצעות מטבע אחד של 25 אגורות ו-15 מטבעות של אגורה אחת $\left(1\cdot 25+15\cdot 1=\right)$. סך הכול יש **אפשרות אחת** לתשלום באמצעות מטבעות של 25 אגורות ואגורה אחת.

כעת נבדוק מה מספר האפשרויות לשלם באמצעות שילוב כל שלושת המטבעות.

<u>כל סוגי המטבעות</u>: ניתן לשלם סכום של 40 אגורות באמצעות מטבע אחד של 25 אגורות, מטבע אחד של 10 אגורות ו-5 מטבעות של אגורה אחת $\left(1\cdot 25+1\cdot 10+5\cdot 1=\right)$. סך הכול יש **אפשרות אחת** לתשלום באמצעות כל שלושת המטבעות.

לסיכום, מצאנו שיש אפשרות **אחת** לשלם סכום של 40 אגורות בעזרת מטבעות של אגורה אחת בלבד, אפשרות **אחת** לשלם בעזרת מטבעות של 10 אגורות בלבד, **שלוש** אפשרויות לשלם בעזרת מטבעות של 10 אגורות ואגורה אחת, אפשרות **אחת** לשלם באמצעות מטבעות של 25 אגורות ואגורה אחת, ואפשרות **אחת** לשלם באמצעות כל סוגי המטבעות.

מצאנו כי יש 7 אפשרויות לשלם סכום של 40 אגורות בעזרת מטבעות של 25 אגורות, 10 אגורות ואגורה אחת $\left(1+1+3+1+1=\right)$.

תשובה (2).

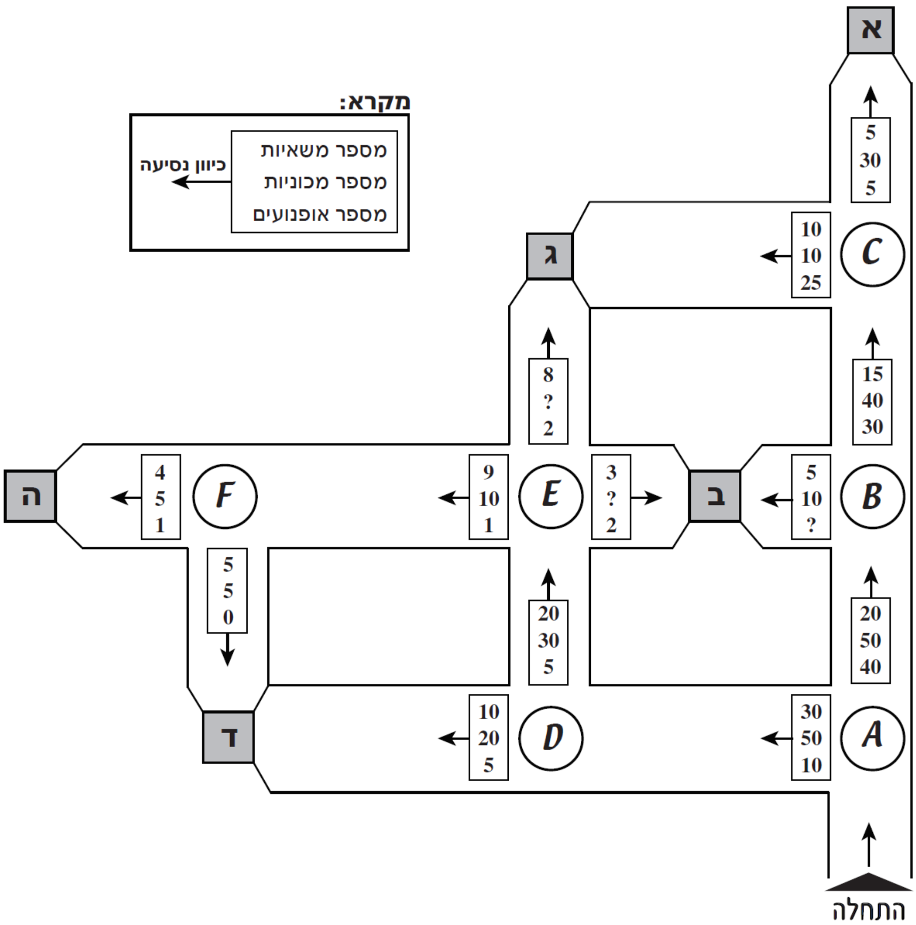
הסקה מתרשים (שאלות 20-16)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על חמש השאלות שאחריו.

בתרשים מוצגת מפת כבישים ובה מתוארת תנועתם של כלי רכב משלושה סוגים - משאיות, מכוניות ואופנועים - במשך פרק זמן מסוים.

האותיות A עד F שבתרשים מציינות צמתים, והאותיות א עד ה - יעדי נסיעה.
כל כלי רכב התחיל את נסיעתו בנקודה המסומנת "התחלה" בתחילת פרק הזמן המתואר, ונסע ללא עצירות ליעד אחד בלבד. כאשר כלי רכב הגיע ליעד, הוא נשאר בו ולא המשיך בנסיעה.
בתוך כל מלבן שעל קטע כביש במפה רשום מספר כלי הרכב מכל סוג שעברו בקטע כביש זה (ראו מקרא), וסימן שאלה במלבן מייצג נתון חסר. החץ היוצא מכל מלבן מציין את כיוון הנסיעה של כלי הרכב באותו קטע כביש. בכל קטע כביש ייתכן רק כיוון נסיעה אחד.

לדוגמה: מצומת D אפשר לנסוע לשני כיוונים. 20 מכוניות המשיכו לכיוון יעד ד, ו-5 אופנועים פנו לכיוון צומת E.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.16 **השאלה**: כמה אופנועים פנו בצומת B לכיוון יעד ב'?

פתרון: נתבקשנו למצוא את מספר האופנועים שפנו בצומת B לכיוון יעד ב'.
כל כלי הרכב אשר הגיעו לצומת B, הגיעו מצומת A. נתבונן בתרשים ונמצא כי 40 אופנועים הגיעו לצומת B מצומת A. מספר האופנועים אשר המשיכו מצומת B לצומת C הוא 30, ומכאן, ש-10 אופנועים פנו בצומת B לכיוון יעד ב' $(40-30=)$.

תשובה (3).

.17 **השאלה**: יובל נהג בכלי רכב שעבר בצומת D.

מה ההסתברות שיובל רכב על אופנוע?

פתרון: זוהי שאלת הסתברות. על מנת למצוא את הסיכוי שיובל רכב על אופנוע יש למצוא מה מספר כלי הרכב הכולל שעברו בצומת D, ומה מספר האופנועים שעברו בצומת, כדי לדעת איזה חלק מהווים האופנועים מתוך כלל כלי הרכב.
לפי התרשים, עברו בצומת D 30 משאיות, 50 מכוניות ו-10 אופנועים. כלומר, סך הכול עברו בצומת 90 כלי רכב $(30+50+10=)$, ומתוכם 10 אופנועים.
הסיכוי שיובל רכב על אופנוע הוא $\frac{1}{9}$ $\left(=\frac{10}{90}\right)$.

תשובה (1).

.18 **השאלה**: ידוע כי בכל משאית בין 1 ל-2 נוסעים, בכל מכונית בין 3 ל-5 נוסעים, ועל כל אופנוע נוסע אחד.

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות מספר הנוסעים שהגיעו ליעד ה'?

פתרון: מכיוון שלפי נתוני השאלה יש טווח של ערכים שיכול לייצג את מספר הנוסעים במשאית ובמכונית, הרי שזו שאלת טווחים. על מנת למצוא איזה מהמספרים המוצעים בתשובות יכול להיות מספר הנוסעים שהגיעו ליעד ה', יש למצוא את המספר הקטן ביותר והגדול ביותר של נוסעים שהגיעו ליעד ה'.

<u>מספר הנוסעים המינימלי</u>: ליעד ה' הגיעו 4 משאיות, 5 מכוניות ואופנוע אחד. בכל משאית יש לפחות נוסע אחד, בכל מכונית יש לפחות 3 נוסעים, ועל כל אופנוע יש בדיוק נוסע אחד.
מכאן, שליעד ה' הגיעו לכל הפחות 20 נוסעים $(4\cdot1+5\cdot3+1\cdot1=)$.
בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (1), שכן לא יתכן שהגיעו ליעד ה' פחות מ-20 נוסעים.

<u>מספר הנוסעים המקסימלי</u>: ליעד ה' הגיעו 4 משאיות, 5 מכוניות ואופנוע אחד. בכל משאית יש לכל היותר 2 נוסעים, בכל מכונית יש לכל היותר 5 נוסעים, ועל כל אופנוע יש נוסע אחד.
מכאן, שליעד ה' הגיעו לכל היותר 34 נוסעים $(4\cdot2+5\cdot5+1\cdot1=)$.
כעת ניתן לפסול את תשובות (3) ו-(4).

פסלנו 3 תשובות, ומצאנו כי מספר הנוסעים שהגיעו ליעד ה' הוא בין 20 ל-34, לפיכך ניתן לסמן את תשובה (2) כתשובה הנכונה.

תשובה (2).

.19 **השאלה**: נתון: מהירותם של כלי הרכב קבועה כל זמן נסיעתם. המשאיות נוסעות במהירות 20 קמ"ש, המכוניות – במהירות 40 קמ"ש, והאופנועים – במהירות 50 קמ"ש.
ידוע כי ממוצע המהירויות של כלי הרכב שעברו בקטע הכביש שבין צומת E ליעד ג' הוא 30 קמ"ש.

כמה **מכוניות** עברו בקטע הכביש הזה?

פתרון: נוסחת הממוצע

נסמן ב-x את מספר המכוניות שעברו בקטע הכביש שבין צומת E ליעד ג', ומכיוון שנתונה מהירותם הממוצעת של כלי הרכב שעברו בקטע, נשתמש בנוסחת הממוצע כדי למצוא את מספר המכוניות.
ממוצע מהירויות כלי הרכב שעברו בקטע כביש זה שווה לסכום מהירויותיהם של כל כלי הרכב לחלק למספר כלי הרכב הכולל. בקטע כביש זה עברו 8 משאיות, שמהירות נסיעתן היא 20 קמ"ש, x מכוניות, שמהירות נסיעתן היא 40 קמ"ש, ו-2 אופנועים, שמהירות נסיעתם היא 50 קמ"ש.
נתון כי ממוצע המהירויות של כלל כלי הרכב שווה ל-30 קמ"ש. נציב את הנתונים בנוסחת הממוצע, ונקבל: $\frac{8\cdot 20+x\cdot 40+2\cdot 50}{x+8+2}=30 \Leftarrow \frac{160+40x+100}{x+10}=30 \Leftarrow \frac{260+40x}{x+10}=30$.
נכפול את שני צדי המשוואה ב-$(x+10)$, ונקבל: $260+40x=30\cdot(x+10) \Leftarrow$
$260+40x=30x+300$.
נחסר 30x ו-260 משני צדי המשוואה, ונקבל: $10x=40$.
נחלק ב-10 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $x=4$.

תשובה (4).

.20 **השאלה**: "עומס חניה" של יעד מוגדר כך: $\frac{\text{מספר המשאיות שהגיעו ליעד}}{\text{מספר האופנועים שהגיעו ליעד}}$

באיזה מן היעדים הבאים עומס החניה הגדול ביותר?

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות, ועבור כל אחד מהיעדים שבתשובות נחשב את עומס החניה:

<u>תשובה (1)</u>: א. ליעד א' הגיעו 5 משאיות ו-5 אופנועים, ומכאן שעומס החניה ביעד זה שווה ל-1 $\left(=\frac{5}{5}\right)$.

<u>תשובה (2)</u>: ג. ליעד ג' הגיעו 18 משאיות, 8 מצומת E ו-10 מצומת C; ו-27 אופנועים, 2 מצומת E ו-25 מצומת C. מכאן שעומס החניה ביעד זה שווה ל- $\frac{2}{3}$ $\left(=\frac{18}{27}\right)$.
מכיוון שעומס החניה ביעד א' גדול יותר מעומס החניה ביעד ג', ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: ד. ליעד ד' הגיעו 15 משאיות, 5 מצומת F ו-10 מצומת D; ו-5 אופנועים אשר כולם הגיעו מצומת D; מכאן שעומס החניה ביעד זה שווה ל-3 $\left(=\frac{15}{5}\right)$. מכיוון שעומס החניה ביעד א' קטן יותר מעומס החניה ביעד זה ניתן לפסול את תשובה (1).

<u>תשובה (4)</u>: ה. ליעד ה' הגיעו 4 משאיות ואופנוע אחד, ומכאן שעומס החניה ביעד זה שווה ל-4 $\left(=\frac{4}{1}\right)$.
מכיוון שעומס החניה ביעד ד' קטן יותר מעומס החניה ביעד זה ניתן לפסול את תשובה (3).

מכיוון שפסלנו 3 תשובות ניתן לסמן את תשובה (4) כתשובה נכונה.

תשובה (4).
