מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(4)	(2)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(3)	(4)	(2)	(2)	(1)	(3)	(2)	(2)	(4)

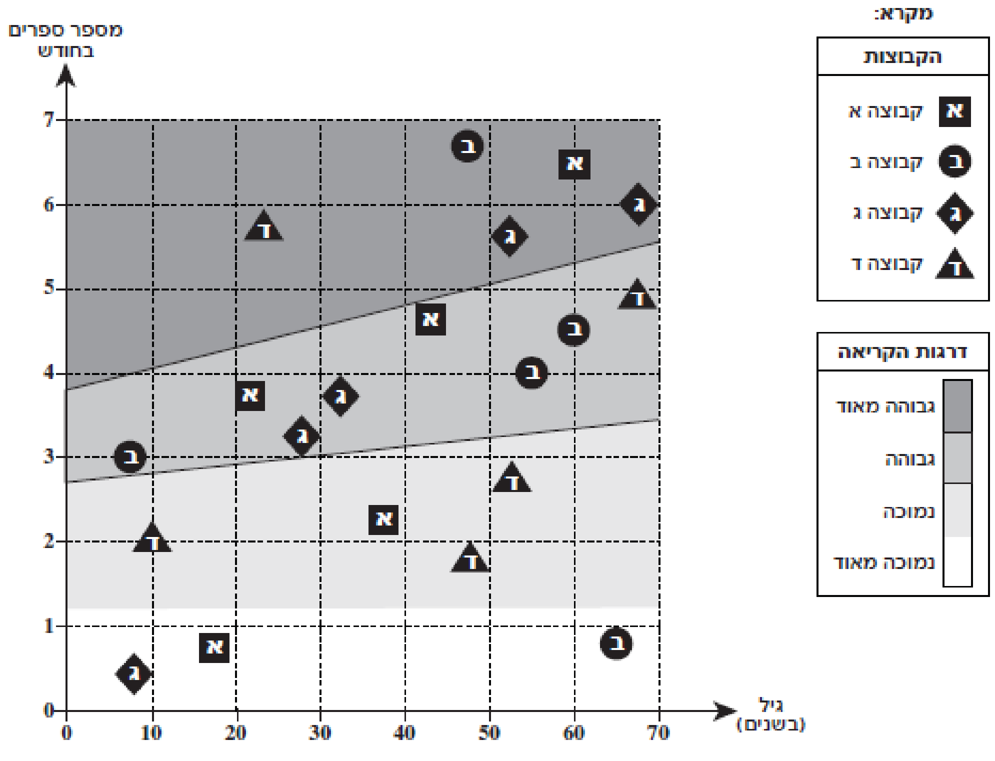
הסברים

הסקה מתרשים (שאלות 4-1)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

בתרשים מוצגות תוצאות מחקר על הרגלי קריאת ספרים.
במחקר השתתפו 20 אנשים. הם חולקו ל-4 קבוצות - **א**, **ב**, **ג** ו-**ד** - שבכל אחת מהן 5 משתתפים.
לכל קבוצה מתאימה בתרשים צורה מסוימת (ראו מקרא), וכל משתתף מיוצג בתרשים על-ידי הצורה של קבוצתו.
מיקום הצורה בתרשים מייצג את גילו של המשתתף (הציר האופקי) ואת מספר הספרים שהוא קורא בחודש (הציר האנכי).
התרשים מחולק לארבעה שטחים בעלי גוונים שונים, והם מגדירים ארבע דרגות קריאה שונות (ראו מקרא).

לדוגמה: בקבוצה **ג** יש משתתף שגילו כ-32 שנים והוא קורא כ-3.75 ספרים בחודש. דרגת הקריאה שלו גבוהה.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

שאלות

1. **השאלה**: בקבוצה _____, ככל שהמשתתף מבוגר יותר, כך הוא קורא יותר ספרים בחודש.

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות על סמך התרשים

<u>תשובה (1)</u>: **א**

תשובה זו אינה נכונה, שכן בקבוצה **א** יש משתתף בן מעט יותר מ-20 הקורא מעט פחות מ-4 ספרים בחודש, ומשתתף המבוגר ממנו, בן מעט פחות מ-40, הקורא קצת יותר מ-2 ספרים בחודש. כלומר, יש בקבוצה **א** משתתף הקורא פחות ספרים ממשתתף הצעיר ממנו.

<u>תשובה (2)</u>: **ב**

תשובה זו אינה נכונה, שכן בקבוצה **ב** יש משתתף שגילו כ-10 שנים הקורא 3 ספרים לחודש, ומשתתף המבוגר ממנו, בן כ-65 שנים הקורא פחות מספר אחד לחודש, כלומר פחות מהמשתתף הצעיר ממנו.

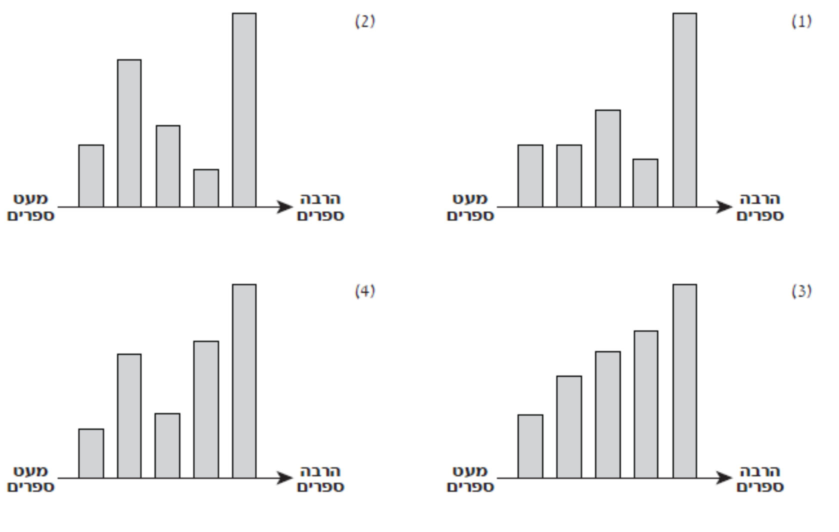
<u>תשובה (3)</u>: **ג**

זו התשובה הנכונה לפי נתוני התרשים, שכן בקבוצה **ג** כל משתתף קורא יותר ספרים מהמשתתפים הצעירים ממנו.

תשובה (3).

---

2. **השאלה**: באיזה מהתרשימים הבאים גובה העמודות מייצג נכונה את גיליהם של המשתתפים מקבוצה **א**, כשהמשתתפים מסודרים משמאל לימין לפי מספר הספרים שהם קוראים בחודש?



פתרון: התרשימים שבתשובות המוצעות מציגים את חברי קבוצה **א** לפי גילם ומספר הספרים שהם קוראים בחודש, מהנמוך לגבוה ביותר. נתבונן בתרשים המקורי, ונבדוק את גילם של חברי הקבוצה לפי מספר הספרים שהם קוראים בחודש – מהמשתתף שקורא את מספר הספרים הקטן ביותר ועד המשתתף שקורא את מספר הספרים הגדול ביותר.
גילו של החבר בקבוצה **א** אשר קורא את מספר הספרים <u>הקטן ביותר</u> בחודש (פחות מ-1) קטן במקצת מ-20.
גילו של המשתתף הבא, העומד לימינו, אשר קורא קצת למעלה מ-2 ספרים, קטן במקצת מ-40. בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (1) מכיוון שלפיה גילאי שני החברים הראשונים זהה.
החבר השלישי משמאל קורא כ-4 ספרים וגילו גבוה מ-20, כלומר גילו קטן מהחבר שמשמאלו. בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (3), שכן לפיה גילו של החבר הנמצא במקום השלישי גבוה מגילו של החבר הנמצא במקום השני.
החבר הרביעי קורא כ-5 ספרים בחודש וגילו גבוה במקצת מ-40. כעת ניתן לפסול את תשובה (2), שכן לפיה גילו של החבר הרביעי קטן מגילו של החבר השלישי. כעת ניתן לסמן את התשובה הנותרת – תשובה (4).

תשובה (4).

---

3. **השאלה**: ממוצע הגילים של המשתתפים מקבוצה **ג** הקוראים יותר מ-2 ספרים בחודש הוא בערך ______ שנים.

פתרון: נתבונן בתרשים ונמצא כי ישנם 4 משתתפים בקבוצה **ג** אשר קוראים למעלה מ-2 ספרים בחודש. שני משתתפים אשר ניתן לקבוע מבחינה ויזואלית כי גילם הממוצע הוא כ-30 (אחד נמצא קצת מעל 30 והאחר קצת מתחת ל-30), ושני משתתפים נוספים אשר ניתן להניח לפי התרשים כי גילם הממוצע הוא כ-60.
מכאן שגילם הממוצע של 4 המשתתפים מקבוצה **ג** אשר קוראים למעלה מ-2 ספרים בחודש הוא בערך 45 שנים $\left(=\frac{180}{4}=\frac{60+120}{4}=\frac{2\cdot 30+2\cdot 60}{4}\right)$.

תשובה (2).

---

4. **השאלה**: החוקרים הציעו ספר בהנחה למשתתפים שדרגת הקריאה שלהם נמוכה או נמוכה מאוד.
4 משתתפים מ-2 קבוצות שונות נענו להצעה.

בקרב המשתתפים שנענו להצעה, **בהכרח** יש משתתף מקבוצה -

פתרון: מכיוון שנשאלנו לגבי המשתתפים שדרגת הקריאה שלהם נמוכה או נמוכה מאוד, ויש התייחסות למספר המשתתפים והקבוצות שלהם, נבדוק בתרשים מה המידע שניתן להפיק לגבי משתתפים אלו.
לפי התרשים ישנם 7 משתתפים אשר דרגת הקריאה שלהם נמוכה או נמוכה מאוד, ואלה משתייכים ל-4 קבוצות שונות: 3 מהם מקבוצה **ד**, 2 מקבוצה **א**, 1 מקבוצה **ב** ו-1 מקבוצה **ג**.
בשלב זה אם ננסה ליצור קבוצה של 4 משתתפים המשתייכים ל-2 קבוצות שונות, נראה כי יתכן שמדובר ב-2 משתתפים מקבוצה **ד** ו-2 מקבוצה **א** או 3 משתתפים מקבוצה **ד** ומשתתף אחד מקבוצה אחרת כלשהי. בכל אחת מהאפשרויות הקיימות יש בהכרח משתתף אחד לפחות מקבוצה **ד**.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 5-20)

5. **השאלה**: בשנה אחת מתפרסמים 6 גיליונות של כתב עת מסוים.
בכל גיליון יש בין 3 ל-10 מאמרים.
בכל מאמר יש בין 2 ל-4 עמודים.
בכל עמוד יש בין 100 ל-200 מילים.

בשנה אחת יש בכתב העת לכל הפחות ______ מילים ולכל היותר _______ מילים.

פתרון: חישוב אלגברי

לפנינו שאלת טווחים, בה נתבקשנו למצוא את מספר המילים המינימלי (לכל הפחות) והמקסימלי (לכל היותר) המתפרסמות בשנה אחת בגיליונותיו של כתב עט.

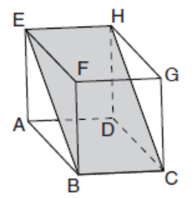
<u>מינימום</u>: על מנת למצוא את המספר המינימלי נניח כי בכל גיליון יש 3 מאמרים, אורכו של כל מאמר הוא 2 עמודים ובכל עמוד יש 100 מילים. במצב כזה מספר המילים אשר יתפרסמו בשנה ב-6 הגיליונות של כתב העת יהיה 36,000 $(=6\cdot 2\cdot 3\cdot 100)$. תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

<u>מקסימום</u>: על מנת למצוא את המספר המקסימלי, נניח כי בכל גיליון יש 10 מאמרים, אורכו של כל מאמר הוא 4 עמודים ובכל עמוד יש 200 מילים. במצב כזה מספר המילים אשר יתפרסמו בשנה ב-6 הגיליונות של כתב העת יהיה 48,000 $(=6\cdot 10\cdot 4\cdot 200)$. תשובה (4) נפסלת.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם קובייה ABCDEFGH שנפחה 64 סמ״ק.



מה שטח המלבן EBCH (בסמ״ר)?

פתרון: בשאלה התבקשנו למצוא את שטח המלבן הכהה. אחת מצלעותיו של המלבן הכהה היא מקצוע בקובייה וצלעו השנייה היא אלכסון של אחת מפאות הקובייה.

נסמן את מקצוע הקובייה ב-x. נתון כי נפח הקובייה הוא 64 סמ״ק, כלומר $x^3 = 64$, ומכאן שאורכה של מקצוע/צלע הקובייה הוא 4 ס״מ $\left(x = 4 \leftarrow x^3 = 64\right)$.

פאות הקובייה הן ריבועים, ומכאן שאלכסון הפאה הוא אלכסון בריבוע. אלכסון בריבוע מחלק את הריבוע לשני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים (משולשי ״כסף״), המקיימים את היחס: $1:1:\sqrt{2}$.
מכאן שאורך אלכסון הפאה גדול פי $\sqrt{2}$ מצלע הקובייה, כלומר שווה ל- $4\sqrt{2}$.
נחשב את שטחו של המלבן באמצעות מכפלת צלעותיו, ונקבל כי שטח המלבן הכהה הוא $16\sqrt{2}$ $\left(4 \cdot 4\sqrt{2} =\right)$.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: במשולש מסוים גודל אחת הזוויות שווה לסכום הגדלים של שתי הזוויות האחרות.

המשולש הוא **בהכרח** -

פתרון: __**דרך א׳**__: בדיקת תשובות

__תשובה (1)__: משולש חד-זווית

כל זוויותיו של משולש חד-זווית הן חדות, כלומר קטנות מ-$90°$. מכיוון שסכום הזוויות בכל משולש שווה ל-$180°$, הרי שבהכרח סכומן של כל שתי זוויות תמיד גדול מ-$90°$. כאמור, כל זווית במשולש קטנה מ-$90°$, ולכן אף אחת מהזוויות אינה יכולה להיות שווה לסכומן של שתי הזוויות הנותרות.

__תשובה (2)__: **משולש ישר-זווית**

גודלה של הזווית הישרה במשולש ישר-זווית הוא $90°$, ומכאן שסכומן של שתי הזוויות הנותרות, אשר משלימות אותה ל-$180°$, בהכרח שווה ל-$90°$ $\left(= 180° - 90°\right)$. מצאנו כי במשולש גודל אחת הזוויות שווה לסכום הגדלים של שתי הזוויות האחרות. לכן, זו התשובה הנכונה ולפיכך אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

__**דרך ב׳**__: אלגברה

נתון כי גודל אחת הזוויות שווה לסכום הגדלים של שתי הזוויות האחרות.
סכום הזוויות בכל משולש הוא $180°$, כלומר, אם נסמן את זוויות המשולש ב-α, β ו-γ, הרי ש: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
נניח כי הזווית γ שווה לסכום הזוויות α ו-β, כלומר: $\gamma = \alpha + \beta$. נציב נתון זה במשוואה, ונקבל:
$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftarrow \gamma + \gamma = 180° \Leftarrow 2\gamma = 180° \Leftarrow \gamma = 90°$.
משולש בו אחת מהזוויות שווה ל-$90°$ הוא משולש ישר-זווית.

תשובה (2).

---

8. **השאלה**: אורך הכביש בין A ל-B הוא 60 ק״מ. מהירות הנסיעה המקסימלית בכביש זה היא 100 קמ״ש, והמהירות המינימלית היא 50 קמ״ש.

מה ההפרש (בדקות) בין זמן הנסיעה מ-A ל-B במהירות המקסימלית, לבין זמן הנסיעה מ-A ל-B במהירות המינימלית?

פתרון: בשאלה התבקשנו למצוא את ההפרש **בדקות** בין משך הנסיעה במהירות המקסימלית למשך הנסיעה במהירות המינימלית. נחשב את זמן הנסיעה בכל אחת מהמהירויות:

נשתמש בנוסחה: מהירות x זמן = דרך, ונחשב את זמן הנסיעה כאשר עוברים את הדרך אשר אורכה 60 ק״מ, במהירות המינימלית של 50 קמ״ש. נסמן ב-x את זמן הנסיעה ונחלץ את x מתוך המשוואה: $60 = x \cdot 50$.

נחלץ את שני האגפים ב-50, ונקבל: $x = \frac{60}{50}$ ⇦ $x = \frac{6}{5}$.

מצאנו כי זמן הנסיעה במהירות המינימלית הוא $\frac{6}{5}$. על מנת להפוך זמן זה לדקות נכפול ב-60, ונקבל

כי זמן הנסיעה המינימלי הוא 72 דקות $\left(= \frac{6}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{60}^{12}\right)$.

כעת נחשב את זמן הנסיעה במהירות המקסימלית. באחת משתי האפשרויות:

<u>דרך א׳</u>: שימוש בנוסחה

נחשב באמצעות הנוסחה: מהירות x זמן= דרך, את זמן הנסיעה כאשר עוברים דרך שאורכה 60 ק״מ, במהירות המקסימלית של 100 קמ״ש. נסמן את זמן הנסיעה ב-x ונחלץ את x מתוך המשוואה: $60 = x \cdot 100$. נחלק את שני האגפים ב-100, ונקבל: $x = \frac{60}{100}$ ⇦ $\frac{3}{5}$ שעה. מצאנו כי הזמן הנדרש על מנת לעבור את הדרך בנסיעה במהירות המקסימלית הוא $\frac{3}{5}$ שעה, שהם 36 דקות $\left(= \frac{3}{5} \cdot 60\right)$.

<u>דרך ב׳</u>: יחסים

בתנועה יש יחס הפוך בין מהירות לזמן. לפיכך, אם מהירות הנסיעה המקסימלית <u>גדולה פי 2</u> ממהירות הנסיעה המינימלית, הרי שזמן הנסיעה במהירות המקסימלית הוא <u>מחצית</u> מזמן הנסיעה במהירות המינימלית. מצאנו כי זמן הנסיעה במהירות המינימלית הוא 72 דקות, ומכאן שזמן הנסיעה במהירות המקסימלית, שווה ל-36 דקות $\left(= \frac{72}{2}\right)$.

מצאנו כי זמן הנסיעה במהירות המקסימלית הוא 36 דקות, וכי זמן הנסיעה במהירות המינימלית הוא 72 דקות, ומכאן שההפרש בין זמן הנסיעה במהירות המקסימלית לזמן הנסיעה במהירות המינימלית הוא 36 דקות $\left(= 72 - 36\right)$.

תשובה (3).

9. **השאלה**: נתון: $x^3 < x^2$

$x < x^3$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

פתרון: התבקשנו למצוא מי מהטענות הבאות נכונה, כלומר באיזה תחום נמצא x על מנת שיקיים את נתוני השאלה. נעבור על הטענות שבתשובות ונציב בכל פעם מספר במקום x, בהתאם לתחום שבתשובה ונבדוק מי מהתשובות נכונה.

תשובה (1): $1 < x$. נציב מספר בהתאם לתחום שבתשובה, למשל: $x = 2$. נציב את המספר באי שוויון הראשון, ונקבל: $8 < 4$ $\left(x^3 < x^2 \Rightarrow 2^3 < 2^2 =\right)$. כיוון שקיבלנו ביטוי שגוי, ניתן לקבוע כי כאשר $1 < x$, x אינו מקיים את נתוני השאלה. מכאן שתשובה זו נפסלת.

תשובה (2): $0 < x < 1$. נציב מספר בהתאם לתחום שבתשובה, למשל: $x = \frac{1}{2}$. נציב את המספר, ונקבל באי שוויון הראשון: $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ $\left(x^3 < x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 =\right)$. קיבלנו פסוק אמת, אך על מנת שנוכל לקבוע כי זו אכן התשובה הנכונה נצטרך לבדוק אם מתקבל פסוק אמת גם באי השוויון השני.

כעת נציב באי שוויון השני כי $x = \frac{1}{2}$, ונקבל: $\frac{1}{2} < \frac{1}{8}$ $\left(x < x^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^3 =\right)$. קיבלנו ביטוי שגוי, ומכאן שניתן לפסול תשובה זו.

תשובה (3): $-1 < x < 0$. נציב מספר בהתאם לתחום שבתשובה, למשל: $x = -\frac{1}{2}$. נציב את המספר, ונקבל באי שוויון הראשון: $-\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ $\left(x^3 < x^2 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 =\right)$. קיבלנו פסוק אמת, אך על מנת שנוכל לקבוע כי זו התשובה הנכונה נצטרך לבדוק אם מתקבל פסוק אמת גם באי השוויון השני.

כעת נציב באי שוויון השני $x = -\frac{1}{2}$, ונקבל: $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{8}$ $\left(x < x^3 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =\right)$. גם כאן קיבלנו פסוק אמת. כיוון שישנה רק תשובה אחת המקיימת את נתוני השאלה אין צורך לבדוק את תשובה (4) וניתן לקבוע כי זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

10. **השאלה**: נתון: $(x+7)(y-5) = 35$

$5x - 7y = 30$

$x \cdot y = ?$

פתרון: פישוט אלגברי

נפשט את המשוואה הראשונה על ידי פתיחת הסוגריים: $(x+7)(y-5) = 35$ ⇦ $xy - 5x + 7y - 35 = 35$.

מכיוון שנתבקשנו למצוא את ערכו של הביטוי xy, נבודד את הביטוי באגף שמאל על ידי חיבור של 5x, חיסור של 7y וחיבור 35 לשני האגפים, ונקבל: $xy = 5x - 7y + 35 + 35$ ⇦ $xy = 5x - 7y + 70$.

לפי נתוני השאלה: $5x - 7y = 30$. נציב נתון זה במשוואה הראשונה, ונקבל: $xy = 5x - 7y + 70$ ⇦ $xy = 30 + 70$ ⇦ $xy = 100$.

תשובה (1).

.11 **השאלה**: $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=?$

פתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית

נציב מספר נוח למשל כי n שווה 1, ונקבל: $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \Leftarrow \frac{(2\cdot1+2)!}{(2\cdot1)!} \Leftarrow \frac{4!}{2!} \Leftarrow \frac{4\cdot3\cdot\cancel{2}^1\cdot\cancel{1}^1}{_1\cancel{2}\cdot\cancel{1}_1}$

$\Leftarrow 4\cdot3 \Leftarrow 12$. כעת, לאחר שמצאנו את ערכו של הביטוי, נציב כי n שווה ל-1, ונפסול את כל אחת מהתשובות שערכה שונה מ-12:

תשובה (1): $2n^2$. כאשר n שווה ל-1, ערכו של הביטוי שווה ל-2 $\left(2n^2=2\cdot1^2=\right)$, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $(2n+1)\cdot(2n+2)$. כאשר n שווה ל-1, ערכו של הביטוי שווה ל-12 $\left((2n+1)\cdot(2n+2)=(2\cdot1+1)\cdot(2\cdot1+2)=3\cdot4=\right)$, ולכן התשובה אינה נפסלת בשלב זה.

תשובה (3): $n+1$. כאשר n שווה ל-1, ערכו של הביטוי שווה ל-2 $(n+1=1+1=)$, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): $4n+2$. כאשר n שווה ל-1, ערכו של הביטוי שווה ל-6 $(4n+2=4+2=)$, ולכן התשובה נפסלת.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לקבוע שתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי

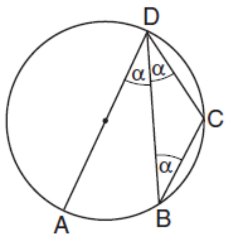
נפשט את הביטוי לפי הגדרת פעולת עצרת, ונקבל: $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \Leftarrow \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot2n\cdot.....\cdot2\cdot1}{2n\cdot.....\cdot2\cdot1}$

$\Leftarrow \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot{}^1\cancel{2n}\cdot.....\cdot\cancel{2}^1\cdot\cancel{1}^1}{_1\cancel{2n}\cdot.....\cdot\cancel{2}_1\cdot\cancel{1}_1} \Leftarrow (2n+2)\cdot(2n+1)$.

תשובה (2).

.12 **השאלה**: AD קוטר במעגל.
B ו-C נקודות על היקף המעגל.

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
$\alpha=?$



פתרון: זווית היקפית הנשענת על קוטר המעגל שווה ל-$90°$.

דרך א': חיבור המיתר AB

כאשר נחבר את נקודות A ו-B, נקבל זווית היקפית DBA הנשענת על הקוטר, ומכאן שזווית זו שווה ל-$90°$.

נתבונן במשולש שנוצר, משולש ABD:

זווית ADB שווה ל-α, זווית ABD שווה ל-$90°$.

סכום זוויות במשולש שווה ל-$180°$, ומכאן ש: $\alpha+90°+\angle DAB=180°$.

נחסר $90°$ משני האגפים, ונקבל: $\alpha+90°+\angle DAB=180° \Leftarrow \alpha+\angle DAB=90°$.

נחסר α משני האגפים, ונקבל: $\alpha+\angle DAB=90° \Leftarrow \angle DAB=90°-\alpha$.

זווית DAB נשענת על הקשת BD.

זווית DBC וזווית BDC גם יחד (אשר כל אחת מהן מסומנת α) נשענות על הקשת BD, ומכאן שסכום זוויות אלו שווה לזווית ההיקפית DAB, כלומר: $90°-\alpha=\alpha+\alpha \Leftarrow 90°-\alpha=2\alpha$.

נחבר α לשני האגפים, ונקבל: $90°-\alpha=2\alpha \Leftarrow 90°=3\alpha$.

נחלק את שני האגפים ב-3, ונקבל: $90°=3\alpha \Leftarrow 30°=\alpha$.

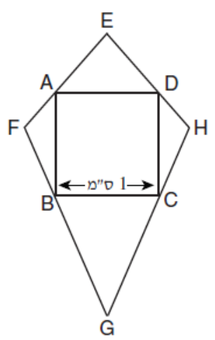
<u>דרך ב'</u>: חיבור המיתר AC

כאשר נחבר את נקודות A ו-C, נקבל זווית היקפית DCA הנשענת על הקוטר,
ומכאן שזווית זו שווה ל-$90°$.
נתבונן במשולש שנוצר, משולש ACD:
זווית ADC שווה ל-2α, זווית DCA שווה ל-$90°$.
סכום זוויות בכל משולש שווה ל-$180°$, ומכאן ש: $2\alpha + 90° + \angle DAC = 180°$.
נחסר $90°$ משני האגפים, ונקבל: $2\alpha + 90° + \angle DAC = 180°$ ⇦ $2\alpha + \angle DAC = 90°$.
נחסר 2α משני האגפים, ונקבל: $2\alpha + \angle DAC = 90°$ ⇦ $\angle DAC = 90° - 2\alpha$.
זווית DAC נשענת על הקשת DC:
זווית DAC וזווית DBC הן זוויות היקפיות שנשענות שתיהן על הקשת DC, ולכן הן בהכרח שוות זו לזו, כלומר: $90° - 2\alpha = \alpha$
נחבר 2α לשני האגפים, ונקבל: $90° - 2\alpha = \alpha$ ⇦ $90° = 3\alpha$.
נחלק את שני האגפים ב-3, ונקבל: $90° = 3\alpha$ ⇦ $30° = \alpha$.

תשובה (3).

---

13. **השאלה**: ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 1 ס"מ והוא חסום בדלתון EFGH.
כל אחת מצלעות הריבוע מקבילה לאחד מאלכסוני הדלתון.



מה היקף הדלתון (בס"מ)?

פתרון: על מנת למצוא את היקף הדלתון עלינו למצוא את אורכי צלעותיו.
הנתון היחיד בשאלה הוא כי ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו שווה ל-1 ס"מ, ושצלעות הריבוע מקבילות לאלכסוני הדלתון. כלומר הצלעות AD ו-BC מקבילות לאלכסון FH, והצלעות AB ו-CD מקבילות לאלכסון EG.
עלינו לבדוק האם ניתן באמצעות נתונים אלו למצוא מה אורכן של צלעות הדלתון.
נתבונן במשולש שנוצר כתוצאה מחיבור נקודות F ו-H, משולש EFH:
הצלע AD מקבילה לצלע FH, ולפיכך משולש EAD דומה למשולש EFH, מכיוון שלמעט אורכה של הצלע AD אין כל נתון מספרי אחר, לא ניתן לדעת מה היחס בין צלעות המשולשים, ומכאן שלא ניתן למצוא מה אורכו של אלכסון הדלתון – FH, או אורכה של צלע הדלתון – הצלע EF.
באופן דומה נסיק כי לא ניתן למצוא את אורכו של אלכסון הדלתון או אורך הצלע BG לאחר חיבור הנקודות EG. מכיוון שמצאנו שלא ניתן למצוא את אורך צלעות הדלתון, הרי שלא ניתן לדעת מה היקף הדלתון.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: נתון: a ו-b הם מספרים עוקבים, $a < b$
x ו-y הם מספרים עוקבים, $x < y$

$$\frac{b+x}{b^2-a^2+y^2-x^2} = ? \quad \left(b^2-a^2+y^2-x^2 \neq 0\right)$$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב שני זוגות מספרים עוקבים. נציב למשל כי: $a=1$ ו-$b=2$, וכי: $x=1$ ו-$y=2$, ונקבל:

$$\frac{b+x}{b^2-a^2+y^2-x^2} \Leftarrow \frac{2+1}{2^2-1^2+2^2-1^2} \Leftarrow \frac{3}{4-1+4-1} \Leftarrow \frac{3}{6} \Leftarrow \frac{1}{2}.$$

כעת נעבור על התשובות המוצעות ונציב את הערכים הללו בכל אחת מהן. נפסול כל תשובה שערכה שונה מ-$\frac{1}{2}$.

לאחר ההצבה נראה שערכן של תשובות (1) ו-(3) שונה מ-$\frac{1}{2}$, ולכן תשובות אלו נפסלות.

נציב פעם נוספת על מנת לפסול עוד תשובה. נציב כעת כי $a=2$ ו-$b=3$, וכי $x=1$, ו-$y=2$, ונקבל כי ערכו של הביטוי שווה ל:

$$\frac{b+x}{b^2-a^2+y^2-x^2} \Leftarrow \frac{3+1}{3^2-2^2+2^2-1^2} \Leftarrow \frac{4}{9-4+4-1} \Leftarrow \frac{4}{8} \Leftarrow \frac{1}{2}.$$

נציב ערכים אלו בתשובות שנותרו, ונקבל כי ערכה של תשובה (4) שווה ל-$\frac{1}{3}$. מכאן שניתן לפסול תשובה זו,

ולקבוע כי תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

נתון כי a ו-b הם מספרים עוקבים, וכי $a < b$. מכאן ש-$b = a+1$.
נתון כי x ו-y הם מספרים עוקבים, וכי $x < y$. מכאן ש-$y = x+1$.

נציב ערכים אלו בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל כי ערכו שווה ל:

$$\frac{b+x}{b^2-a^2+y^2-x^2} \Leftarrow \frac{a+1+x}{(a+1)^2-a^2+(x+1)^2-x^2} \Leftarrow \frac{a+1+x}{a^2+1+2a-a^2+x^2+1+2x-x^2} \Leftarrow$$

$$\frac{a+1+x}{2+2a+2x} \Leftarrow \frac{1+a+x}{2(1+a+x)} \Leftarrow \frac{1}{2}.$$

תשובה (2).

15. **השאלה**: נתון: b הוא 60% מ-a.

$$a-b=18$$

$$a+b=?$$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

מהנתון כי b הוא 60% מ-a, אנו יכולים ליצור את המשוואה: $b=\frac{60}{100}\cdot a$.

נציב נתון זה במשוואה $a-b=18$, ונקבל: $a-\frac{60}{100}\cdot a=18$.

נכפול את שני אגפי המשוואה ב-100, ונקבל: $100a-60a=1,800 \Leftarrow 40a=1,800$.

נחלק ב-40 את שני האגפים, ונקבל: $a=\frac{1,800}{40} \Leftarrow a=\frac{1,80\cancel{0}}{4\cancel{0}} \Leftarrow a=\frac{90}{2} \Leftarrow a=45$.

נציב כי $a=45$ במשוואה הראשונה - $b=\frac{60}{100}\cdot a$, ונקבל כי ערכו של b הוא 27 $\left(=\frac{60}{100}\cdot 45=\right)$.

מצאנו כי $a=45$ ו- $b=27$, ומכאן שסכומם שווה ל-72 $\left(a+b=45+27=\right)$.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

נתון כי b הוא 60% מ-a, ולפי המשוואה השנייה: $a-b=18$. כלומר: ההפרש בין a ל-b הוא 18.
אם b מהווה 60% מ-a, הרי שההפרש בין a ל-b שווה ל-40% מ-a. כמו כן, אם ידוע כי a גדול מ-b ב-18, הרי שניתן לבנות את המשוואה הבאה: $\frac{40}{100}\cdot a=18 \Leftarrow \frac{2}{5}a=18$.

נכפול את שני האגפים ב-5, ונקבל: $\frac{2}{5}a=18 \Leftarrow 2a=18\cdot 5$.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $2a=18\cdot 5 \Leftarrow a=\frac{{}^{9}\cancel{18}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}} \Leftarrow a=9\cdot 5 \Leftarrow a=45$.

תשובה (2).

---

16. **השאלה**: לליאור קופסה ובה סוכריות: 3 אדומות, 4 לבנות, 2 צהובות, 5 ירוקות ו-4 כתומות.
הוא מוציא סוכריות מהקופסה באקראי, בזו אחר זו, בלי להחזירן.

כמה סוכריות לכל הפחות ליאור צריך להוציא מהקופסה על מנת שיהיו בידיו בוודאות שתי סוכריות באותו צבע?

פתרון: יתכן שכאשר ליאור ישלוף שתי סוכריות בזו אחר זו שתיהן יהיו מאותו צבע, אולם על מנת <u>להבטיח</u> כי זה אכן יהיה המצב, יש למצוא את הסיטואציה ה'רעה' ביותר האפשרית.
המצב הגרוע ביותר האפשרי יהיה אם ליאור יוציא סוכריה מצבע כלשהו, למשל אדום, ולאחריה הוא יוציא סוכריה מצבע אחר, למשל לבן, ולאחר מכן סוכריה אחת מכל אחד מיתר הצבעים, כלומר, סוכריה צהובה, סוכריה ירוקה וסוכריה כתומה, ובסך הכול יוציא 5 סוכריות, אחת מכל אחד מהצבעים האפשריים. הסוכרייה הבאה, הסוכרייה השישית, תהיה בהכרח סוכריה אשר צבעה זהה לאחת מהסוכריות שבידי ליאור.
סיכום: המספר המינימלי של סוכריות שעל ליאור להוציא על מנת להבטיח שיהיו בידיו שתי סוכריות שצבען זהה הוא 6.

תשובה (1).

.17 **השאלה**: במשחק מסוים משתתפים שני שחקנים.
3 התוצאות האפשריות במשחק הן: ניצחון של שחקן **א**, ניצחון של שחקן **ב** או תיקו.
ההסתברות שהתוצאה תהיה תיקו שווה להסתברות שהתוצאה לא תהיה תיקו.
ההסתברות ששחקן **א** ינצח היא $\frac{1}{5}$.

מה ההסתברות ששחקן **ב** ינצח?

פתרון: לפי נתוני השאלה, ההסתברות שהתוצאה תהיה תיקו **שווה** להסתברות שהתוצאה לא תהיה תיקו. במצב בו קיימות שתי אפשרויות בלבד – תיקו או ניצחון – אשר ההסתברות לקבלת כל אחת מהן שווה, ההסתברות לכל אפשרות היא $\frac{1}{2}$. כלומר, הסיכוי שיתקבל תיקו שווה ל- $\frac{1}{2}$ והסיכוי שאחד מהשחקנים ינצח שווה אף הוא ל- $\frac{1}{2}$.

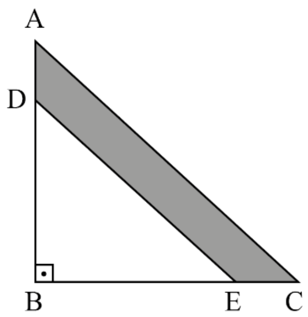
תוצאת ה'ניצחון' אף היא מתפצלת לשתי אפשרויות: ניצחון של שחקן **א** וניצחון של שחקן **ב**.

מכיוון שמצאנו כי הסיכוי שיתקבל ניצחון הוא $\frac{1}{2}$, הרי שההסתברות ששחקן **א** ינצח + ההסתברות ששחקן **ב** ינצח = $\frac{1}{2}$.

נתון כי ההסתברות ששחקן **א** ינצח היא $\frac{1}{5}$, ומכאן שההסתברות ששחקן **ב** ינצח שווה ל- $\frac{3}{10}$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\right)$.

תשובה (3).

.18 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש ישר-זווית.



נתון: $AD=\frac{1}{4}AB$

$EC=\frac{1}{4}BC$

מה היחס בין שטח המרובע ADEC (השטח הכהה) לשטח משולש ABC?

פתרון: __**דרך א'**__: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין כל נתון מספרי בשאלה לגבי אורכי הצלעות AB ו-BC ונתון כי AD ו-EC שווים ל- $\frac{1}{4}$ מאורכן של צלעות אלו, נציב כי $AB=BC=4$.

מכיוון שנתון כי AD ו-EC שווים ל- $\frac{1}{4}$ מאורכן של צלעות אלו, הרי ש- $AD=EC=1$.

על מנת למצוא את שטח המרובע ADEC נחסר משטח המשולש ABC את שטחו של משולש DBE.

__**שטח משולש ABC**__:
שטחו של משולש ישר-הזווית ABC שווה למכפלת הניצבים AB ו-BC לחלק ל-2,
כלומר ל-8 $\left(\frac{4\cdot4}{2}=\right)$.

<u>שטחו של משולש DBE</u>:
מכיוון שמצאנו כי אורכם של הניצבים AB ו-BC הוא 4 ואורכם של AD ו-EC הוא 1, הרי שאורך הניצבים BD ו-BE הוא 3 $(=4-1)$.

לפיכך, שטח המשולש ישר-הזווית DBE הוא 4.5 $\left(=\frac{3\cdot 3}{2}\right)$.

מכיוון ששטח משולש ABC הוא 8 ושטח משולש DBE הוא 4.5,
הרי ששטח המרובע ADEC הוא 3.5 $(=8-4.5)$.

היחס בין שטח המרובע ADEC (השטח הכהה) לשטח משולש ABC הוא 8 : 3.5.
נכפול את שני אגפי היחס פי 2, ונקבל כי היחס הוא 7:16.

<u>דרך ב'</u>: דמיון
מכיוון שנתון כי יש יחס זהה בין הקטע AD לצלע AB והקטע EC לצלע BC, ניתן לקבוע כי המשולש DBE בהכרח דומה למשולש ABC. מכיוון שידוע כי $AD=\frac{1}{4}AB$ וכי $EC=\frac{1}{4}BC$ ניתן לקבוע כי היחס בין כל צלע במשולש DBE לצלע במשולש ABC הוא 3:4.
בצורות דומות יחס השטחים שווה ל- $(\text{היחס הקווי})^2$. היחס הקווי בין שני המשולשים הוא 3:4, ומכאן שיחס השטחים שווה ל-9:16 $\left[=(3:4)^2\right]$.

אם שטח המשולש DBE מהווה $\frac{9}{16}$ משטח המשולש ABC, הרי ששטח המרובע ADEC הוא $\frac{7}{16}$ משטח המשולש ABC, כלומר היחס בין שטח המרובע לשטח המשולש ABC הוא 7:16.

תשובה (2).

---

19. **השאלה**: למרפאה הגיעו אילנה, בני וגילה, בַּסדר הזה. כל אחד מהם הגיע, המתין כמה דקות בחדר ההמתנה, ונכנס לחדר הרופא. הם נכנסו לחדר הרופא לפי סדר הגעתם למרפאה, ומיד לאחר שיצאו מחדר הרופא יצאו מהמרפאה. היו 7 דקות שבהן שהו גם אילנה וגם בני בחדר ההמתנה, 8 דקות שבהן שהו גם בני וגם גילה וגם בחדר ההמתנה ו-5 דקות שבהן שהו שלושתם יחד בחדר ההמתנה.

כמה דקות שהה בני בחדר ההמתנה?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית
נתון כי אילנה, בני וגילה, הגיעו בַּסדר הזה למרפאה. על מנת לפשט את השאלה נניח שאילנה, שלפי הנתונים הגיעה למרפאה ראשונה, נכנסה לחדר ההמתנה בשעה 8:00 בבוקר. לא ידוע כמה זמן שהתה אילנה לבדה בחדר ההמתנה, ולכן נניח כי בני נכנס למרפאה בשעה 8:10.
מכיוון שלפי נתוני השאלה היו 7 דקות שבהן שהו גם אילנה וגם בני בחדר המתנה, הרי שאילנה נכנסה לרופא בשעה 8:17 $(=8:10+7)$.

לפי נתוני השאלה היו 5 דקות שבהן שהו שלושתם בחדר המתנה, ומכאן שאם אילנה נכנסה לרופא בשעה 8:17, הרי שגילה הגיעה למרפאה 5 דקות קודם, כלומר ב-8:12 $(=8:17-5)$.

לפי הנתונים, בני וגילה שהו יחדיו 8 דקות בחדר ההמתנה, ומכאן שאם גילה הגיעה בשעה 8:12, הרי שבני נכנס לרופא בשעה 8:20 $(=8:12+8)$.

מצאנו כי בני נכנס למרפאה בשעה 8:10, וכי הוא נכנס לרופא בשעה 8:20, ולפיכך בני המתין לרופא בסך הכול 10 דקות $(=8:20-8:10)$.

<u>דרך ב'</u>: חפיפה

נשאלנו לגבי הזמן ששהה בני בחדר ההמתנה. בני שהה בחדר ההמתנה 7 דקות ביחד עם אילנה, ו-8 דקות יחד עם גילה, כלומר אם לא הייתה חפיפה כלשהי בין הזמן ששהה עם אילנה לבין הזמן ששהה עם גלי, הרי שבני שהה בסך הכול 15 דקות בחדר ההמתנה. אולם, מכיוון שלפי הנתונים היו 5 דקות שבהן שלושתם שהו יחד בחדר ההמתנה, הרי שזמן זה נספר למעשה פעמיים, ולכן יש להפחית אותו מסך הזמן הכולל. לפיכך מצאנו כי בני שהה 10 דקות בסך הכול בחדר ההמתנה $(=15-5)$.

תשובה (2).

---

20. השאלה: נתון: x הוא מספר דו-ספרתי.
x שווה לסכום ספרותיו **ועוד** ריבוע ספרת העשרות שלו.

מה ספרת העשרות של x?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות.
נבדוק לגבי כל אחת מהתשובות המוצעות, האם יתכן שסכום הספרות של x + ריבוע ספרת העשרות שלו שווה למספר הדו-ספרתי x:

<u>תשובה (1)</u>: 6.

אם ספרת העשרות של x היא 6, הרי שריבוע ספרת העשרות שלו שווה ל-36 $(=6^2)$.

ספרת האחדות המקסימלית האפשרית של x היא 9, ובמקרה כזה סכום הספרות של x שווה ל-15 $(=6+9)$.

סכום הספרות המקסימלי של x שווה ל-15, נחבר למספר זה את ריבוע ספרת העשרות השווה ל-36, ונמצא כי הסכום שווה ל- 51 $(=36+15)$. על פי הנתונים, x שווה לסכום ספרותיו ועוד ריבוע ספרת העשרות שלו. אולם, קיבלנו ש-x שווה ל-51, כאשר ספרת העשרות שלו היא 6 וספרת האחדות של היא 9. מכאן שהוא אינו יכול להיות שווה ל-x אשר שווה ל-69.

<u>תשובה (2)</u>: 7.

אם ספרת העשרות של x היא 7, הרי שריבוע ספרת העשרות שלו שווה ל-49 $(=7^2)$.

ספרת האחדות המקסימלית האפשרית של x היא 9, ובמקרה כזה סכום הספרות של x שווה ל-16 $(=7+9)$.

סכום הספרות המקסימלי של x שווה ל-16, נחבר למספר זה את ריבוע ספרת העשרות השווה ל-49, ונמצא כי הסכום שווה ל-65 $(=49+16)$, ומכאן שהוא אינו יכול להיות שווה ל-x השווה ל-79.

<u>תשובה (3)</u>: 8.

אם ספרת העשרות של x היא 8, הרי שריבוע ספרת העשרות שלו שווה ל-64 $(=8^2)$.

ספרת האחדות המקסימלית האפשרית של x היא 9, ובמקרה כזה סכום הספרות של x שווה ל-17 $(=8+9)$.

סכום הספרות המקסימלי של x שווה ל-17, נחבר למספר זה את ריבוע ספרת העשרות השווה ל-64, ונמצא כי הסכום שווה ל-81 $(=64+17)$, ומכאן שהוא אינו יכול להיות שווה ל-x שווה ל-89.

<u>תשובה (4)</u>: 9.

אם ספרת העשרות של x היא 9, הרי שריבוע ספרת העשרות שלו שווה ל-81 $\left(=9^2\right)$.

ספרת האחדות המקסימלית האפשרית של x היא 9, ובמקרה כזה סכום הספרות של x שווה ל-18 $\left(=9+9\right)$.

סכום הספרות המקסימלי של x שווה ל-18, נחבר למספר זה את ריבוע ספרת העשרות השווה ל-81, ונמצא כי הסכום הוא 99 $\left(=81+18\right)$, ומכאן שהוא שווה ל-x אשר שווה ל-99. זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: בנית משוואה

נסמן את ספרת העשרות של x ב-A, ואת ספרת האחדות ב-B.
המספר הדו-ספרתי x שקול ל- $10A+B$.
נתון כי x שווה לסכום ספרותיו ועוד ריבוע ספרת העשרות שלו. מכאן ש: $A+B+A^2=10A+B$.
נחסר A ו-B משני האגפים ונקבל: $A^2=9A$.
נחלק ב-A את שני האגפים, ונקבל: $A=9$.

תשובה (4).
