מפתח תשובות נכונות

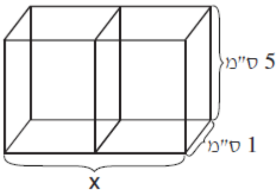
שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(3)	(4)	(3)	(4)	(4)	(1)	(4)	(3)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(4)	(2)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-7)

1. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם שתי תיבות חופפות שלהן פאה משותפת.
נפח **כל אחת** מן התיבות 20 סמ"ק.



לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
$x = ?$

פתרון: נתון כי נפח כל אחת מן התיבות הקטנות הוא 20 סמ"ק, ומכאן שנפח התיבה הגדולה אשר נוצרה מהצמדת התיבות הוא 40 סמ"ק $(= 2 \cdot 20)$.

נפח כל מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח בסיסה בגובהה.
שטח בסיס התיבה הוא x סמ"ר $(= 1 \cdot x)$. נתון כי גובהה של התיבה הוא 5 ס"מ.
מכאן שמצאנו כי נפח התיבה שווה ל-40 סמ"ק, הרי שניתן ליצור את המשוואה: $x \cdot 5 = 40$
נחלק ב-5 את שני האגפים, ונקבל: $x = 8$

תשובה (2).

---

2. **השאלה**: במפעל לייצור כיסאות ייצרו בשעת העבודה הראשונה מספר מסוים של כיסאות, ובכל שעת עבודה נוספת ייצרו מספר כיסאות כפול מזה שייצרו בשעה שקדמה לה. בשעת העבודה השלישית ייצרו במפעל 12 כיסאות.

כמה כיסאות סך הכול ייצרו במפעל ב-5 שעות העבודה הראשונות?

פתרון: רישום וחישוב מסודר

מנתוני השאלה אנו יודעים כי בכל שעת עבודה נוספת יצרו מספר כיסאות כפול מזה שייצרו בשעה שקדמה לה, ומכאן שמספר הכיסאות שיוצר בשעה שקדמה לשעה מסוימת הוא מחצית ממספר הכיסאות שיוצרו באותה שעה.
מספר הכיסאות אשר יוצר בשעה השלישית הוא 12, ומכאן שמספר הכיסאות שיוצר בשעה השנייה שווה למחצית ממנו, כלומר שווה ל- 6 $\left(= \frac{12}{2}\right)$, ומספר הכיסאות שיוצר בשעה הראשונה שווה למחצית מ-6, כלומר ל-3 $\left(= \frac{6}{2}\right)$.

מספר הכיסאות אשר יוצר בשעה השלישית הוא 12, ומכאן שמספר הכיסאות שיוצר בשעה הרביעית כפול ממנו, כלומר שווה ל- 24 $(= 12 \cdot 2)$, ומספר הכיסאות שיוצר בשעה החמישית כפול מ-24, כלומר שווה ל- 48 $(= 2 \cdot 24)$.

<u>סיכום</u>: מספר הכיסאות הכולל שיוצר ב-5 שעות העבודה הראשונות הוא 93 $(= 3 + 6 + 12 + 24 + 48)$.

תשובה (3).

---

3. **השאלה**: נתון: $\frac{2}{a+4}=\frac{8}{4a+x}$, $a\neq -4$

x שווה בהכרח ל-

פתרון: **__דרך א'__**: פישוט אלגברי

נכפול את שני האגפים ב- $(a+4)\cdot(4a+x)$, ונקבל: $2\cdot(4a+x)=8\cdot(a+4)$ ⇦ $8a+2x=8a+32$

נחסר 8a משני האגפים, ונקבל: $2x=32$ ⇦ $x=16$.

__דרך ב'__: הבנה אלגברית

במשוואה שלפנינו שני שברים השווים זה לזה.

מונה השבר באגף ימין גדול פי 4 ממונה השבר באגף שמאל, ומכאן שגם מכנה השבר באגף הימני גדול פי 4 ממכנה השבר באגף השמאלי. מכנה השבר באגף שמאל הוא $a+4$, ומכאן שמכנה השבר באגף ימין שווה ל- $4a+16$ $\left[4\cdot(a+4)=\right]$. מכיוון שמכנה השבר באגף שמאל הוא $4a+x$, הרי ש: $4a+x=4a+16$.

נחסר 4a משני האגפים, ונקבל: $x=16$

__דרך ג'__: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שנשאלנו על ערכו של הנעלם x, ניתן להציב מספר נוח עבור הנעלם a כדי להיפטר ממנו, ולחשב את ערך הנעלם x שבשאלה.

בהצבת $a=0$ נקבל כי $x=16$: $\frac{2}{0+4}=\frac{8}{4\cdot 0+x}$ ⇦ $\frac{2}{4}=\frac{8}{x}$ ⇦ $\frac{1}{2}=\frac{8}{x}$

נכפול את שני האגפים ב-2x, ונקבל כי x שווה ל-16.

נציב כי $a=0$ בתשובות, ונבדוק אלו מהתשובות שונות מ-16 ונפסלות:

__תשובה (1)__: 1. תשובה זו שונה מ-16, ועל כן ניתן לפסול אותה.

__תשובה (2)__: $8a+16$. בהצבת $a=0$ הערך המתקבל בתשובה הוא 16. מכיוון שהערך שבתשובה מתאים לערך של x שקיבלנו במשוואה, ועל כן התשובה אינה נפסלת.

__תשובה (3)__: $12a+4$. בהצבת $a=0$ הערך המתקבל בתשובה הוא 4. מכיוון שערך זה שונה מ-16, התשובה נפסלת.

__תשובה (4)__: 16. מכיוון שהערך בתשובה זו זהה לערך שקיבלנו, ולכן לא נפסול את התשובה.

מכיוון שנותרנו עם תשובות (2) ו-(4), נציב במשוואה מספר אחר עבור הנעלם a, למשל $a=1$, ונבדוק אלו מהתשובות מתאימה.

נציב כעת כי $a=1$ במשוואה, ונקבל: $\frac{2}{1+4}=\frac{8}{4\cdot 1+x}$ ⇦ $\frac{2}{5}=\frac{8}{4+x}$

נכפול את שני האגפים ב- $5\cdot(4+x)$, ונקבל: $2\cdot(4+x)=8\cdot 5$ ⇦ $8+2x=40$

נחסר 8 משני האגפים, ונקבל: $2x=32$ ⇦ $x=16$

נציב $a=1$ בתשובות שנותרו, ונפסול תשובה שערכה שונה מ-16:

__תשובה (2)__: $8a+16$. בהצבת $a=1$, הערך המתקבל בתשובה הוא 24 $\left(=16+8=16+1\cdot 8=16+8a\right)$.

מכיוון שקיבלנו ערך השונה מ-16, התשובה נפסלת.

מאחר שפסלנו 3 תשובות, הרי שתשובה (4) היא התשובה הנכונה.

תשובה (4).

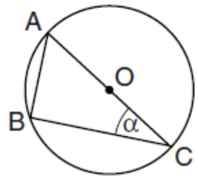
---

4. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש ABC החסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו r.

נתון: $AB = r$

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,

$\alpha = ?$



פתרון: הנקודה O היא מרכז המעגל, ומכאן שהמיתר AC העובר דרך נקודה O הוא קוטר במעגל. זווית היקפית הנשענת על קוטר המעגל שווה ל-$90°$, ומכאן שזווית ABC שווה ל-$90°$, ו- AC היא יתר המשולש.

נתון כי $AB = r$, ומכאן שמשולש ABC הוא משולש ישר זווית אשר אורך אחד מניצביו, הניצב AB, שווה למחצית מאורכו של היתר, כלומר משולש זהב. זווית α היא זווית הנמצאת מול הניצב הקטן, ומכאן שזווית α שווה ל-$30°$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה**: גלי קיבלה שני ציונים בטווח שבין 0 ל-100 (כולל).
אחד הציונים גבוה מ-90, והשני נמוך מ-90.

איזה מהמספרים הבאים **אינו** יכול להיות ממוצע הציונים של גלי?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: 46. אם ממוצע הציונים של גלי בשני המבחנים הוא 46, אז סכום הציונים הוא 92 $\left(=2 \cdot 46\right)$. יתכן שגלי קיבלה באחד המבחנים 91 ובמבחן השני את הציון 1 $\left(=91+1\right)$, מכיוון שאחד הציונים גבוה מ-90 והשני נמוך מ-90, הרי שהמצב המתואר אפשרי.

<u>תשובה (2)</u>: 51. אם הממוצע של גלי בשני המבחנים הוא 51, אז סכום הציונים הוא 102 $\left(=2 \cdot 51\right)$.
מצב זה אפשרי, למשל אם גלי קיבלה באחד המבחנים 91 ובמבחן השני קיבלה ציון 11 $\left(=91+11\right)$, מכיוון שאחד הציונים גבוה מ-90 והשני נמוך מ-90, הרי שהמצב המתואר אפשרי.

<u>תשובה (3)</u>: 89. אם הממוצע של גלי בשני המבחנים הוא 89, אז סכום הציונים הוא 178 $\left(=2 \cdot 89\right)$.
יתכן שגלי קיבלה באחד המבחנים 91 ובמבחן השני את הציון 87 $\left(=91+87\right)$, מכיוון שאחד הציונים גבוה מ-90 והשני נמוך מ-90, הרי שהמצב המתואר אפשרי.

<u>תשובה (4)</u>: 95. אם הממוצע של גלי בשני המבחנים הוא 95, אז סכום הציונים הוא 190 $\left(=2 \cdot 95\right)$. גם אם גלי קיבלה באחד המבחנים את הציון המקסימלי, כלומר 100, הרי שבמבחן השני עליה לקבל את הציון 90 על מנת שהסכום יהיה 190.
מכיוון שאחד הציונים גבוה מ-90 אולם השני אינו נמוך מ-90, הרי שהמצב המתואר אינו אפשרי.

<u>דרך ב'</u>: טווחים

מכיוון שנשאלנו מה אינו יכול להיות ממוצע הציונים, ויש מספר גדול של אפשרויות לצמדי ציונים, נבדוק מה הממוצע המקסימלי והממוצע המינימלי שגלי יכולה לקבל בהתאם לנתוני השאלה.

<u>ממוצע מינימלי</u>: נתון כי אחד הציונים גבוה מ-90 והשני נמוך מ-90. הציון הנמוך ביותר האפשרי הגבוה מ-90 הוא 91, והציון המינימלי אשר נמוך מ-90 הוא 0, ומכאן שהממוצע המינימלי הוא 45.5

$$\left(=\frac{80+10+1}{2}=\frac{91}{2}=\frac{91+0}{2}\right).$$

<u>ממוצע מקסימלי</u>: נתון כי אחד הציונים גבוה מ-90 והשני נמוך מ-90. הציון הגבוה ביותר האפשרי הגבוה מ-90 הוא 100, והציון המקסימלי אשר נמוך מ-90 הוא 89. הממוצע המקסימלי הוא 94.5

$$\left(=\frac{100+80+9}{2}=\frac{189}{2}=\frac{100+89}{2}\right).$$

מצאנו כי ממוצע הציונים הוא בין 45.5 ל-94.5. הערך היחיד המופיע בתשובות שאינו נמצא בטווח הוא 95.

תשובה (4).

---

6. **השאלה**: $\frac{17,516}{29}=?$

פתרון: חישוב מקורב

מכיוון שמדובר בחישוב שאינו טריוויאלי כלל וכלל, אין בכוונתנו לחשב במדויק את התוצאה, אלא רק לבדוק באמצעות בדיקת ספרת האחדות והערכת סדר גודל.

אם נכפול את המספר אשר מהווה את תוצאת החלוקה של 17,516 ב-29, במספר 29 אנו אמורים לקבל כתוצאה את המספר 17,516.

<u>ספרת אחדות</u>: נבדוק לגבי כל אחת מן התשובות המוצעות האם כפל של ספרת האחדות של אותו מספר בספרת האחדות של המספר 29, כלומר בספרה 9, מקבלים כתוצאה את ספרת האחדות של 17,516, כלומר 6.

ספרת האחדות של שני המספרים המהווים את תשובות (1) ו-(4) היא 4. כאשר כופלים 4 ב-9 מקבלים כי תוצאת ספרת האחדות היא 6, ולכן לא ניתן לפסול תשובות אלו.

ספרת האחדות של שני המספרים המהווים את תשובות (2) ו-(3) היא 8. כאשר כופלים 8 ב-9 מקבלים 72, ומכאן שתוצאת ספרת האחדות היא 2, ולכן ניתן לפסול תשובות אלו.

<u>הערכת סדר גודל</u>:

על מנת לבדוק האם תשובה (1) היא התשובה הנכונה, נבדוק מה תוצאת המכפלה של שני מספרים הקרובים בערכם ל-204 ו-29, למשל 200 ו-30. תוצאת המכפלה של 200 ב-30 היא 6,000, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה. לעומת זאת תוצאת המכפלה של 600 ב-30 היא 18,000. מכיוון שערך זה קרוב ל-17,516.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: x ו-y הם מספרים שלמים בין 1 ל-9.

נתון: $x \cdot y(x \cdot y - 1) = 90$

$x + y = ?$

פתרון: מכיוון שנתון כי x ו-y הם מספרים שלמים, הרי שיש מעט אפשרויות שיכולות לקיים את המשוואה. x ו-y הם מספרים שלמים בין 1 ל-9, ומכאן שגם הביטוי xy שהוא תוצאת המכפלה של x ו-y הוא בהכרח מספר שלם, ואף הביטוי $(x \cdot y - 1)$, הקטן מ-xy ב-1, גם הוא מספר שלם.

ההפרש בין שני הביטויים הוא 1, ומכאן ששני הביטויים הם מספרים שלמים ועוקבים.

מכפלת שני המספרים השלמים העוקבים היחידים השווה ל-90, היא $10 \cdot 9$.

מצאנו כי המכפלה $x \cdot y$ שווה ל-10. שני המספרים השלמים היחידים בין 1 ל-9, אשר מכפלתם שווה ל-10 הם 2 ו-5, ומכאן שזה ערכם של x ו-y.

כעת ניתן לקבוע כי סכומם של x ו-y שווה ל-7 $(x + y = 2 + 5 =)$.

תשובה (1).

הסקה מטבלה (שאלות 8-12)

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על חמש השאלות שאחריה.

באתר חפירות נמצאו ממצאים משני סוגים: כלי חרס ומטבעות.
כלי החרס שנמצאו מוינו לארבע קטגוריות: נרות שמן, כדים, קערות ופסלים.
המטבעות שנמצאו מוינו לארבע קטגוריות: נחושת, ארד, כסף וזהב.
אתר החפירות חולק לארבעה אזורים: **א**, **ב**, **ג** ו-**ד**.
עבור כל קטגוריה של ממצאים בכל אזור מצוינים בטבלה הכמות הכוללת של הממצאים, מספר הממצאים השלמים מתוך הכמות הכוללת ומספר הממצאים הנדירים מתוך הכמות הכוללת (ראו מקרא).

לדוגמה: באזור **ג** נמצאו 15 פסלים סך הכול, מתוכם 12 שלמים ו-11 נדירים.

מקרא:

סך כל הממצאים, ממצאים שלמים, ממצאים נדירים

	קטגוריה \ אזור	א	ב	ג	ד
כלי חרס	נרות שמן	0 , 2 , **13**	2 , 1 , **10**	0 , 5 , **6**	0 , 9 , **15**
	כדים	0 , 1 , **1**	1 , 2 , **4**	2 , 4 , **9**	0 , 1 , **7**
	קערות	0 , 6 , **9**	0 , 5 , **8**	1 , 3 , **16**	0 , 0 , **8**
	פסלים	0 , 5 , **16**	4 , 1 , **8**	11 , 12 , **15**	12 , 11 , **20**
מטבעות	נחושת	0 , 2 , **5**	0 , 10 , **13**	2 , 10 , **11**	0 , 12 , **20**
	ארד	0 , 2 , **6**	4 , 6 , **10**	0 , 4 , **8**	13 , 8 , **15**
	כסף	0 , 0 , **0**	3 , 5 , **5**	7 , 10 , **10**	0 , 3 , **3**
	זהב	0 , 0 , **0**	0 , 0 , **0**	1 , 3 , **3**	0 , 1 , **1**

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

8. **השאלה**: קערות שנמצאו באתר החפירות והיו לא שלמות וגם לא נדירות, נזרקו.

באיזה אזור נזרקו כל הקערות שנמצאו בו?

פתרון: לפי נתוני השאלה קערות שאינן שלמות ואינן נדירות נזרקו, ומכאן שאם יש אזור שבו נזרקו כל הקערות שנמצאו בו, הרי שבאזור זה לא נמצאו כלל קערות שלמות וקערות נדירות.
נתבונן בתרשים ונבדוק באיזה אזור אין קערות שלמות או קערות נדירות.

אזור **א** - באזור זה נמצאו 6 קערות שלמות, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

אזור **ב** - באזור זה נמצאו 5 קערות שלמות, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

אזור **ג** - באזור זה נמצאו 3 קערות שלמות וקערה נדירה אחת, ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

אזור **ד** - באזור זה נמצאו 8 קערות אשר אף אחת מהן אינה שלמה ואינה נדירה, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

9. **השאלה**: באיזה אזור מספר כלי החרס הנדירים שנמצאו גדול ממספר המטבעות הנדירים שנמצאו?

פתרון: נעבור על האזורים השונים ונחשב את מספר כלי החרס הנדירים שנמצאו בכל אזור ומספר המטבעות הנדירים שנמצאו בו.

<u>אזור א</u>: מספר כלי החרס הנדירים שנמצאו באזור זה הוא 0, ומכאן שלא יתכן שמספר כלי החרס הנדירים שנמצאו באזור **א** גדול ממספר המטבעות הנדירים.

<u>אזור ב</u>: מספר כלי החרס הנדירים שנמצאו באזור **ב** הוא 7 $\left(=4+1+2\right)$, ומספר המטבעות הנדירים שנמצאו באזור **ב** אף הוא שווה ל-7 $\left(=3+4\right)$, ומכאן שאזור זה אף הוא אינו עונה על התנאי המבוקש.

<u>אזור ג</u>: מספר כלי החרס הנדירים שנמצאו באזור **ג** הוא 14 $\left(=11+1+2\right)$, ומספר המטבעות הנדירים שנמצאו באזור **ב** שווה ל-10 $\left(=1+7+2\right)$. מצאנו כי אזור **ג** עונה על התנאי המבוקש.

תשובה (3).

---

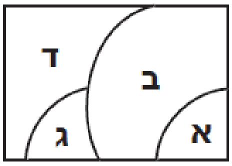
10. **השאלה**: כל הממצאים מאזור **א**, **פרט למטבעות הנחושת**, הוכנסו לקופסאות כך שמספר הממצאים בכל קופסה היה זהה.

מה **לא** יכול להיות מספר הממצאים בכל קופסה?

פתרון: ראשית, נמצא מה מספר הממצאים שנאספו מאזור **א**.
את מספר הממצאים הכולל שנמצאו באזור א, פרט למטבעות הנחושת, נמצא באמצעות חיבור של סך כל הממצאים (המספר המודגש בכל משבצת) שנמצאו מכל אחד מסוגי הממצאים באזור **א**. מספר ממצאים הכולל הוא 45 $\left(=6+16+9+1+13\right)$. אם נתון כי ממצאים אלו חולקו לקופסאות כך שבכל קופסה היה מספר זהה של ממצאים, עלינו למצוא באיזה מהמספרים המופיעים בתשובות לא יכול להתחלק המספר 45.
ניתן לחלק 45 כך שבכל קופסה יהיו 15 פריטים, ולכן ניתן לפסול את תשובה (1), כך גם ניתן לחלק 45 ל-5 פריטים בקופסה ול-9 פריטים בקופסה (תשובות (2) ו-(3)), אולם לא ניתן לחלק 45 פריטים לקופסאות כך שבכל קופסה יהיו 10 פריטים, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

.11 **השאלה**: לפניכם מפה של אתר החפירות וחלוקתו לארבעת האזורים.
בבדיקה חוזרת של הממצאים התברר כי 10 פסלים שנמצאו על הגבול שבין שני אזורים נספרו בטעות פעמיים, פעם אחת בכל אחד משני האזורים.



באילו שני אזורים מדובר?

פתרון: ראשית נתבונן בתרשים המצורף ובתשובות המוצעות, ונמצא כי אזורים **א** ו-**ג** אינם בעלי גבול משותף, ולכן תשובה (4) נפסלת.
נעבור על יתר התשובות, ונבדוק האם יכולים להיות 10 פסלים שנספרו בטעות בכל אחד משני האזורים.

<u>תשובה (1)</u>: **א** ו-**ב**. נתבונן בטבלה ונמצא כי באזור **א** נמצאו בסך הכול 16 פסלים, ובאזור **ב** נמצאו בסך הכול 8 פסלים. מכיוון שמספר הפסלים שלפי הטבלה נמצאו באזור **ב** קטן מ-10, הרי שלא יתכן שהוא אחד מהאזורים שבהם נספרו 10 פסלים בכל אחד משני האזורים.
מצאנו כי תשובה (1) נפסלת, וכמו כן כל תשובה שבה מופיע אזור **ב**, כלומר גם את תשובה (3).
מכיוון שפסלנו 3 תשובות, הרי שהתשובה הנכונה היא תשובה (2).

תשובה (2).

.12 **השאלה**: הערך של מטבע זהב נקבע על פי שלמותו ונדירותו, כמתואר בטבלה הבאה:

	נדיר	לא נדיר
שלם	5,000 שקלים	1,000 שקלים
לא שלם	2,000 שקלים	500 שקלים

מה הערך הכולל (בשקלים) של מטבעות הזהב שנמצאו באתר החפירות?

פתרון: נתבונן בתרשים בשורה המציינת את מטבעות הזהב שנמצאו באתר החפירות.
באזורים **א** ו-**ב** לא נמצאו כלל מטבעות זהב.
באזור **ג** נמצאו 3 מטבעות זהב, 3 פריטים שלמים ו-1 נדיר.
מנתונים אלו עלינו להסיק כי כל מטבעות הזהב שנמצאו באזור **ג** הם שלמים, וכי אחד מהם נדיר ו-2 אינם נדירים. ערכו של מטבע הזהב הנדיר והשלם הוא 5,000 שקלים לפי הטבלה המצורפת, וערכו של כל אחד מ-2 מטבעות הזהב שלמים שאינם נדירים הוא 1,000 שקלים, ובסך הכול שניהם יחד 2,000 שקלים. מצאנו כי ערך המטבעות באזור ג הוא 7,000 שקלים $(5,000+2,000=)$.

באזור **ד** נמצא מטבע זהב אחד, ומכיוון שיש פריט אחד שלם ואין פריטים נדירים, הרי שיש באזור זה מטבע זהב אחד שלם ולא נדיר, אשר ערכו לפי הטבלה המצורפת הוא 1,000 שקלים.
מצאנו כי ערך המטבעות באתר החפירות הוא 8,000 שקלים $(7,000+1,000=)$.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. **השאלה**: גלית ויערה יצאו מאותה נקודה בתחילת רחוב שאורכו 750 מטרים, וצעדו לאורך הרחוב באותו כיוון. גלית הלכה לכל הפחות $\frac{1}{2}$ מאורכו של הרחוב ועצרה.

יערה הלכה לכל היותר $\frac{1}{3}$ מאורכו של הרחוב ועצרה.

מה המרחק הקטן ביותר שיכול להיות בין גלית ליערה (במטרים)?

פתרון: מציאת הטווח הקטן ביותר

נתון כי גלית הלכה לכל הפחות $\frac{1}{2}$ מאורכו של הרחוב ועצרה. המרחק הקטן ביותר שעברה גלית מתחילתו של הרחוב שווה למחצית מאורך הרחוב, כלומר שווה ל-375 מטר $\left(=\frac{1}{2}\cdot 750\right)$.

יערה הלכה לכל היותר $\frac{1}{3}$ מאורכו של הרחוב ועצרה, ומכאן שהמרחק הגדול ביותר שיערה עברה הוא 250 מטר $\left(=\frac{1}{3}\cdot 750\right)$.

המרחק המינימלי בין גלית ליערה יהיה כאשר גלית תלך למרחק הקצר ביותר, ויערה תלך למרחק הרב ביותר, ומכאן שהמרחק המינימלי הוא 125 מטר $\left(=375-250\right)$

תשובה (2).

---

14. **השאלה**: x תבניות ביצים זהות ומלאות מכילות y ביצים סך הכול $\left(0<y\,,\,x\right)$.

כמה ביצים מכילות y תבניות ביצים מלאות כאלה?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין נתונים מספריים הנתונים בשאלה, נציב מספרים נוחים, למשל ש-$x=1$ ו-$y=2$.
נציב נתונים מספריים אלו בשאלה, ונקבל כי לפי הנתונים יש 1 תבנית ביצים המכילה 2 ביצים, והשאלה היא כמה ביצים מכילות 2 תבניות. אם בכל תבנית יש 2 ביצים, הרי שב-2 תבניות יש 4 ביצים $\left(=2\cdot 2\right)$.
נציב כי $x=1$ ו-$y=2$ בתשובות, ונמצא כי תשובות (2), (3) ו-(4) נפסלות, ומכאן שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: ריבוע יחסים

נתון כי x תבניות ביצים זהות מכילות y ביצים בסך הכול, ועלינו למצוא כמה ביצים מכילות y תבניות ביצים. נשבץ את הנתונים בריבוע היחסים, ונמצא בעזרתו את התשובה:

מספר תבניות	מס' ביצים
x	y
y	?

נסמן את המשבצת החסרה ב-z. מכיוון שהיחס בכל שורה וכל טור זהה, הרי שניתן לבנות משוואה ולפיה: $\frac{z}{y}=\frac{y}{x}$. נכפול את שני האגפים ב-xy, ונקבל: $xz=y^2$.

נחלק את שני האגפים ב-z, ונקבל: $z=\frac{y^2}{x}$

תשובה (1).

.15 **השאלה**: $y = \sqrt{2\sqrt{x}}$, $0 < x$

$y^4 = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>:** הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שמבקשים את ערכו של y, נציב במשוואה כי $x = 1$, ונמצא כי ערכו של y הוא $\sqrt{2}$ $\left(y = \sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{2\sqrt{1}} = \sqrt{2\cdot 1} =\right)$.

אם y שווה ל- $\sqrt{2}$, אז y^4 שווה ל-4 $\left(y^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 2^2 =\right)$.

נציב $x = 1$ בתשובות המוצעות, ונמצא כי תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

נציב מספר נוסף על מנת להכריע בין תשובות (3) ו-(4). נציב למשל כי $x = 4$ בביטוי, ונמצא כי ערכו של y שווה ל-2 $\left(y = \sqrt{2\cdot\sqrt{4}} = \sqrt{2\cdot 2} = \sqrt{4} =\right)$. אם y שווה ל-2, אז y^4 שווה ל-16 $\left(y^4 = 2^4 =\right)$.

כעת נציב מספר זה בתשובות, ונקבל כי תשובה (4) נפסלת, ומכאן שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

נתונה משוואה, לפיה: $y = \sqrt{2\sqrt{x}}$, ונשאלנו על ערכו של הביטוי y^4 . מכיוון שכל התשובות הן בערכים של x, עלינו להציב במקום y את ערכו על פי המשוואה, כלומר $\sqrt{2\sqrt{x}}$, ונקבל: y^4 ⇦ $\left(\sqrt{2\sqrt{x}}\right)^4$ ⇦ $\left(\sqrt{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}\right)^4$

⇦ $\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^4$ ⇦ $2^{\frac{1}{2}\cdot 4}\cdot x^{\frac{1}{4}\cdot 4}$ ⇦ $2^2\cdot x^1$ ⇦ 4x.

תשובה (3).

.16 **השאלה**: אם במרובע יש לפחות ______, הוא בהכרח מעוין.

פתרון: מעוין הוא:

א) מקבילית שכל צלעותיה שוות זו לזו.

ב) דלתון המורכב משני משולשים חופפים.

<u>תשובה (1)</u>: **3 צלעות שוות ואלכסוניו מאונכים**

זו התשובה הנכונה. קיימים 3 מרובעים אשר אלכסוניהם מאונכים זה לזה: ריבוע, מעוין ודלתון, ומכאן שאם אלכסוני המרובע מאונכים הוא בהכרח אחד מ-3 מרובעים אלו. אם 3 מצלעותיו שוות של המרובע שוות, הרי שלא משנה באיזה מרובע מבין 3 המרובעים מדובר, המשמעות היא שבהכרח גם הצלע הרביעית שווה באורכה ליתר הצלעות. מרובע שכל צלעותיו שוות ואלכסוניו מאונכים הוא בהכרח בעל שני זוגות של צלעות מקבילות, ומכאן שהוא בהכרח מעוין.

<u>תשובה (2)</u>: 3 צלעות שוות ואלכסוניו שווים

תשובה זו אינה נכונה, שכן יתכן שהמרובע הוא טרפז שווה-שוקיים אשר אורך שוקיו שווה לאורך הבסיס הקטן. במקרה כזה אמנם 3 מצלעות הטרפז שוות ואלכסוניו שווים, אולם המרובע אינו מעוין. יתרה מכך, אלכסוני המעוין אינם בהכרח שווים זה לזה.

<u>תשובה (3)</u>: 3 צלעות שוות ו-2 זוויות שוות

תשובה זו אינה נכונה, שכן יתכן שהמרובע הוא טרפז שווה-שוקיים אשר אורך שוקיו שווה לאורך הבסיס הקטן. במקרה כזה אמנם 3 מצלעות הטרפז שוות וזוויות הבסיס שלו שוות, אולם המרובע אינו מעוין.

<u>תשובה (4)</u>: 2 צלעות שוות ו-3 זוויות שוות.

תשובה זו אינה נכונה, שכן במלבן, לדוגמה, יש 2 צלעות שוות וכל זוויותיו שוות זו לזו.

תשובה (1).

---

17. **השאלה**: נתון: $|a-b|=1$

$$a+b=0$$

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה השנייה: $a+b=0$, על ידי חיסור b משני האגפים, ונקבל: $a=-b$.

כעת נציב נתון זה במשוואה הראשונה, לפיה: $|a-b|=1$, ונקבל: $|-b-b|=1 \Leftarrow |-2b|=1$.

ערכו של כל ביטוי בערך מוחלט הוא חיובי, ולכן ניתן להשוות את 2b ל-1, ולקבוע כי $2b=1$.

נחלק ב-2 את שני האגפים, ונמצא כי $b=\frac{1}{2}$, מכיוון שאיננו יודעים האם b חיובי או שלילי, הרי שיתכן כי $b=-\frac{1}{2}$. מכיוון שלפי המשוואה השנייה: $a=-b$, הרי שניתן לקבוע כי a ו-b הם מספרים נגדיים, כאשר לא ניתן לדעת מי מהם חיובי ומי שלילי, ולכן תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

אם נפשט את תשובה (4) באמצעות העברת אגפים, נמצא כי $a<b$. מכיוון שלא ניתן לקבוע זאת בוודאות, הרי שגם תשובה זו נפסלת, אולם תשובה (3) בהכרח נכונה, שכן אחד המשתנים בהכרח חיובי והאחר שלילי.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

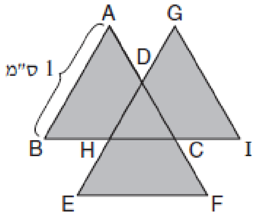
נחפש שני מספרים אשר מקיימים את שתי המשוואות הנתונות, כלומר שגם ההפרש ביניהם בערך מוחלט יהיה 1, כפי שנתון במשוואה הראשונה, וכמו כן שסכומם יהיה שווה ל-0, כלומר שיהיו שני מספרים נגדיים.

אם ניקח לדוגמה את 1 ו-(-1), הרי שהם מקיימים את המשוואה השנייה, אולם אינם מקיימים את המשוואה הראשונה, שכן ההפרש ביניהם בערך מוחלט הוא 2.

אם ניקח שני מספרים גדולים יותר, כגון 2 ו-(-2), ההפרש ביניהם בערך מוחלט יגדל ויהיה 4, ומכאן שעלינו לקחת מספרים קטנים, צמד המספרים היחיד שמקיים את שתי המשוואות הוא $\frac{1}{2}$ ו-$\left(-\frac{1}{2}\right)$, כאשר אין כל הבדל אם a חיובי ו-b שלילי או אם a שלילי ו-b חיובי.

תשובה (3).

.18 **השאלה**: ABC, DEF ו-GHI הם משולשים שווי-צלעות חופפים החותכים זה את זה באמצעי צלעותיהם (ראו סרטוט).



לפי נתונים אלו והנתון שבסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

פתרון: נחלק את הצורה הכהה שבסרטוט למשולשים שווי-צלעות קטנים יותר, באמצעות חיבור אמצעי צלעות המשולשים: העברת קו ישר דרך נקודה D המקביל לקטע BI; חיבור אמצע הצלע AB לנקודה H; חיבור אמצע הצלע GI לנקודה C; חיבור נקודות C ו-H לאמצע הצלע EF.

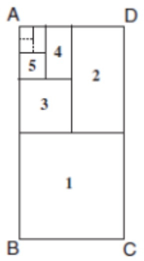
קיבלנו 10 משולשים שווי-צלעות, אשר אורך צלעו של כל אחד מהם היא $\frac{1}{2}$ ס"מ.

כאשר צלע המשולש שווה ל-a, שטח משולש שווה-צלעות שווה ל- $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ומכאן שאם אורכה של צלע המשולש הוא $\frac{1}{2}$ ס"מ, הרי ששטח כל משולש שווה ל- $\frac{\sqrt{3}}{16}$ $\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=\right)$,

וסכום שטחם של 10 המשולשים הוא $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ סמ"ר $\left(10\cdot\frac{\sqrt{3}}{16}=\right)$.

תשובה (4).

.19 **השאלה**: במלבן ABCD שבסרטוט מתקיים: $\frac{AB}{AD}=2$.



מלבן 1 נוצר על ידי חלוקת ABCD לשני מלבנים חופפים באמצעות קו אופקי,
מלבן 2 נוצר על ידי חלוקת המלבן הנותר לשני מלבנים חופפים באמצעות קו אנכי,
וכן הלאה – לסירוגין.

במלבן **11**, מה יהיה היחס בין הצלע האנכית לצלע האופקית?

פתרון: לפי נתוני השאלה אורכו של מלבן ABCD כפול מרוחבו: $\frac{AB}{AD}=2$.

אם מלבן 1 נוצר על ידי חלוקת מלבן ABCD לשני מלבנים חופפים באמצעות קו אופקי, הרי שמלבן 1 והמלבן הנותר שנוצר הם מלבנים אשר אורכם ורוחבם שווה, כלומר מלבן 1 והמלבן הנותר הם ריבועים.
מלבן 2, נוצר על ידי חלוקת המלבן הנותר שהוא כאמור ריבוע, לשני מלבנים חופפים באמצעות קו אנכי, ולכן נקבל שני מלבנים, מלבן 2 ומלבן נוסף, אשר אורכם גדול פי 2 מרוחבם. חלוקתו של המלבן הנותר לשני מלבנים נותרים יוצרת שני מלבנים, מלבן 3 והמלבן הנותר שהם ריבועים.
מצאנו כי במלבן 1 האורך שווה לרוחב, אורכו של מלבן 2 כפול מרוחבו, אורכו של מלבן 3 שווה לרוחבו, וכך הלאה. כלומר, בכל מלבן שמספרו אי-זוגי האורך שווה לרוחב, ובכל מלבן שמספרו זוגי האורך כפול מן הרוחב, ומכאן שבמלבן 11, שמספרו אי-זוגי, האורך והרוחב שווים זה לזה, כלומר היחס שווה ל-1.

תשובה (1).

.20 **השאלה**: שולמית הטילה קובייה הוגנת פעמיים.

מה ההסתברות שהמספר שקיבלה בהטלה השנייה גדול פי 2 מן המספר שקיבלה בהטלה הראשונה

פתרון: הסתברות שווה למספר האפשרויות הרצויות לחלק למספר האפשרויות המצויות, כלומר מספר האפשרויות הכולל.
כאשר זורקים קובייה פעמיים יש 6 אפשרויות בכל הטלה, ובסך הכול מספר צמדי האפשרויות הכולל הוא 36 $(6\cdot 6=)$.

נספור ידנית מיהן האפשרויות המתאימות לפי נתוני השאלה: 1 בהטלה הראשונה ו-2 בהטלה השנייה; 2 בהטלה הראשונה ו-4 בהטלה השנייה, 3 בהטלה הראשונה ו-6 בהטלה השנייה.
מצאנו כי יש בסך הכול 3 צמדי מספרים שבהם המספר שהתקבל בהטלה השנייה גדול פי 2 מהמספר שקיבלנו בהטלה הראשונה, ומכאן שההסתברות לקבל צמד כזה הוא $\frac{1}{12}$ $\left(=\frac{3}{36}\right)$.

תשובה (1).
