מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(4)	(3)	(3)	(4)	(3)	(4)	(3)	(3)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(2)	(3)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)

הסברים

1. **השאלה**: נתון: x הוא מספר שלם הקטן מ-0.

$x = a + b - 3$

$(a+b)$ הוא בהכרח –

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

נשאלנו לגבי ערכו של הביטוי $(a+b)$, ולכן נחלץ ביטוי זה מהמשוואה הנתונה על ידי הוספת 3 לשני אגפי המשוואה, ונקבל: $x+3=a+b$.

מצאנו כי צד שמאל של המשוואה שווה ל-x שהוא מספר שלילי ושלם + 3, ומכאן צד ימין של שמאל של המשוואה הוא בהכרח מספר שלם הקטן מ-3.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

נתון כי x הוא מספר שלילי, כלומר $x<0$. לכן, אם נתון כי $x=a+b-3$ ניתן להציב $x=a+b-3$ במקום x וכך לקבל: $a+b-3<0$.

נוסיף 3 לשני אגפי אי השיוויון, ונקבל: $a+b<3$ כלומר, $a+b$ הוא מספר הקטן מ-3.

מכיוון שנתון ש- x הוא מספר שלם, הרי שניתן לומר שגם $a+b$ הוא מספר שלם, שכן בחיסור 3 ממספר שלם, התוצאה המתקבלת אף היא בהכרח תהיה שלמה.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי x הוא מספר שלם ושלילי, נציב למשל כי x שווה ל- (-1), ונקבל: $-1=a+b-3$

על מנת לבודד את הביטוי $(a+b)$, נוסיף 3 לשני האגפים, ונקבל: $2=a+b$.

תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

נציב שוב על מנת לפסול תשובה נוספת, נציב למשל כי x שווה ל- (-2), ונקבל: $-2=a+b-3$

על מנת לבודד את הביטוי $(a+b)$, נוסיף 3 לשני האגפים, ונקבל: $1=a+b$.

תשובה (3) נפסלת.

תשובה (4).

2. **השאלה**: נתון: $a+b=0$

$0<a$

איזה מהביטויים הבאים **שונה** בערכו מהאחרים?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי a הוא מספר חיובי, נציב למשל כי a שווה ל-1, ונמצא כי על מנת לקיים את המשוואה הראשונה, הרי ש-b צריך להיות שווה ל- (-1). כעת נבדוק את ערכן של התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: b^2. אם b שווה ל-(-1), הרי שערכה של התשובה הוא 1 $\left(b^2=(-1)^2=\right)$.

<u>תשובה (2)</u>: $(-a)^2$. אם a שווה ל-1, הרי שערכה של התשובה הוא 1 $\left((-a)^2=(-1)^2=\right)$.

<u>תשובה (3)</u>: $(a)^2$. אם a שווה ל-1, הרי שערכה של התשובה הוא 1 $\left((a)^2=(1)^2=\right)$.

<u>תשובה (4)</u>: $-(-b)^2$. אם b שווה ל-(-1), הרי שערכה של התשובה הוא 1- $\left(-(-b)^2=-(-1)^2=\right)$.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

מהנתון $a+b=0$, ניתן להסיק כי a ו-b הם מספרים נגדיים, כלומר $a=-b$.
מכיוון שנתון כי a חיובי, הרי ש-b שלילי.
בביטויים המופיעים בתשובות (1), (2) ו-(3) מעלים את הבסיסים a ו-b בחזקת 2, כלומר בריבוע.
כאשר מעלים שני מספרים נגדיים בריבוע, נקבל בהכרח תוצאות זהות (וחיוביות), ולכן ניתן לקבוע כי הערכים המתקבלים בתשובות (1), (2) ו-(3) זהים.
התשובה היחידה אשר ערכה שלילי, ולכן שונה מערכן של יתר התשובות היא תשובה (4).

תשובה (4).

---

3. **השאלה**: נתון: $5=(a\cdot b)^2$

$0<a$

לפיכך **לא** ייתכן ש-

פתרון: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: $b<a$. על מנת שהמשוואה הנתונה $5=(a\cdot b)^2$ תתקיים, a יכול להיות שווה ל- $\sqrt{5}$ ו-$b=1$, ומכאן שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $b<0$. לפי הנתון: $5=(a\cdot b)^2$. מכיוון שמעלים את הביטוי $a\cdot b$ בחזקת 2, הרי שאין משמעות לסימנם של המשתנים, כלומר b יכול להיות שלילי או חיובי, בכל מקרה כאשר נעלה את הביטוי בחזקת 2 נקבל תוצאה חיובית, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $a=\frac{1}{b}$. נציב נתון זה במשוואה הנתונה: $5=(a\cdot b)^2$, ונקבל: $5=\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)^2$ ⇦ $5=(1)^2$ ⇦ $5=1$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, הרי שמצב זה לא ייתכן, כלומר זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

.4 **השאלה**: נתון: $\frac{x}{y} < 0$

$\frac{x}{y} < \frac{y}{x}$

איזו מהקביעות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

עלינו להציב מספרים אשר מקיימים את אי-השיוויונים הנתונים. מכיוון שנתון כי $\frac{x}{y} < 0$, הרי ש- x ו-y הם שוני סימן. על מנת שהמספרים יקיימו גם את אי-השוויון השני: $\frac{x}{y} < \frac{y}{x}$, נציב למשל $x = 2$ ו-$y = -1$, ונקבל: $\frac{2}{-1} < \frac{-1}{2} \Leftarrow -2 < -\frac{1}{2}$. נעבור לבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: $x < 0 < y$. מכיוון שמצאנו כי כאשר x = 2 ו- y = -1 הנתונים מתקיימים, הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < x + y$. כאשר $x = 2$ ו-$y = -1$, סכומם חיובי, ומכאן שבשלב זה התשובה אינה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $|y| < |x|$. כאשר $x = 2$ ו-$y = -1$, ערכו המוחלט של x גדול מערכו המוחלט של y, ומכאן שבשלב זה התשובה אינה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $x + y < 0$. כאשר $x = 2$ ו-$y = -1$, סכומם חיובי, ומכאן שהתשובה נפסלת.

פסלנו את תשובות (1) ו-(4), ולכן נציב כעת כי $x = -2$ ו-$y = 1$, הצבה שמקיימת אף היא את נתוני השאלה:

<u>תשובה (2)</u>: $0 < x + y$. כאשר $x = -2$ ו-$y = 1$, סכומם של x ו-y הוא שלילי, ומכאן שהתשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (3).

תשובה (3).

.5 **השאלה**: נתון: $a \cdot b < b \cdot c$

$a < 0$

איזו מן הטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

פתרון: לגבי כל אחת מן התשובות המוצעות, נבדוק האם בהינתן כי a שלילי, היא יכולה לקיים את הנתון $a \cdot b < b \cdot c$. התשובה הנכונה היא תשובה אשר אינה יכולה לקיים את הנתון.

<u>תשובה (1)</u>: $0 < b$ וגם $0 < c$. נתון כי a שלילי. מכאן שאם b חיובי, הרי שתוצאת המכפלה $a \cdot b$ באגף השמאלי של אי-השיווין היא בהכרח שלילית. אם b ו-c הם חיוביים הרי שתוצאת המכפלה $b \cdot c$ באגף הימני של אי-השיווין, היא בהכרח חיובית. מכיוון שכל מספר חיובי בהכרח גדול מכל מספר שלילי, הרי שטענה זו תיתכן, ומכאן שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $b < 0$ וגם $c < 0$. נתון כי a שלילי. מכאן שאם b שלילי הרי שתוצאת המכפלה $a \cdot b$ חיובית. אם b ו-c הם שליליים הרי שתוצאת המכפלה $b \cdot c$ אשר נמצאת באגף הימני של אי-השיוויון, היא בהכרח חיובית. מכיוון שיתכן שהמספר החיובי שקיבלנו באגף ימין יהיה גדול מהמספר החיובי שבאגף שמאל, טענה זו תיתכן, ומכאן שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $0 < b$ וגם $c < 0$. נתון כי a שלילי. מכאן שאם b חיובי הרי שתוצאת המכפלה $a \cdot b$ היא בהכרח שלילית. אם b חיובי ו-c שלילי, הרי שתוצאת המכפלה $b \cdot c$ אשר נמצאת באגף הימני של אי-השוויון, היא בהכרח שלילית. מכיוון שיתכן שהמספר השלילי אשר קיבלנו

באגף ימין יהיה גדול מהמספר השלילי שקיבלנו באגף שמאל, הטענה תיתכן. התשובה נפסלת.

תשובה (4): $b<0$ וגם $0<c$. נתון כי a שלילי. אם גם b שלילי, הרי שתוצאת המכפלה $a\cdot b$ היא בהכרח חיובית. אם b שלילי ו-c חיובי, הרי שתוצאת המכפלה $b\cdot c$ אשר נמצאת באגף הימני של אי-השיוויון, היא בהכרח שלילית. מכיוון שלא יתכן שהמספר השלילי אשר קיבלנו באגף ימין יהיה גדול מהמספר החיובי שקיבלנו באגף שמאל, הטענה לא תיתכן. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

6. **השאלה**: נתון: $a-b<0$

$$0<a+b$$

איזו מהטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

פתרון: ראשית, נבדוק האם ניתן לפשט את נתוני השאלה. לפי הנתון הראשון $a-b<0$, ומכאן שאם נחבר b לשני האגפים, נקבל כי: $a<b$. מכיוון שלא ניתן לפשט אופן דומה את הנתון השני, הרי שלא ניתן לפתור מבחינה אלגברית את השאלה, נעבור לבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): $0<b$. לפי הנתונים $a<b$, ומכאן שאם b חיובי, a יכול להיות מספר חיובי, שווה ל- 0 או מספר שלילי. נציב למשל כי b שווה ל-2 וכי a שווה ל-0, ונמצא כי שני אי-השיוויונים בנתונים מתקיימים, ומכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): $0<a$. לפי הנתונים $a<b$, ומכאן שאם a חיובי, b הוא בהכרח מספר חיובי. ניתן למשל, להציב כדוגמה כי a שווה ל-1, ו-b שווה ל-2, ולראות כי שני אי-השיוויונים בנתונים מתקיימים, ומכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): $b<0$. לפי הנתונים $a<b$, ומכאן שאם b שלילי, a הוא בהכרח מספר שלילי. אם a ו-b הם מספרים שליליים, לא יתכן שסכומם גדול מ-0, כלומר אי-השיוויון השני בהכרח אינו מתקיים, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

7. **השאלה**: נתון כי הביטוי $\left(x^3y\right)$ חיובי.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: הבנה אלגברית

הביטוי מורכב ממכפלה של שני גורמים: x^3 ו- y. מכיוון שנתון כי תוצאת המכפלה היא מספר חיובי, הרי ששני גורמי המכפלה הם חיוביים או ששני הגורמים הם שליליים.

כאשר שני הגורמים הם חיוביים, הטענה שבתשובה (1) אינה נכונה, כאשר שני גורמי המכפלה הם שליליים, הטענות שבתשובות (2) ו-(3) אינן נכונות, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (4).

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: נתון: x הוא מספר חיובי ו-y הוא מספר שלילי.

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **חיובי**?

פתרון: עלינו לבדוק את התשובות המוצעות ולבחון לגבי כל אחת מהן, באמצעות היגיון אלגברי או על-ידי הצבת מספרים, האם ערכה הוא בהכרח חיובי:

תשובה (1): x^2y. נתון כי x חיובי ו-y שלילי, ומכאן שהביטוי x^2 הוא בהכרח חיובי, שהרי מספר חיובי בכל חזקה הוא בהכרח חיובי. אם y שלילי, הרי שהמכפלה x^2 ב-y, היא מכפלה של מספר חיובי במספר שלילי, ומכאן שתוצאת המכפלה היא בהכרח מספר שלילי. התשובה נפסלת.

תשובה (2): x^2+y. נתון כי x חיובי ו-y שלילי, ומכאן שהביטוי x^2 הוא בהכרח חיובי, שהרי כאשר מעלים מספר חיובי בכל חזקה התוצאה היא בהכרח מספר חיובי.
אם y שלילי, הרי שהסכום x^2 ו-y יכול להיות חיובי, שווה ל-0, ויכול להיות מספר שלילי. כך למשל אם $x=1$ ו-$y=-10$, ערכו של הביטוי x^2+y יהיה שווה ל-(9-) 9- בפונט אחר $\left(x^2+y=1^2+(-10)=\right)$. אם $x=1$ ו-$y=-1$, הרי שערכו של הביטוי יהיה שווה ל-0 $\left(x^2+y=1^2+(-1)=\right)$.
מכיוון שמצאנו כי ערך הביטוי יכול להיות גם מספר שלילי וגם 0, ערכו של ביטוי זה אינו בהכרח חיובי, והתשובה נפסלת.

תשובה (3): $x-y$. נתון כי x חיובי ו-y שלילי. כאשר מחסרים ממספר חיובי מספר שלילי כלשהו, למעשה מחברים אליו מספר חיובי, ומכאן שהתוצאה תהיה בהכרח חיובית. נתבקשנו למצוא את התשובה אשר ערכה בהכרח חיובי, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $x\cdot y^3$. נתון כי x חיובי ו-y שלילי. כאשר מעלים מספר שלילי כלשהו בחזקה אי-זוגית, התוצאה היא שלילית. תוצאת מכפלה של מספר חיובי (x) במספר שלילי היא בהכרח שלילית. מכיוון שהתוצאה אינה חיובית, הרי שתשובה זו נפסלת.

תשובה (3).

---

9. **השאלה**: נתון: $x<0<y<z$

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **חיובי**?

פתרון: עלינו לבדוק את התשובות המוצעות ולבחון לגבי כל אחת מהן, באמצעות היגיון אלגברי או על-ידי הצבת מספרים, האם ערכה הוא בהכרח חיובי:

תשובה (1): $z-(y-x)$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים $(y-x)$.

נתון כי x שלילי ו-y חיובי. כאשר מחסרים מספר שלילי ממספר חיובי, התוצאה חיובית. מכאן שהביטוי $y-x$ הוא בהכרח חיובי.

נתון כי z הוא מספר חיובי. כאשר מחסרים מספר חיובי $(y-x)$ ממספר חיובי z, התוצאה יכולה להיות חיובית או שלילית, ומכאן שערכה של תשובה זו אינו בהכרח חיובי, ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $x^2+(y-z)$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים $(y-z)$.

נתון כי y ו-z הם מספרים חיוביים, כאשר z גדול מ-y. כאשר מחסרים ממספר מסוים (y) מספר הגדול ממנו (z), התוצאה שלילית, ומכאן שהביטוי $(y-z)$ הוא בהכרח שלילי.

x הוא מספר שלילי לפי הנתון. כאשר מעלים מספר שלילי בחזקה זוגית, התוצאה חיובית, ומכאן שהביטוי x^2 הוא חיובי. תוצאת החיבור של מספר חיובי $\left(x^2\right)$ ומספר שלילי $(y-z)$ יכולה להיות שווה ל-0, יכולה להיות חיובית ויכולה להיות שלילית, כלומר ערכה של התשובה אינו חיובי בהכרח, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $(x-y)\cdot(-z)$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים $(x-y)$.
נתון כי x שלילי ו-y חיובי. כאשר מחסרים מספר חיובי (y) ממספר שלילי (x), התוצאה בהכרח שלילית.
נתון כי z הוא מספר חיובי, ומכאן ש-(z-) הוא מספר שלילי. כאשר נכפול את המספר שלילי $(x-y)$ במספר השלילי $(-z)$, התוצאה תהיה בהכרח חיובית, שהרי כפל בין שני מספרים שליליים מניב תוצאה חיובית. מכיוון שנתבקשנו למצוא את התשובה אשר ערכה בהכרח חיובי, זו התשובה הנכונה.

<u>תשובה (4)</u>: $x+y+z$. נתון כי y ו- z הם מספרים חיוביים, ועל כן סכומם $(z+y)$ גם הוא בהכרח חיובי. נתון כי x הוא מספר שלילי. בחיבור המספר החיובי $(z+y)$ עם המספר השלילי x, התוצאה המתקבלת יכולה להיות חיובית, שלילית ויכולה להיות שווה ל- 0.
מכיוון שערך הביטוי שבתשובה אינו בהכרח חיובי, תשובה זו נפסלת.

תשובה (3).

---

10. **השאלה**: נתון: $x<y<z<0$

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **חיובי**?

פתרון: עלינו לבדוק את התשובות המוצעות ולבחון לגבי כל אחת מהן, באמצעות היגיון אלגברי או על-ידי הצבת מספרים, האם ערכה הוא בהכרח חיובי:

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{x\cdot z}{y}$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבמונה – $x\cdot z$.
נתון כי גם z וגם x הם מספרים שליליים. תוצאת המכפלה של שני מספרים שליליים היא בהכרח חיובית, ומכאן שהביטוי $x\cdot z$ הוא בהכרח חיובי.
עתה נבדוק את סימנו של המכנה: נתון כי y הוא מספר שלילי.
בחלוקת המספר החיובי שבמונה $(x\cdot z)$ במספר השלילי שבמכנה (y), התוצאה שתתקבל תהיה בהכרח שלילית, ועל כן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $x\cdot(y+z)$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים – $(y+z)$
מכיוון שלפי הנתון גם y וגם z הם מספרים שליליים. סכומם של שני מספרים שליליים הוא בהכרח שלילי, ועל כן הביטוי $(y+z)$ הוא בהכרח שלילי.
נתון כי x הוא מספר שלילי. תוצאת המכפלה של *x* השלילי בביטוי השלילי $(y+z)$ הוא בהכרח חיובי. מכיוון שמצאנו כי הביטוי הוא חיובי בהכרח, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $(y-x)\cdot z$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים - $(y-x)$
נתון כי y גדול מ-x. *כאשר* מחסרים ממספר מסוים מספר הגדול ממנו, התוצאה המתקבלת היא בהכרח חיובית, ומכאן שהביטוי $(y-x)$ הוא בהכרח חיובי.
נתון כי z הוא מספר שלילי. תוצאת המכפלה של מספר חיובי $(y-x)$ במספר שלילי z היא בהכרח שלילית, כלומר הביטוי $(y-x)\cdot z$ הוא בהכרח שלילי, ועל כן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{z}{-(x+y)}$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבמכנה – $-(x+y)$.
נתון כי גם *x* וגם *y* הם מספרים שליליים. סכומם של שני מספרים שליליים הוא בהכרח שלילי, ועל כן הביטוי $(x+y)$ הוא בהכרח שלילי. כאשר נכפול את הביטוי השלילי $(x+y)$, ב-*(1-)*, נקבל תוצאה חיובית. מכאן שהמכנה של הביטוי שבתשובה הוא חיובי.
עתה נבדוק את סימן המונה של הביטוי. נתון כי z הוא מספר שלילי. בחלוקת המספר השלילי שבמונה (z) במספר החיובי שבמכנה $(-(x+y))$ התוצאה בהכרח שלילית, ועל כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2).

---

11. **השאלה**: נתון: $a-b<0$

$a+b<0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב מספרים נוחים המקיימים את נתוני השאלה, למשל: $a=-2$ ו- $b=1$.
הצבה זו פוסלת את תשובות (1) ו-(3). מכיוון שלא ניתן למצוא דוגמה הפוסלת את הטענה כי a הוא מספר שלילי, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית
ראשית, נבדוק האם ניתן לפשט את נתוני השאלה. לפי הנתון הראשון $a-b<0$, ומכאן שאם נוסיף b לשני אגפי אי השיוויון, נקבל כי $a<b$.
לפי הנתון השני $a+b<0$. סכומם של שני מספרים הוא שלילי רק אם <u>לפחות</u> אחד מהם הוא שלילי.
כלומר, אחד מהמספרים חייב להיות שלילי ויתכן גם מצב בו שניהם שליליים.
מכיוון שלפי הנתון הראשון a הוא המספר הקטן מבין השניים, ולפי הנתון השני הסקנו כי לפחות אחד מהמספרים שלילי, הרי ש-a חייב להיות שלילי.

תשובה (2).

---

12. **השאלה**: נתון: $a\neq 0$

$0<c<b$

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **חיובי**?

פתרון: עלינו לבדוק את התשובות המוצעות ולבחון לגבי כל אחת מהן, באמצעות היגיון אלגברי או בדיקת מספרים שונים, האם ערכה הוא בהכרח חיובי:

<u>תשובה (1)</u>: $\left(a^2-b\right)+c$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים – $\left(a^2-b\right)$

לפי הנתון a שונה מ- 0. כאשר מעלים כל מספר השונה מ-0 בחזקה זוגית, התוצאה, בהכרח חיובית, ומכאן שהביטוי a^2 הוא חיובי.
נתון כי b הוא מספר חיובי. כאשר מחסרים ממספר חיובי (b) מספר חיובי אחר $\left(a^2\right)$,
התוצאה המתקבלת יכולה להיות חיובית, שלילית או שווה ל-0. לפיכך, לא ניתן לקבוע האם ערכו של הביטוי $\left(a^2-b\right)$ חיובי או שלילי או שווה ל-0.

מכאן, איננו יכולים לדעת האם הביטוי שבתשובה הוא בהכרח חיובי, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $a^2-\left(c-b\right)$. ראשית נבדוק את סימן הביטוי שבסוגריים $\left(c-b\right)$.

על פי הנתון b גדול מ-c. בחיסור מספר מסוים (b) ממספר הקטן ממנו (c), התוצאה המתקבלת בהכרח שלילית, ועל כן הביטוי $\left(c-b\right)$ בהכרח שלילי.
לפי הנתון a הוא מספר השונה מ-0. כאשר מעלים כל מספר השונה מ-0 בחזקה זוגית, התוצאה המתקבלת בהכרח חיובית, ומכאן שהביטוי a^2 הוא חיובי.
כאשר מחסרים מספר שלילי $\left(c-b\right)$ ממספר חיובי a^2 התוצאה המתקבלת בהכרח חיובית, כלומר הביטוי $a^2-\left(c-b\right)$ הוא חיובי בהכרח. נתבקשנו למצוא את התשובה אשר ערכה חיובי, ולכן זו התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק את התשובות הנותרות, נעשה זאת רק לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (3)</u>: $a+b+c$. נתון כי c ו- b הם מספרים חיוביים. כאשר מחברים שני מספרים חיובים התוצאה תהיה תמיד חיובית, ולכן $b+c$ הוא מספר חיובי. מכיוון שאיננו יודעים דבר אודות הסימן של a, לא ניתן לקבוע דבר לגבי סימן התוצאה של סכום המספרים $a+b+c$.

תשובה (4): $\left(b^2+c^2\right)\cdot a$. הביטוי שבתשובה מורכב ממכפלה של שני ביטויים - a ו- $\left(b^2+c^2\right)$, מכיוון שאיננו יודעים דבר אודות הסימן של a, אין אנו יכולים לקבוע בוודאות האם תוצאת המכפלה שבתשובה היא חיובית או שלילית, ועל כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2).

---

13. **השאלה**: נתון כי x ו-y הם מספרים שלמים אשר אחד מהם חיובי והאחר שלילי.

איזה מהביטויים הבאים בהכרח **שלילי**?

פתרון: עלינו לבדוק את התשובות המוצעות ולבחון לגבי כל אחת מהן, באמצעות היגיון אלגברי או על-ידי הצבת מספרים, האם ערכה הוא בהכרח שלילי:

תשובה (1): x^2y. כאשר מעלים בחזקת 2 כל מספר השונה מ-0 התוצאה חיובית, ולכן, על אף שאיננו יודעים האם x הוא חיובי או שלילי, הרי ש- x^2 הוא חיובי בהכרח.
אם y הוא המספר החיובי מבין השניים, הרי שתוצאת המכפלה x^2y חיובית גם היא, שכן מכפלה של מספר חיובי $\left(x^2\right)$ במספר חיובי (y) מניבה תוצאה חיובית.

אולם, אם y הוא המספר השלילי מבין השניים, הרי שתוצאת המכפלה x^2y תהיה שלילית, שכן מכפלה של מספר חיובי $\left(x^2\right)$ במספר שלילי (y) תניב תוצאה שלילית.

מצאנו כי ערכו של הביטוי שבתשובה יכול להיות גם חיובי וגם שלילי, ועל כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): x^2+y. הביטוי x^2 הוא בהכרח חיובי, כיוון שכל מספר השונה מ-0 בחזקה זוגית מניב תוצאה חיובית. אולם, מכיוון שאיננו יודעים מה סימנו של y, הרי שתוצאת הסכום x^2+y יכולה להיות חיובית או שלילית או שווה ל-0.
מכיוון שמצאנו כי ערכו של הביטוי **אינו** בהכרח שלילי, הרי שהתשובה נפסלת.

תשובה (3): $x\cdot y^3$. נתון כי x ו-y הם מספרים שלמים אשר אחד מהם שלילי והאחר חיובי. נבדוק את שני המצבים האפשריים.
אם x הוא המספר החיובי מבין השניים, ו-y הוא המספר השלילי: הביטוי y^3 הוא מספר שלילי, כיוון שבהעלאת מספר שלילי (y) בחזקה אי-זוגית, התוצאה המתקבלת היא שלילית.
לפיכך, במצב זה תוצאת המכפלה $x\cdot y^3$ תהיה שלילית, שכן מכפלה בין מספר חיובי (x) במספר שלילי $\left(y^3\right)$ תהיה תמיד שלילית.

אם y הוא המספר החיובי מבין השניים, ו-x הוא המספר השלילי: הביטוי y^3 הוא חיובי, כיוון שבהעלאת מספר חיובי (y) בחזקה אי-זוגית, התוצאה המתקבלת היא חיובית. לפיכך, תוצאת המכפלה $x\cdot y^3$ תהיה שלילית, שכן מכפלה בין מספר חיובי $\left(y^3\right)$ במספר שלילי (x) תהיה תמיד שלילית.
מכיוון שמצאנו כי בשני המקרים תוצאת המכפלה היא שלילית, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4): $x-y$. נתון כי x ו-y הם מספרים שלמים אשר אחד מהם שלילי והאחר חיובי. נבדוק את שני המצבים האפשריים.
אם x הוא המספר החיובי מבין השניים, ו-y הוא המספר השלילי: בחיסור מספר שלילי (y) ממספר חיובי (x), התוצאה המתקבלת חיובית בהכרח, ועל כן ערך הביטוי $x-y$ יהיה חיובי. אולם, אם y הוא המספר החיובי מבין השניים, ו- x הוא המספר השלילי: בחיסור מספר חיובי (y) ממספר שלילי (x), התוצאה המתקבלת שלילית בהכרח, ועל כן ערך הביטוי $x-y$ יהיה שלילי.

מכיוון שמצאנו כי ערכו של הביטוי **אינו** בהכרח שלילי, הרי שהתשובה נפסלת.

תשובה (3).

---

14. **השאלה**: נתון: $a \cdot b < b \cdot c$

$b < 0$

איזו מן הטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

פתרון: לגבי כל אחת מן התשובות המוצעות, נבדוק האם בהינתן כי b שלילי, היא יכולה לקיים את הנתון $a \cdot b < b \cdot c$. התשובה הנכונה היא תשובה אשר אינה יכולה לקיים את הנתון. כלומר, עלינו להציב דוגמה מספרית ולבדוק האם האפשרות המוצעת תיתכן.

<u>תשובה (1)</u>: $c < 0 < a$. נתון כי b שלילי. נציב באי-השוויון המוצע כי $b = -1$; $a = 2$ ו-$c = -1$, ונקבל: $a \cdot b < b \cdot c$ ⇦ $2 \cdot (-1) < (-1) \cdot (-1)$ ⇦ $-2 < 1$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, הרי שהטענה שבתשובה זו תיתכן, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $a < c < 0$. נתון כי b שלילי. נציב באי-השוויון המוצע כי $b = -1$; $a = -2$ ו-$c = -1$, ונקבל: $a \cdot b < b \cdot c$ ⇦ $(-2) \cdot (-1) < (-1) \cdot (-1)$ ⇦ $2 < 1$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון שאינו נכון, הרי שיתכן שזו התשובה הנכונה, אולם נמתין עד לפסילת התשובות הנותרות על מנת לסמנה.

<u>תשובה (3)</u>: $c < a$. נתון כי b שלילי. נציב באי-השוויון המוצע כי $b = -1$; $a = -1$ ו- $c = -2$, ונקבל: $a \cdot b < b \cdot c$ ⇦ $(-1) \cdot (-1) < (-1) \cdot (-2)$ ⇦ $1 < 2$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, הרי שהטענה בתשובה תיתכן, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $0 < a$ וגם $0 < c$. נתון כי b שלילי. נציב באי-השוויון המוצע כי $b = -1$; $a = 2$ ו-$c = 1$, ונקבל: $a \cdot b < b \cdot c$ ⇦ $2 \cdot (-1) < (-1) \cdot 1$ ⇦ $-2 < -1$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, הרי שהטענה שבתשובה זו תיתכן, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2).

---

15. **השאלה**: איזה מהביטויים הבאים הוא הגדול ביותר?

פתרון: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: $1^{-\frac{1}{3}}$. כאשר מעלים את המספר 1 בכל חזקה שהיא, התוצאה תמיד שווה ל- 1.

<u>תשובה (2)</u>: $(-1)^{-13}$. כאשר מעלים מספר שלילי (1-) בחזקה אי-זוגית (13-), התוצאה המתקבלת היא שלילית, ועל כן ערך הביטוי הוא (1-).

<u>תשובה (3)</u>: $(-1)^{9}$. כאשר מעלים מספר שלילי (1-) בחזקה אי-זוגית (9), התוצאה המתקבלת היא בהכרח שלילית, ועל כן ערך הביטוי הוא (1-).

<u>תשובה (4)</u>: $(-1)^{-3}$. כאשר מעלים מספר שלילי (1-) בחזקה אי-זוגית (3-), התוצאה המתקבלת היא בהכרח שלילית, ועל כן ערך הביטוי שווה ל- (1-).

מצאנו כי ערכה של תשובה (1) הוא הגדול ביותר, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

16. **השאלה**: נתון: $a < b$

$b < a + x$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית
נציב דוגמה מספרית המקיימת את הנתון, ונבדוק מי מהטענות שבתשובות המוצעות נכונה. נציב למשל כי $a = 1$; $b = 2$ ו- $x = 2$, ונקבל: $b < a + x$ ⇦ $2 < 1 + 2$.
תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות, ומכאן שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי
לפי הנתון השני: $b < a + x$. נחסר a משני האגפים, ונקבל: $b - a < x$.
לפי הנתון הראשון $a < b$, כלומר b גדול מ-a, ולכן הביטוי $b - a$ הוא "מספר גדול פחות מספר הקטן ממנו", ולפיכך הביטוי בהכרח חיובי. מצאנו כי x גדול ממספר חיובי, ומכאן ש-x בהכרח חיובי.
<u>הצעה נוספת לפישוט אלגברי:</u>
מכיוון שבשני האי-שיוויונים הנתונים מופיע הנעלם b לבדו, ניתן לאחד את שני האי-שיוויונים הנתונים לאי-שיוויון אחד בעל 3 אגפים: אם $a < b$ וגם $b < a + x$, ניתן לומר כי: $a < b < a + x$.
כעת לפי אי-השיוויון אשר קיבלנו בין שני הקצוות, נוכל לקבוע כי: $a < a + x$, כאשר מחסרים a משני האגפים נקבל כי $0 < x$, כלומר x בהכרח חיובי.

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: נתון: $-2 \le a \le \frac{2}{3}$

a^2 הוא לכל הפחות _______ ולכל היותר _______.

פתרון: בדיקת טווחים – מינימום ומקסימום
<u>מציאת ערך מינימלי</u>: ראשית, על מנת למצוא את הערך המינימלי של a^2, עלינו להבין כי a^2 הוא מספר שאינו שלילי – כלומר חיובי או 0, מכיוון שכאשר נעלה כל מספר בחזקה זוגית נקבל תוצאה שאינה שלילית. על כן, באופן עקרוני, הערך המינימלי עבור a^2 הוא 0. כדי שערכו של a^2 יהיה שווה ל-0, ערכו של a חייב להיות 0. לפי הנתון, יתכן ש- $a = 0$, ועל כן ניתן לומר כי הערך המינימלי אותו יכול לקבל הביטוי a^2 הוא. תשובות (3) ו-(4) נפסלות.

<u>מציאת ערך מקסימלי</u>: על מנת לקבל את הערך הגדול ביותר האפשרי עבור a^2, יש למצוא את הערך של a הרחוק ביותר מ-0 (חיובי או שלילי). זאת כיוון שגם אם a עצמו הוא שלילי, כאשר נעלה אותו בחזקת 2 נקבל תוצאה חיובית.
מהנתון ניתן לראות כי הערך של a הרחוק ביותר מ- 0 הוא (2-), כאשר נעלה אותו בחזקת 2 נקבל 4 $\left[(-2)^2 =\right]$, כלומר, מצאנו כי הערך המקסימלי עבור a^2 הוא 4. ניתן לפסול את תשובה (2) ולסמן את תשובה (1).

<u>הערה</u>: התשובות עשויות לעזור על מנת לרמוז מיהם הערכים של a שעלינו לבדוק.

תשובה (1).

---

18. **השאלה**: $a \cdot b + c < 0$

$b < c$

אם נוסיף לנתוני השאלה את הנתון _____ , נוכל לקבוע בוודאות כי a הוא מספר שלילי.

פתרון: בדיקת תשובותלפי הנתון הראשון, $a \cdot b + c < 0$. על מנת שסכום של שני מספרים יהיה שלילי, לפחות אחד מהם חייב להיות שלילי. כעת נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): $b < 0$. לפי הנתון $b < c$, ומכאן שאם b הוא מספר שלילי, c אשר גדול ממנו יכול להיות מספר חיובי או מספר שלילי.
נבדוק את שני המצבים:
כאשר c הוא מספר חיובי, ערך הביטוי $a \cdot b$ חייב להיות שלילי, כדי שהנתון $a \cdot b + c < 0$ יתקיים. בתשובה המוצעת נתון כי $b < 0$ ולכן, על-מנת שהביטוי $a \cdot b$ יהיה שלילי, a חייב להיות חיובי.
מכיוון שאנו מחפשים תשובה שלפיה נוכל לקבוע כי a בוודאות שלילי, ובתשובה זו מצאנו ש-a יכול להיות חיובי, ניתן לפסול תשובה זו מבלי לבדוק את המצב השני בו c הוא מספר שלילי.

תשובה (2): $0 < b$. לפי הנתון $b < c$, ומכאן שאם b הוא מספר חיובי, אז c אשר לפי הנתון גדול ממנו, בהכרח חיובי.
כדי שהנתון $a \cdot b + c < 0$ יתקיים, כאשר ידוע ש-b ו-c הם מספרים חיוביים, a חייב להיות שלילי, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $0 < c$. אם c הוא מספר חיובי, הרי שעל מנת שהנתון $a \cdot b + c < 0$ יתקיים, כלומר על מנת שאגף שמאל של המשוואה יהיה שלילי, ערך הביטוי $a \cdot b$ חייב להיות שלילי.
נתון כי $b < c$, ומכאן שאם c הוא מספר חיובי, הרי ש- b, אשר לפי הנתון קטן ממנו, יכול להיות מספר חיובי, מספר שלילי או שווה ל-0.
נבדוק את שני המצבים:
אם b הוא מספר חיובי, הרי שעל מנת שערך הביטוי $a \cdot b$ יהיה שלילי, a הוא בהכרח מספר שלילי.
אם b הוא מספר שלילי, וערך הביטוי $a \cdot b$ צריך להיות שלילי, הרי ש-a הוא מספר חיובי.
מכיוון שמצאנו כי לפי תשובה זו a יכול להיות גם מספר חיובי וגם מספר שלילי, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (4): $c < 0$. לפי תשובה זו, c הוא מספר שלילי. מכיוון שנתון כי $b < c$, ניתן לומר כי גם b הוא מספר שלילי. כאמור, על מנת לקיים את הנתון $a \cdot b + c < 0$, הרי שלפחות אחד מהביטויים שמרכיבים את הסכום שבאגף שמאל של אי-השוויון חייב להיות שלילי. אם c הוא מספר שלילי, ערך הביטוי $a \cdot b$ יכול להיות או חיובי או שלילי, ועל כן, על אף שלפי תשובה זו ניתן לקבוע כי b הוא מספר שלילי, מכיוון **שלא** ניתן לקבוע בוודאות כי a הוא מספר שלילי.

תשובה (2).

19. **השאלה**: a ו-b הם מספרים שלמים (חיוביים או שליליים).

נתון: $30 < a^2 < 70$

$10 < b^2 < 40$

ערכו המקסימלי של הביטוי $|a - b|$ הוא –

פתרון: על-מנת למצוא את הערך המקסימלי עבור הביטוי $|a - b|$, עלינו למצוא עבור $(a - b)$ את הערך הרחוק ביותר מאפס, חיובי או שלילי.

לפי הנתון, a ו-b הם מספרים שלמים, ולפיכך גם a^2 וגם b^2 הם מספרים שלמים.

נבחן את הערכים האפשריים עבור a ו-b לפי הנתונים:

אם a^2 הוא מספר <u>שלם</u> הגדול מ-30, ניתן לומר כי הערך המינימלי של a^2 הוא 36, כך ש- $a = \pm 6$.

אם a^2 הוא מספר <u>שלם</u> הקטן מ-70, ניתן לומר כי הערך המקסימלי של a^2 הוא 64, כך ש- $a = \pm 8$.

לפיכך, ניתן לומר כי הערך המינימלי עבור a הוא 8-, והערך המקסימלי עבורו הוא 8.

אם b^2 הוא מספר <u>שלם</u> הגדול מ-10, ניתן לומר כי הערך המינימלי של b^2 הוא 16, כך ש- $b = \pm 4$.

אם b^2 הוא מספר <u>שלם</u> הקטן מ-40, ניתן לומר כי הערך המקסימלי של b^2 הוא 36, כך ש- $b = \pm 6$.

לפיכך, ניתן לומר כי הערך המינימלי עבור b הוא 6-, והערך המקסימלי עבורו הוא 6.

על-מנת שערך הביטוי $(a - b)$ יהיה הרחוק ביותר מ-0, נבדוק את ההפרש המקסימלי האפשרי עבור a ו-b: ההפרש בערך מוחלט המקסימלי בין a ל-b שווה ל-14 (כאשר $a = 8$ ו- $b = -6$ או כאשר $a = -8$ ו- $b = 6$).

תשובה (1).

---

20. נתון: $x, y, z < 0$

$$\frac{x}{y} = 3$$

$$\frac{y}{z} = 2$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: <u>**דרך א'**</u>: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי x, y ו-z הם מספרים שליליים. נציב במקום מספרים המקיימים את הנתונים למשל: $y = -2$, $z = -1$ ו- $x = -6$, כעת נבדוק את הטענות שבתשובות על ידי הצבת המספרים הללו בתשובות.

<u>תשובה (1)</u>: $z < y$. מכיוון שמצאנו כי נתוני השאלה מתקיימים כאשר $y < z$ $(-2 < -1)$, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (2)</u>: $z < x$. מכיוון שמצאנו כי נתוני השאלה מתקיימים כאשר $x < z$ $(-6 < -1)$, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (3)</u>: $x < z$. מכיוון שמצאנו כי z אכן גדול מ-x $(-1 > -6)$, לא ניתן בשלב זה לפסול תשובה זו. נמשיך ונבדוק את תשובה (4).

<u>תשובה (4)</u>: $y < x$. מכיוון שמצאנו כי נתוני השאלה מתקיימים כאשר $x < y$ $(-2 > -6)$, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

כיוון שפסלנו את תשובות (1), (2) ו-(4) ניתן לסמן את תשובה (3) כתשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

נתון כי $\frac{x}{y}=3$. נכפול את שני האגפים ב-y, ונקבל: $x=3y$.

מכיוון ש-y הוא מספר שלילי, הרי שכפל שלו במספר הגדול מ-1 מקטין את התוצאה, , ומכאן ש- $x<y$.

נתון כי $\frac{y}{z}=2$. נכפול את שני האגפים ב-z, ונקבל: $y=2z$.

מכיוון ש-z הוא מספר שלילי, הרי שכפל שלו במספר הגדול מ-1 מקטין את התוצאה, , ומכאן ש- $y<z$.

מצאנו כי: $x<y<z$, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (3).

תשובה (3).