

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(2)	(3)	(3)	(2)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)	(1)	תשובה

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	שאלה
(4)	(1)	(3)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	תשובה

28	27	26	25	24	23	22	21	שאלה
(3)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(2)	תשובה

הסברים

1. השאלה: נתון: $\frac{y}{x} = \frac{y-1}{x-1}$; $x \neq 0,1$

$y = ?$

פתרון: פישוט אלגברי

נכפול את שני האגפים ב- $x(x-1)$, ונקבל: $y(x-1) = x(y-1)$ $\Leftrightarrow xy - y = xy - x$
 נחסר xy משני האגפים, ונקבל: $-y = -x$
 נכפול את שני האגפים ב- (-1) , ונקבל: $y = x$

תשובה (1).

2. השאלה: נתון: $y = \frac{2a}{a+2}$ ($a \neq 0 ; a \neq -2$)

$\frac{1}{y} = ?$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

נתבקשנו למצוא מה ערכו של הביטוי $\frac{1}{y}$, ולכן נציב את הנתון $\left(y = \frac{2a}{a+2}\right)$ בביטוי, ונקבל: $\frac{1}{\frac{2a}{a+2}}$

מכיוון שחילוק הוא כפל בהופכי של השבר שבו מחלקים, הרי ש: $\frac{1}{\frac{2a}{a+2}} \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{a+2}{2a} \Leftrightarrow \frac{a+2}{2a}$

מכיוון שאין תשובה הזזה לביטוי שקיבלנו, נפשט את הביטוי על ידי פירוק המונה, ונקבל:

$$\frac{1}{\frac{2a}{a+2}} \Leftrightarrow \frac{a^1 + 2^1}{2a_1} \Leftrightarrow \frac{a+2}{2a}$$

ד"ר ב' : הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שלא נשאלנו מה ערכו של a , נוכל להציב במקומו מספר נוח בנתון $y = \frac{2a}{a+2}$, למשל $a = 1$,

ולקבל: $y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{2 \cdot 1}{1+2} \Leftrightarrow y = \frac{2a}{a+2}$.

$$\left(\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \right) \frac{3}{2} \text{ שווה ל-} \frac{1}{y} \text{ - המבוקש - ומכאן שהביטוי המבוקש - } y = \frac{2}{3}$$

נציב $a = 1$ בתשובות המוצעות ונמצא כי ערךן של תשובות (2), (3) ו-(4).

תשובה (1).

3. השאלה: נתון: $5 < \frac{x+y}{3}$, $y < 7$

איזה מהאי-שוויונות הבאים מתקיים בהכרח?

פתרון: **ד"ר א' :** פשוט אלגברי

ראשית, נפשט את אי-השוויון על ידי כפל שני האגפים ב-3, ונקבל: $15 < x + y \Leftrightarrow 5 < \frac{x+y}{3}$.

על פי הנתונים ערכו של y קטן מ-7, ומכאן שעל מנת שסכומם של x ו- y יהיה גדול מ-15, ערכו של x בהכרח גדול מ-8.

ד"ר ב' : הצבת דוגמה מספרית

נתון כי $y < 7$, ולכן נציב לדוגמה כי $y = 6$, ונקבל: $5 < \frac{x+y}{3} \Leftrightarrow 5 < \frac{x+6}{3}$

נכפול ב-3 את שני האגפים, ונקבל: $15 < x + 6$.

נחסר 6 משני האגפים, ונקבל כי $9 < x$.

מצאנו כי כאשר $x, y = 6$, x חייב להיות מספר אשר גדול מ-9, למשל שווה ל-10.

תשובה (1): $x \leq 4$. מצאנו כי x יכול להיות שווה ל-10, ולפיכך התשובה נפסלת.

תשובה (2): $x < y$. מכיוון שמצאנו כי כאשר $y = 6$, x יכול להיות שווה ל-10, הרי שמצאנו כי x גדול מ- y , ולפיכך התשובה נפסלת.

תשובה (3): $8 < x$. מצאנו כי x יכול להיות שווה ל-10, ולכן לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.

תשובה (4): $x + y \leq 18$. מצאנו כי כאשר y שווה ל-6, x יכול להיות שווה ל-10, ומכאן שסכומם של x

ו- y יכול להיות שווה ל-16 ($x + y = 10 + 6 = 16$), כלומר קטן מ-18, ולכן לא ניתן לפסול

בשלב זה את התשובה.

פסלנו רק את תשובות (1) ו-(2), ולכן על מנת לפסול תשובה נוספת, עלינו להציב פעם נוספת.

מצאנו כי $9 < x$, ומכאן ש- x יכול להיות שווה למשל ל-50. אם כאשר y שווה ל-6, x יכול להיות שווה

ל-50, הרי שסכומם של x ו- y יכול להיות שווה ל-56 ($x + y = 50 + 6 = 56$), כלומר גדול מ-18, ולכן ניתן

לפסול את תשובה (4).

תשובה (3).

4. השאלה: x, y ו- z הם מספרים שלמים וחייביים.

$$y = x + 2 \quad \text{נתון:}$$

$$z = y + 2$$

$$x \cdot y = x + y + z$$

$$x = ?$$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

לפנינו מערכת משוואות, אשר התבקשנו לבודד מתוכה את ערכו של x , ומכאן שעלינו להיפטר מ- y ו- z .
על מנת לעשות זאת, נבטא את y ו- z באמצעות x , ונציב את הערכים שנקבל במשוואה השלישית.

על פי המשוואה הראשונה: $y = x + 2$. מכיוון שהמשוואה מבטאת את y באמצעות x , נציב ערך זה

$$(x + 2) \text{ במשוואה השלישית במקום } y.$$

על פי המשוואה השנייה: $z = y + 2$. מכיוון שהמשוואה מבטאת את z באמצעות y , ואנו רוצים לבטא

$$\text{את } z \text{ באמצעות } x. \text{ נציב במקום } y \text{ את הביטוי } (x + 2), \text{ ונקבל: } z = y + 2 \Leftrightarrow z = (x + 2) + 2$$

$$z = x + 4 \Leftrightarrow z = x + 2 + 2$$

כעת לאחר שמצאנו את ערכו של z במונחים של x , נציב ערך זה במשוואה השלישית, ונקבל:

$$\Leftrightarrow x \cdot y = x + y + z \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = x + (x + 2) + (x + 4) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x + x + 2 + x + 4$$

$$. x^2 + 2x = 3x + 6$$

נוציא גורם משותף מכל אחד מהאגפים, ונקבל: $x^2 + 2x = 3x + 6 \Leftrightarrow x \cdot (x + 2) = 3(x + 2)$

נחלק את שני האגפים ב- $(x + 2)$, ונקבל: $x = 3$

דרך ב': בדיקת תשובות. נבדוק כל אחת מן התשובות המוצעות:

תשובה (1): 1. לפי המשוואה הראשונה: $y = x + 2$, ומכאן שכאשר x שווה ל-1, הרי ש- $y = 3$

$$. (y = x + 2 = 1 + 2 = 3)$$

לפי המשוואה השנייה: $z = y + 2$. מכאן שאם y שווה ל-3, הרי ש- z שווה ל-5

$$. (z = y + 2 = 3 + 2 = 5)$$

לפי המשוואה השלישית: $x \cdot y = x + y + z$. נציב במשוואה $x = 1$; $y = 3$; $z = 5$

מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה: $3 \neq 9$ ($1 \cdot 3 \neq 1 + 3 + 5$), ולכן ניתן לפסול את

התשובה.

תשובה (2): 6. לפי המשוואה הראשונה: $y = x + 2$, ומכאן שכאשר x שווה ל-6, הרי ש- $y = 8$

$$. (y = x + 2 = 6 + 2 = 8)$$

לפי המשוואה השנייה: $z = y + 2$. מכאן שאם y שווה ל-8, הרי ש- z שווה ל-10

$$. (z = y + 2 = 8 + 2 = 10)$$

לפי המשוואה השלישית: $x \cdot y = x + y + z$. נציב במשוואה $x = 6$; $y = 8$; $z = 10$,

מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה: $48 \neq 24$ ($6 \cdot 8 \neq 6 + 8 + 10$), ולכן ניתן לפסול את

התשובה.

תשובה (3): 3. לפי המשוואה הראשונה: $y = x + 2$, ומכאן שכאשר x שווה ל-3, הרי ש- $y = 5$

$$. (y = x + 2 = 3 + 2 = 5)$$

לפי המשוואה השנייה: $z = y + 2$. מכאן שאם y שווה ל-5, הרי ש- z שווה ל-7

$$. (z = y + 2 = 5 + 2 = 7)$$

לפי המשוואה השלישית: $x \cdot y = x + y + z$. נציב במשוואה $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$,

קיבלנו משוואה נכונה, שכן: $15 = 15$ ($3 \cdot 5 = 3 + 5 + 7$), ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3)

5. **השאלה:** נתון: x ו- y הם מספרים עוקבים, $0 < x < y$

$$5x = x \cdot y$$

$$y = ?$$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה על ידי חלוקת שני אגפי המשוואה ב- x (אשר לפי הנתון שונה מ-0), ונקבל: $5 = y$.

דרך ב': בדיקת תשובות

תשובה (1): 6. אם $y = 6$, הרי ש- x שהוא המספר העוקב הקטן ממנו שווה ל-5, נציב מספרים אלו במשוואה, ונקבל: $5 \cdot 6 = 5 \cdot 5 \Leftrightarrow 30 = 25$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 5. אם $y = 5$, הרי ש- x שהוא המספר העוקב הקטן ממנו שווה ל-4, נציב מספרים אלו במשוואה, ונקבל: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow 20 = 20$. המשוואה שקיבלנו נכונה, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2)

6. **השאלה:** נתון: $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 48$

$$x = ?$$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

נפשט את אגף שמאל של המשוואה באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר, ונקבל:

$$12x = 48 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 = 48 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = 48$$

נחלק את שני האגפים ב-4, ונקבל: $x = 4$.

דרך ב': בדיקת תשובות

נציב את התשובות המוצעות במשוואה הנתונה, ונבדוק מי מהן מקיימת את המשוואה:

תשובה (1): 5. כאשר נציב $x = 5$ במשוואה הנתונה, נקבל: $(5 + 3)^2 - (5 - 3)^2 = 48$

$8^2 - 2^2 = 48 \Leftrightarrow 64 - 4 = 48 \Leftrightarrow 60 = 48$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 2. נציב $x = 2$ במשוואה הנתונה, ונקבל: $(2 + 3)^2 - (2 - 3)^2 = 48 \Leftrightarrow 5^2 - (-1)^2 = 48$

$25 - 1 = 48 \Leftrightarrow 24 = 48$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): 3. נציב $x = 3$ במשוואה הנתונה, ונקבל: $(3 + 3)^2 - (3 - 3)^2 = 48 \Leftrightarrow 6^2 - 0^2 = 48$

$36 - 0 = 48 \Leftrightarrow 36 = 48$. המשוואה אינה נכונה, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): 4. נציב $x = 4$ במשוואה הנתונה, ונקבל: $(4 + 3)^2 - (4 - 3)^2 = 48 \Leftrightarrow 7^2 - 1^2 = 48$

$49 - 1 = 48 \Leftrightarrow 48 = 48$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4)

7. **השאלה:** נתון: $\frac{3x-4}{2} - \frac{3x-4}{5} = 6$
 $x = ?$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

נכפול את שני האגפים של המשוואה ב-10, ונקבל: $5 \cdot (3x-4) - 2 \cdot (3x-4) = 60$
 $9x - 12 = 60 \Leftrightarrow 15x - 20 - 6x + 8 = 60$
 נוסיף 12 לשני האגפים, ונקבל: $9x = 72$
 נחלק את שני האגפים ב-9, ונקבל: $x = 8$

דרך ב': בדיקת תשובות

נבדוק מי מהתשובות מקיימת את המשוואה הנתונה:

תשובה (1): 10. נציב כי x שווה ל-10 במשוואה הנתונה, ונקבל: $\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 10 - 4}{2} - \frac{3 \cdot 10 - 4}{5} = 6$
 $\Leftrightarrow \frac{26}{2} - \frac{26}{5} = 6 \Leftrightarrow 13 - 5\frac{1}{5} = 6 \Leftrightarrow 7\frac{4}{5} = 6$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, התשובה נפסלת.

תשובה (2): 8. נציב כי x שווה ל-8 במשוואה הנתונה, ונקבל: $\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 8 - 4}{2} - \frac{3 \cdot 8 - 4}{5} = 6$
 $\Leftrightarrow \frac{20}{2} - \frac{20}{5} = 6 \Leftrightarrow 10 - 4 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

8. **השאלה:** נתון: $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$
 $x = ?$

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

נציב את התשובות במשוואה הנתונה, על מנת לבדוק איזו תשובה מקיימת את הנתון:

תשובה (1): y^6 . אם נציב במקום x את הערך הנתון, נקבל: $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y^6} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y^{\frac{6}{3}} = y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y^2 = y^{\frac{1}{2}}$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): y^9 . אם נציב במקום x את הערך הנתון, נקבל: $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y^9} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y^{\frac{9}{3}} = y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y^3 = y^{\frac{1}{2}}$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): $y^{\frac{3}{2}}$. אם נציב במקום x את הערך הנתון, נקבל: $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה, ואין צורך להמשיך ולבדוק את התשובה הנותרת.

דרך ב': פישוט אלגברי

על מנת לפשט משוואה אשר באחד מאגפיה יש שורש, יש לבצע את הפעולה ההפוכה. כלומר להעלות בחזקה, את שני האגפים, על מנת להיפטר מן השורש. נתבקשנו למצוא את x , ומכיוון ש- x נמצא תחת שורש שלישי, נעלה את שני האגפים בחזקת 3, ונקבל:

$$x = y^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$$

תשובה (3).

9. השאלה: נתון: $x^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}$; $x \neq 0$

$x = ?$

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

מכיוון שהחזקות בשאלה זו הן שברים, הרי שמדובר למעשה בשאלת שורשים. מכיוון שמדובר בשבר שהמכנה שלו הוא 3, נבדוק קודם כל מספרים שיש להם שורש שלישי שלם. מכיוון שיש רק תשובה אחת שיש לה שורש שלישי שלם, כדאי להתחיל מבדיקת תשובה זו:

תשובה (3): $8^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}$

על מנת לפשט את המשוואה, נשתמש בחוק השורשים $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ונקבל: $8^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$

$$4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{8^1} \Leftrightarrow$$

מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, ולכן זו התשובה הנכונה. אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

דרך ב': פישוט אלגברי

על מנת לבודד את x באחד האגפים, נחלק את שני אגפי המשוואה ב- $x^{\frac{1}{3}}$, ונקבל: $x^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}$

$$x^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$x = 8 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

תשובה (3).

10. השאלה: נתון: $5^{x-6} = \left(\frac{1}{25}\right)^2$

$x = ?$

פתרון: זרז א' פישוט אלגברי

בשאלות חזקות אנו שואפים לעבוד עם בסיסים זהים, לכן על מנת לפשט את המשוואה נביע את כל

הביטויים באמצעות הבסיס 5, ונקבל: $5^{x-6} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \Leftrightarrow 5^{x-6} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 \Leftrightarrow 5^{x-6} = (5^{-2})^2$

$5^{x-6} = 5^{-4} \Leftrightarrow 5^{x-6} = 5^{-2 \cdot 2}$

כעת, לאחר שבשני האגפים של המשוואה יש בסיסים שווים, נשווה בין המעריכים, ונקבל: $x - 6 = -4$

$x = 2 \Leftrightarrow x = -4 + 6$

תשובה (2)

זרז ב': בדיקת תשובות

נציב את התשובות המוצעות במשוואה הנתונה, ונבדוק מי מהן מקיימת את המשוואה:

1. תשובה (1): נציב כי x שווה ל-1 במשוואה, ונקבל: $5^{1-6} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \Leftrightarrow 5^{-5} = (5^{-2})^2$

$5^{-5} = 5^{-4}$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

2. תשובה (2): כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $5^{2-6} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \Leftrightarrow 5^{-4} = (5^{-2})^2$

$5^{-4} = 5^{-4}$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

11. השאלה: נתון: $x = a^2$

$y = a$

$\left(\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x}{x^2 \cdot y}}\right)^2 = ?$

פתרון: נפשט את הביטוי על ידי פישוט הביטוי שבתוך הסוגריים, לפני שנעלה אותו בחזקת 2, ונקבל:

$\left(\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x}{x^2 \cdot y}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 \cdot y}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y \cdot x^2 \cdot y}{x \cdot x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2 \cdot x^2}{1}\right)^2$

החזקות לפני חזקה בחזקה שווה למכפלת החזקות, ומכאן שהביטוי $\left(\frac{1}{x^3}\right)^2$ שווה ל- $\frac{1}{x^{3 \cdot 2}}$ כעת נשתמש בחוק

x^{-6} . מכיוון שלא מצאנו תשובה הזזה לביטוי שקיבלנו, נמשיך ונפשט את הביטוי תוך שימוש בנתוני

השאלה, לפיהם $x = a^2$, ומכאן ש: $x^{-6} \Leftrightarrow (a^2)^{-6} \Leftrightarrow a^{2 \cdot (-6)} \Leftrightarrow a^{-12}$.

מכיוון שאין תשובה הזזה לביטוי, נעשה שימוש בנתון השני, לפיו: $y = a$, ונמצא כי a^{-12} שווה ל-

$\frac{1}{y^{12}}$ או y^{-12} .

תשובה (3).

12. השאלה: נתון: $3^a = (3^{b+c})^d$

$a = ?$

פתרון: פשוט אלגברי

מכיוון שהעלאת חזקה בחזקה היא כפל בין החזקות, נפשט את הביטוי שבצד ימין של המשוואה, ונקבל:

$$3^{db+dc} \Leftrightarrow 3^{d(b+c)} \Leftrightarrow (3^{b+c})^d$$

מצאנו כי: $3^a = 3^{db+dc}$

כאשר הבסיסים בשני האגפים של משוואה מעריכית שווים, ניתן להשוות בין המעריכים, נקבל:

$$a = db + dc \Leftrightarrow 3^a = 3^{db+dc}$$

ומכאן שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

תשובה (3).

13. השאלה: נתון: $3\sqrt{x} = 9^{-2}$; $(0 < x)$

$x = ?$

פתרון: זרז א': פשוט אלגברי

על מנת לפשט את המשוואה 'ניפטרו' מהשורש הריבועי על ידי העלאת שני האגפים בריבוע:

$$9x = 9^{-4} \Leftrightarrow 9\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 9^{2(-2)} \Leftrightarrow 3^2(\sqrt{x})^2 = (9^{-2})^2$$

על מנת לבודד את x , נחלק ב-9 את שני האגפים, ונקבל: $\frac{9x}{9} = \frac{9^{-4}}{9}$ $\Leftrightarrow x = 9^{-4-1} \Leftrightarrow x = 9^{-5}$

זרז ב': בדיקת תשובות

נציב את התשובות המוצעות במשוואה, ונבדוק איזו תשובה מקיימת את המשוואה:

תשובה (1): 9^{-4} . כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $3\sqrt{9^{-4}} = 9^{-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 9^{-2} = 9^{-2}$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 9^4 . כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $3\sqrt{9^4} = 9^{-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 9^2 = 9^{-2}$. מכיוון שקיבלנו משוואה לא נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): 9^{-5} . כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $3\sqrt{9^{-5}} = 9^{-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 9^{-\frac{5}{2}} = 9^{-2}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^{-2.5} = 9^{-2}$. על מנת לבדוק את המשוואה שקיבלנו, נמירי את כל המספרים

לבסיס זהה של 3, ונקבל: $3 \cdot (3^2)^{-2.5} = (3^2)^{-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2(-2.5)} = 3^{2(-2)}$

$\Leftrightarrow 3^1 \cdot 3^{-5} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{1+(-5)} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{-4} = 3^{-4}$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו

התשובה הנכונה.

תשובה (3).

14. השאלה: נתון: $0 < a, b$

$$a \cdot b = 12$$

$$\frac{a}{b} = 3$$

$$a + b = ?$$

פתרון: דרך א': פשוט אלגברי

על מנת לפתור מערכת משוואות יש להיפטר ממשתנים, בדרך כלל על ידי חילוף והצבה.

נפשט את המשוואה השנייה, לפיה $\frac{a}{b} = 3$ באמצעות כפל של שני האגפים ב- b , ונקבל:

$$a = 3b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 3$$

כעת, לאחר שמצאנו את ערכו של a , נציב נתון זה במשוואה הראשונה ($a \cdot b = 12$), ונקבל:

$$3b^2 = 12 \Leftrightarrow 3b \cdot b = 12$$

נחלק את שני האגפים ב-3, ונקבל: $b^2 = 4$.

מנתון זה ניתן להסיק כי $b = \pm 2$, אולם מכיוון שנתון כי a ו- b חיוביים, הרי שהמסקנה היא ש- $b = 2$.

מכיוון שלפי המשוואה הראשונה $a = 3b$, הרי ש- $a = 6$ ($a = 3b = 3 \cdot 2 = 6$).

מצאנו כי ערכו של הביטוי $a + b$ שווה ל-8 ($a + b = 6 + 2 = 8$).

דרך ב': דוגמה מספרית

מכיוון שלפי התשובות מדובר במספרים שלמים, נחפש צמד מספרים המקיימים את שתי המשוואות.

נתון כי $a \cdot b = 12$. צמדי המספרים השלמים המקיימים את הנתון הם: 1 ו-12; 2 ו-6; 3 ו-4.

לפי המשוואה השנייה $\frac{a}{b} = 3$. מבין שלוש הצמדים רק הצמד 6 ו-2 מקיים את המשוואה, כאשר $a = 6$

$$\text{ו-} b = 2$$

מצאנו את ערכם של שני המשתנים, הרי שערכו של הביטוי $a + b$ שווה ל-8 ($a + b = 6 + 2 = 8$).

תשובה (2).

15. השאלה: נתון: $0 < x, y$

$$x \cdot y = 20$$

$$\frac{x}{y} = 5$$

$$x + y = ?$$

פתרון: דרך א': פשוט אלגברי

על מנת לפתור מערכת משוואות יש להיפטר ממשתנים, בדרך כלל על ידי חילוף והצבה.

נפשט את המשוואה השנייה, לפיה $\frac{x}{y} = 5$ באמצעות כפל של שני האגפים ב- y , ונקבל:

$$x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 5$$

נציב נתון זה במשוואה הראשונה ($x \cdot y = 20$) ונקבל: $5y^2 = 20 \Leftrightarrow 5y \cdot y = 20$

נחלק את שני האגפים ב-5, ונקבל: $y^2 = 4$.

מנתון זה ניתן להסיק כי $y = \pm 2$, אולם מכיוון שנתון כי x ו- y חיוביים, הרי ש- $y = 2$.

מכיוון שלפי המשוואה השנייה $x = 5y$, הרי ש- $x = 10$ ($x = 5y = 5 \cdot 2 = 10$).

מצאנו כי ערכו של הביטוי $x + y$ שווה ל-12 ($x + y = 10 + 2 = 12$).

דרך ב': דוגמה מספרית

מכיוון שלפי התשובות מדובר במספרים שלמים, נחפש צמד מספרים המקיימים את שתי המשוואות. נתון כי $x \cdot y = 20$. זוגות המספרים המקיימים את הנתון הם: 1 ו-20; 2 ו-10; 4, 5 ו-10.

מכיוון שלפי המשוואה השנייה $\frac{x}{y} = 5$, הרי שרק הצמד 2 ו-10 מקיים את שתי המשוואות.

מכאן שערכו של הביטוי $x + y$ שווה ל-12 ($x + y = 10 + 2 = 12$).

תשובה (2).

16. השאלה: נתון: $a^2 b^2 = (ab + 1)^2$

$$2 < a$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

מכיוון שכל התשובות מתייחסות ל- b , נפשט את המשוואה מתוך רצון לבדד את b באחד האגפים. ראשית, נפשט את אגף ימין של המשוואה באמצעות שימוש בנוסחת הכפל המקוצר הראשונה, ונקבל:

$$a^2 b^2 = a^2 b^2 + 2ab \cdot 1 + 1^2 \Leftrightarrow a^2 b^2 = (ab + 1)^2$$

נחסר $a^2 b^2$ ו-1 משני האגפים, ונקבל: $-1 = 2ab$

נחלק ב- $2a$ את שני האגפים, ונקבל: $-\frac{1}{2a} = b$.

מכיוון שערכו של a גדול מ-2, ניתן לקבוע כי b הוא שבר שלילי בין $-\frac{1}{4}$ ל-0.

דרך ב': בדיקת דוגמה מספרית

נתון כי $2 < a$ נציב למשל כי $a = 3$, ונקבל: $a^2 b^2 = (ab + 1)^2 \Leftrightarrow 3^2 b^2 = (3b + 1)^2$

$$9b^2 = 9b^2 + 6b + 1$$

נחסר $9b^2$ ו-1 משני האגפים, ונקבל: $-1 = 6b$

נחלק את שני האגפים ב-6, ונקבל: $-\frac{1}{6} = b$. תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות.

תשובה (3).

17. השאלה: נתון: $-2x^2 \leq -32$

איזה מערכי ה- x הבאים אינו מקיים את האי-שוויון?

פתרון: פישוט אלגברי + בדיקת תשובות

נחבר לשני האגפים $2x^2$ ו-32, ונקבל: $32 \leq 2x^2$.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $16 \leq x^2$.

כעת נבדוק מי מהתשובות המוצעות אינה מקיימת את אי-השוויון.

תשובה (1): 10. נציב $x = 10$ באי-השוויון שקיבלנו לאחר הפישוט, ונקבל: $16 \leq 10^2 \Leftrightarrow 16 \leq 100$.

מכיוון שאי-השוויון שקיבלנו הוא נכון, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): -2. נציב $x = -2$ באי-השוויון, ונקבל: $16 \leq (-2)^2 \Leftrightarrow 16 \leq 4$. מכיוון שאי-השוויון

שקיבלנו אינו נכון, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

18. השאלה: נתון: $0 < x, y, z$

$$x + y + z = 60$$

$$x < y$$

איזו מהאפשרויות הבאות לא תיתכן?

פתרון: בדיקת תשובות

לגבי כל אחת מן התשובות המוצעות, נבדוק האם ניתן לקיים את נתוני השאלה. אנו מחפשים תשובה שאינה יכולה לקיים את הנתונים.

תשובה (1): $30 < y$

נתון כי y גדול מ- x , וכי סכומם של שלושת המספרים החיוביים x, y ו- z הוא 60. כעת נבדוק האם קיימים שלושה מספרים המקיימים הן את נתוני השאלה והן את הנתון שבתשובה. שלושה מספרים כאלו הם לדוגמה: $x = 19, y = 31, z = 10$. מכיוון שמצאנו כי y יכול להיות גדול מ-30, התשובה נפסלת.

תשובה (2): $z = 30$

נתון כי y גדול מ- x , וכי סכומם של שלושת המספרים החיוביים x, y ו- z הוא 60. שלושה מספרים המקיימים הן את נתוני השאלה והן את הנתון שבתשובה, הם למשל: $x = 10, y = 20, z = 30$. מצאנו כי z יכול להיות שווה ל-30, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x = 30$

נתון כי y גדול מ- x , וכי סכומם של שלושת המספרים החיוביים x, y ו- z הוא 60. אם x שווה ל-30, ו- y גדול ממנו, הרי שסכומם של x ו- y בהכרח גדול מ-60, ולכן על מנת שסכומם של שלושת המספרים יהיה שווה ל-60, צריך להיות שלילי. מכיוון שנתון כי שלושת המספרים חיוביים, הרי שמצב זה אינו אפשרי.

תשובה (3).

19. השאלה: נתון: $z = \frac{x^2 - 1}{y}$, $(y \neq 0)$

$$\frac{\frac{z}{x-1}}{y} = ?$$

פתרון: בכל התשובות מופיעים ביטויים התלויים ב- x , ולפיכך עלינו 'להיפטר' מ- y ו- z .

$$\frac{x^2 - 1}{y} \cdot \frac{y}{x-1} \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2 - 1}{y}}{\frac{x-1}{y}} \Leftrightarrow \frac{z}{\frac{x-1}{y}} \text{ : ונקבל: } \left(z = \frac{x^2 - 1}{y} \right)$$

נציב בביטוי את ערכו של z

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x^2 - 1}{y} \cdot \frac{y}{x-1}}{\frac{x-1}{y}} \text{ : ונקבל:}$$

$$\frac{(x+1) \cdot (x-1)}{y} \cdot \frac{y}{(x-1)}$$

נצמצם את המונה והמכנה ב- y וב- $(x-1)$, ונקבל כי הביטוי שווה ל: $(x+1)$

תשובה (1).

20. השאלה: נתון: $\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 4$, $x, y \neq 0$

$x - y = ?$

פתרון: פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה על ידי כפל של שני האגפים ב- xy , ונקבל: $\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 4xy$

$2x^2 + 2y^2 - 4xy = 0$

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

ניתן לפשט את הביטוי באגף שמאל לפי נוסחת הכפל המקוצר השנייה ל- $(x - y)^2$, ומכאן ש: $(x - y)^2 = 0$

על מנת ש- $(x - y)^2 = 0$ הרי שבהכרח: $x - y = 0$.

תשובה (4).

21. השאלה: נתון: $2\sqrt{x} = 8^2$

$x = ?$

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

על מנת לפשט את המשוואה 'ניפטר' מהשורש הריבועי על ידי העלאת שני האגפים בריבוע: $2\sqrt{x} = 8^2 \Leftrightarrow$

$4x = 8^4 \Leftrightarrow 4x = 8^{2 \cdot 2} \Leftrightarrow 2^2(\sqrt{x})^2 = (8^2)^2$

מכיוון שהבסיס בכל התשובות הוא 2, נימיר את כל המספרים לבסיס זה, ונקבל: $2^2 x = (2^3)^4 \Leftrightarrow 4x = 8^4$

$\Leftrightarrow 2^2 x = 2^{12} \Leftrightarrow 2^2 x = 2^{3 \cdot 4}$

נחלק ב- 2^2 את שני האגפים, ונקבל: $\frac{2^2 x}{2^2} = \frac{2^{12}}{2^2} \Leftrightarrow x = 2^{10} \Leftrightarrow x = 2^{12-2}$

דרך ב': בדיקת תשובות

נציב את התשובות המוצעות במשוואה, ונבדוק איזו תשובה מקיימת את המשוואה:

תשובה (1): 2^{11} . כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $2 \cdot \sqrt{2^{11}} = 8^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\frac{11}{2}} = (2^3)^2$

$\Leftrightarrow 2^1 \cdot 2^{5.5} = 2^{3 \cdot 2} \Leftrightarrow 2^{1+5.5} = 2^6$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 2^{10} . כאשר נציב תשובה זו במשוואה הנתונה נקבל: $2 \cdot \sqrt{2^{10}} = 8^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\frac{10}{2}} = (2^3)^2$

$\Leftrightarrow 2^1 \cdot 2^5 = 2^6 \Leftrightarrow 2^6 = 2^6$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

22. השאלה: נתון: $(x+2)(y+2)=8$

$$xy = -2$$

$$x + y = ?$$

פתרון: פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה הראשונה באמצעות פתיחת הסוגריים שבאגף שמאל, ונקבל: $(x+2)(y+2)=8$

$$xy + 2x + 2y + 4 = 8$$

כעת נציב את הנתון השני: $xy = -2$, במשוואה, ונקבל: $-2 + 2x + 2y + 4 = 8$

$$2x + 2y + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x + 2y = 8 - 2 \Leftrightarrow 2x + 2y = 6$$

נחלק ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $x + y = 3$.

תשובה (3).

23. השאלה: נתון: $(x+3)(y-6)=35$

$$6x - 3y = 27$$

$$x \cdot y = ?$$

פתרון: פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה הראשונה באמצעות פתיחת הסוגריים שבאגף שמאל, ונקבל: $(x+3)(y-6)=35$

$$xy - (6x - 3y) - 18 = 35 \Leftrightarrow xy - 6x + 3y - 18 = 35$$

כעת נציב את הנתון השני: $6x - 3y = 27$, במשוואה, ונקבל: $xy - (6x - 3y) - 18 = 35$

$$xy - 45 = 35 \Leftrightarrow xy - 27 - 18 = 35$$

נחבר 45 לשני האגפים, ונקבל: $xy = 80$.

תשובה (2).

24. השאלה: נתון: $\frac{3}{a+2} = \frac{9}{3a+x}$, $a \neq -2$

x שווה בהכרח ל-

פתרון: דרך א': פישוט אלגברי

ניפטרי מהמכנים על ידי כפל של שני האגפים במכנה המשותף המינימלי שהוא $(a+2)(3a+x)$, ונקבל:

$$9a + 3x = 9a + 18 \Leftrightarrow 3 \cdot (3a + x) = 9 \cdot (a + 2) \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} = \frac{9}{3a+x}$$

נחסר $9a$ משני האגפים, ונקבל: $3x = 18$.

נחלק את שני האגפים ב-3, ונקבל: $x = 6$.

דרך ב': הבנה אלגברית - הרחבת שברים

מונה השבר באגף הימני גדול פי 3 ממונה השבר באגף השמאלי. מכיוון ששני השברים שווים, הרי שאותו יחס בדיוק קיים בין מכני השברים. מכנה השבר באגף השמאלי הוא $a+2$, ולכן מכנה השבר באגף הימני שווה

ל- $3 \cdot (a+2)$, כלומר ל- $3a+6$.

מכיוון שמכנה השבר באגף הימני הוא $3a+x$, הרי ש- x בהכרח שווה ל-6.

תשובה (4).

25. השאלה: a ו-b הם מספרים שלמים בין 1 ל-9.

$$a \cdot b \cdot (a \cdot b - 1) = 42$$

$$a + b = ?$$

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי a ו-b הם מספרים שלמים, מכאן שהמשוואה הנתונה היא משוואה שבה מדובר במכפלה של מספרים שלמים. מכיוון שכופלים את הביטוי $a \cdot b$ בביטוי $(ab - 1)$, אשר קטן מ-ab ב-1, הרי שמדובר במכפלת מספרים שלמים ועוקבים. מכפלת המספרים השלמים והעוקבים היחידה השווה ל-42 היא המכפלה של 6 ב-7, ומכאן שהביטוי $a \cdot b = 7$ והביטוי $(ab - 1) = 6$. שני המספרים השלמים היחידים אשר מכפלתם שווה ל-7 הם 1 ו-7, ומכאן שהביטוי המבוקש שווה ל-8 ($a + b = 1 + 7 = 8$).

תשובה (2).

26. השאלה: a ו-b הם מספרים שלמים ושונים בין 1 ל-9.

$$x \cdot y \cdot (x \cdot y - 1) = 72$$

$$x + y = ?$$

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי x ו-y הם מספרים שלמים ושונים בין 1 ל-9, מכאן שהמשוואה הנתונה היא משוואה שבה מדובר במכפלה של מספרים שלמים. מכיוון שכופלים את הביטוי $x \cdot y$ בביטוי $(x \cdot y - 1)$, הקטן ממנו ב-1, הרי שמדובר במכפלת מספרים שלמים ועוקבים. מכפלת המספרים השלמים והעוקבים השווה ל-72 היא המכפלה של 9 ב-8, ומכאן שהביטוי $x \cdot y = 9$. ישנם שני זוגות מספרים שלמים שמכפלתם שווה ל-9: 1, 9 ו-3, 3. מכיוון שנתון כי מדובר במספרים שלמים ושונים, הרי ש-x ו-y הם 1 ו-9, ומכאן שהביטוי המבוקש שווה ל-10 ($x + y = 1 + 9 = 10$).

תשובה (2).

27. השאלה: נתון: $x - y = 1$

$$x = x \cdot y$$

$$x^2 < y^2$$

$$x = ?$$

פתרון: זרז א': בדיקת תשובות

תשובה (1): 1. כאשר נציב $x = 1$ בנתון הראשון נמצא כי $y = 0$. נבדוק האם מספרים אלו מקיימים גם את שאר הנתונים. לפי הנתון השני: $x = x \cdot y$. כאשר נציב בנתון זה את הערכים שמצאנו, נקבל: $1 = 1 \cdot 0 \Leftrightarrow 1 = 0$. מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 2. כאשר נציב $x = 2$ בנתון הראשון נמצא כי $y = 1$. נבדוק האם מספרים אלו מקיימים גם את שאר הנתונים. לפי הנתון השני: $x = x \cdot y$. כאשר נציב בנתון זה את הערכים שמצאנו, נקבל: $2 = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 2 = 2$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, נמשיך ונבדוק את הנתון השלישי לפיו $x^2 < y^2$. כאשר נציב בנתון זה הערכים שקיבלנו נקבל $2^2 < 1^2$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון שאינו נכון, זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): 0. כאשר נציב $x = 0$ בנתון הראשון נמצא כי $y = -1$. נבדוק האם מספרים אלו מקיימים גם את שאר הנתונים. לפי הנתון השני: $x = x \cdot y$. כאשר נציב בנתון זה את הערכים שמצאנו, נקבל: $0 = 0 \cdot (-1) \Leftrightarrow 0 = 0$. מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, נמשיך ונבדוק את הנתון השלישי לפי $x^2 < y^2$. כאשר נציב בנתון זה הערכים שקיבלנו נקבל $0 < 1 \Leftrightarrow 0^2 < (-1)^2$. מכיוון שאי-שוויון זה נכון, הרי שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי

לפי הנתון הראשון: $x - y = 1$. נחבר y לשני האגפים, ונקבל: $x = y + 1$. כלומר x גדול מ- y ב-1. לפי הנתון השני: $x = x \cdot y$. נחסר xy משני האגפים, ונקבל: $x - x \cdot y = 0$. נוציא x גורם משותף, ונמצא כי $x(1 - y) = 0$. כאשר נתונה מכפלה השווה ל-0, יש להשוות כל אחד מגורמי המכפלה ל-0, ומכאן ש:
 א. x שווה ל-0. מכיוון שמצאנו כי x גדול מ- y ב-1, הרי שבמקרה זה y שווה ל-(-1).
 ב. y שווה ל-1. מכיוון ש- x גדול מ- y ב-1, הרי ש- x שווה ל-2.
 לפי הנתון השלישי $x^2 < y^2$. מכיוון שרק המצב שבו x שווה ל-0 ו- y שווה ל-(-1) מקיים נתון זה, הרי ש- x שווה ל-0.

תשובה (3).

28. השאלה: נתון: x ו- y הם מספרים עוקבים.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^2 &< y^2 \end{aligned}$$

$x = ?$

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

תשובה (1): 1. נתון ש- x ו- y הם מספרים עוקבים אשר לפי הנתון הראשון סכומם שווה ל-1. מכאן שאם $x = 1$ הרי ש- y שווה ל-0. לפי הנתונים: $x^2 < y^2$. מכיוון שהמספרים שמצאנו אינם מקיימים נתון זה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 2. נתון ש- x ו- y הם מספרים עוקבים אשר סכומם שווה ל-1. כאשר נציב $x = 2$ בנתון זה נמצא כי y שווה ל-(-1). ו-2 ו-(-1) אינם מספרים עוקבים, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): 0. נתון ש- x ו- y הם מספרים עוקבים אשר סכומם שווה ל-1. על מנת לקיים את המשוואה, כאשר $x = 0$, y שווה ל-1. לפי הנתונים: $x^2 < y^2$. מכיוון שהמספרים שמצאנו מקיימים גם נתון זה, הרי שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי

על מנת למצוא מה ערכו של x , עלינו 'להיפטר' מ- y . לפי הנתון הראשון: x ו- y הם מספרים עוקבים. מכיוון שלפי הנתון השלישי y בהכרח גדול מ- x , הרי ש:
 $y = x + 1$. נציב נתון זה במשוואה הראשונה: $x + y = 1$, ונקבל: $x + x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

תשובה (3).