מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(2)	(1)	(3)	(3)	(1)	(3)	(3)	(3)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(3)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(3)	(4)	(4)

שאלה	21	22	23	24	25	26	27	28
תשובה	(3)	(3)	(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)

הסברים

.1 **השאלה**: a מספר שלם וחיובי. $\left(2a^2\right)^{-2}=?$

פתרון: בשאלה שלפנינו מעריך שלילי, כיוון שבתשובות אין תשובה עם מעריך שלילי נפשט את הביטוי בהתאם לחוק: $a^{-m}=\left(\frac{1}{a}\right)^m$, ונקבל: $\left(2a^2\right)^{-2} \Leftarrow \left(\frac{1}{2a^2}\right)^2 \Leftarrow \frac{1^2}{2^2a^{2\cdot2}} \Leftarrow \frac{1}{4a^4}$

תשובה (1).

.2 **השאלה**: $\dfrac{\frac{a^3\cdot b^2}{a^4\cdot b}}{\frac{a^2\cdot b^3}{b^4\cdot a}}=?$ $\qquad (a,b\neq0)$

פתרון: בשאלה שלפנינו חלוקה של שני שברים המורכבים כל אחד מביטויים עם חזקות. לפני שנבצע את פעולת החילוק ננסה לפשט את המונה והמכנה בנפרד על מנת שיהיה לנו קל יותר לבצע את החלוקה:

המונה - $\frac{a^3\cdot b^2}{a^4\cdot b}=\frac{{}^1\cancel{a^3}\cdot \cancel{b^2}^{b}}{{}_a\cancel{a^4}\cdot \cancel{b}_1}=\frac{b}{a}$

המכנה - $\frac{a^2\cdot b^3}{b^4\cdot a}=\frac{{}^a\cancel{a^2}\cdot \cancel{b^3}^{1}}{{}_b\cancel{b^4}\cdot \cancel{a}_1}=\frac{a}{b}$

תזכורת – כאשר מבצעים פעולת חילוק עם חזקות, נחפש בסיסים זהים ובעבורם נחסר מעריכים: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

כעת 'נרכיב' מחדש את הביטוי, ונמשיך לפשט בעזרת חלוקה בין שברים (כפל בהופכי): $\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}} \Leftarrow \frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a} \Leftarrow \frac{b^2}{a^2}$.

תשובה (2).

---

3. **השאלה**: נתון: a ו-b מספרים חיוביים.

$$\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{b-3}}{a^{2b}}=?$$

פתרון: לאור התשובות המוצעות שבכולן יש בסיס a, עלינו 'להפוך' את השבר שבמונה על מנת שהבסיס במונה ובמכנה השבר יהיו זהים. לשם פישוט המונה כך שהבסיס יהיה a, נשתמש בחוק $a^{-m}=\left(\frac{1}{a}\right)^m$,

ונהפוך את הבסיס, כך שנקבל: $\left(\frac{1}{a}\right)^{b-3}=a^{-(b-3)}$

כעת נציב את הביטוי שקיבלנו בביטוי המקורי, ונקבל: $\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{b-3}}{a^{2b}} \Leftarrow \frac{a^{-(b-3)}}{a^{2b}} \Leftarrow \frac{a^{-b+3}}{a^{2b}}$

מכיוון שבחלוקת ביטויים שבסיסם זהה יש לחסר את החזקות, נקבל: $\frac{a^{-b+3}}{a^{2b}} \Leftarrow a^{-b+3-2b} \Leftarrow a^{3-3b}$

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{3^x}=?$

פתרון: לאור התשובות המוצעות אנו רוצים להגיע למצב של בסיסים זהים.

לשם כך, נפשט את המונה כך שנישאר עם בסיס 3: ראשית 'נהפוך' את הבסיס במונה, ונקבל:

$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \Leftarrow 9^{-2}$. כעת 'נפרק' את 9 לבסיס 3, ונקבל: $9^{-2} \Leftarrow \left(3^2\right)^{-2}$.

כאשר מעלים חזקה בחזקה יש לכפול את החזקות. נקבל: $3^{2\cdot(-2)} \Leftarrow 3^{-4}$.

כעת נציב ביטוי זה בביטוי המקורי, ונשתמש בחוק החזקות אשר מתייחס למצב של חלוקת בסיסים

זהים: $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{3^x} \Leftarrow \frac{3^{-4}}{3^x} \Leftarrow 3^{-4-x}$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה**: $\frac{2^{x+4}:2^{x+1}}{3^{x+1}:3^{x-1}}=?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

הביטוי שלפנינו מורכב מחלוקה בין בסיסים זהים במונה ובמכנה, מכיוון שהתשובות מכוונות אותנו לכך שעלינו לקבל תשובה מספרית ללא נעלמים, נפשט את הביטוי באמצעות החוק המתייחס לחילוק של בסיסים זהים עד שנגיע לביטוי הפשוט ביותר. נפשט מונה ומכנה בנפרד, ונקבל:

מונה: $2^{x+4}:2^{x+1} \Leftarrow 2^{x+4-(x+1)} \Leftarrow 2^{x+4-x-1} \Leftarrow 2^3 \Leftarrow 8$.

מכנה: $3^{x+1}:3^{x-1} \Leftarrow 3^{x+1-(x-1)} \Leftarrow 3^{x+1-x+1} \Leftarrow 3^2 \Leftarrow 9$.

מצאנו כי הביטוי שווה ל- $\frac{8}{9}$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

אין כל נתון לגבי גודלו הממשי של x, ולכן נציב מספר נוח, למשל כי $x=1$, ונקבל: $\frac{2^{x+4}:2^{x+1}}{3^{x+1}:3^{x-1}}$ ⇦

$\frac{2^{1+4}:2^{1+1}}{3^{1+1}:3^{1-1}}$ ⇦ $\frac{2^5:2^2}{3^2:3^0}$ ⇦ $\frac{32:4}{9:1}$ ⇦ $\frac{8}{9}$.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: לכל מספר a הוגדרה פעולה $ המקיימת: $\$(a^2)=a^3$

$\$\left(\frac{1}{4}\right)=?$

פתרון: לפנינו פעולה מומצאת אשר מתייחסת ל- a^2 , כלומר, על מנת לבצע את הפעולה עלינו קודם כל לגלות מיהו a. התבקשנו לחשב מה ערכו של הביטוי $\$\left(\frac{1}{4}\right)$. כלומר המספר $\frac{1}{4}$ הוא למעשה a^2 , ולכן a עצמו הוא המספר שכאשר מעלים אותו בריבוע שווה ל- $\frac{1}{4}$, כלומר המספר $\frac{1}{2}$ $\left(a^2=\frac{1}{4} \leftarrow a=\frac{1}{2}\right)$.

נציב כי a שווה ל- $\frac{1}{2}$ בהגדרת הפעולה, ונקבל: $\$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\$\left(\frac{1}{4}\right)$, כעת מכיוון שלפי הגדרת הפעולה יש להעלות את a בחזקת 3, נקבל כי $a=\frac{1}{8}$.

תשובה (1).

---

7. **השאלה**: $3^x \cdot 9^x \cdot 27^x = ?$

פתרון: בשאלה שלפנינו כפל בין בסיסים שאינם זהים, על מנת שנוכל לחבר את החזקות עלינו להגיע למצב של בסיסים זהים, ולכן נבטא כל איבר באמצעות הבסיס '3': $3^x \cdot 9^x \cdot 27^x$ ⇦ $3^x \cdot \left(3^2\right)^x \cdot \left(3^3\right)^x$.

כאשר יש פעולת חזקה בחזקה, יש לבצע פעולת כפל בין החזקות/מעריכים, ולכן: $3^x \cdot \left(3^2\right)^x \cdot \left(3^3\right)^x$ ⇦ $3^x \cdot 3^{2\cdot x} \cdot 3^{3\cdot x}$ ⇦ $3^x \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x}$.

כעת, כשהגענו למצב של כפל בין בסיסים זהים, יש לחבר את המעריכים, נקבל: $3^x \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x}$ ⇦ $3^{x+2x+3x}$ ⇦ 3^{6x} .

תשובה (3).

---

8. **השאלה**: $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3}\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}=?$ $\quad \frac{2^{-6}}{3^{-6}}\cdot\frac{3^{-2}}{2^{-6}}=\frac{2^{-6}}{2^{-6}}\cdot\frac{3^{-2}}{3^{-6}}=2^{-6-(-6)}\cdot 3^{-2-(-6)}=2^0\cdot 3^4=81$

פתרון: מכיוון שהתשובות המוצעות הן מספריות, הרי שעלינו לחשב את ערכו של הביטוי. נפשט את הביטוי על ידי פירוק הבסיסים הנתונים לבסיסים 'קטנים' יותר, ואז נשתמש בחוקי החזקות שאנו מכירים:

הביטוי השמאלי: $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} \Leftarrow \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{-3} \Leftarrow \frac{2^{2\cdot(-3)}}{3^{2\cdot(-3)}} \Leftarrow \frac{2^{-6}}{3^{-6}}$

הביטוי הימני: $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \Leftarrow \left(\frac{3^1}{2^3}\right)^{-2} \Leftarrow \frac{3^{1\cdot(-2)}}{2^{3\cdot(-2)}} \Leftarrow \frac{3^{-2}}{2^{-6}}$

כאשר ברצוננו לפרק בסיס של חזקה, ננסה לבדוק האם הוא חזקה של בסיס קטן יותר (כפי שעשינו כאן) ואם לא ננסה לפרקו למכפלה של גורמים קטנים יותר

כעת נציב את הביטויים שקיבלנו בביטוי המקורי: $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3}\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \Leftarrow \frac{2^{-6}}{3^{-6}}\cdot\frac{3^{-2}}{2^{-6}} \Leftarrow \frac{2^{-6}}{2^{-6}}\cdot\frac{3^{-2}}{3^{-6}} \Leftarrow$

$2^{-6-(-6)}\cdot 3^{-2-(-6)} \Leftarrow 2^0\cdot 3^4 \Leftarrow 1\cdot 81 \Leftarrow 81$.

תשובה (3).

---

9. **השאלה**: שלושה מהביטויים שבתשובות שווים בערכם. מיהו הביטוי שערכו <u>שונה</u> מערכם של שלושת הביטויים האחרים?

פתרון: השאלה מפנה אותנו 'לעבוד' עם תשובות. נפשט את התשובות במטרה למצוא מי התשובה יוצאת הדופן. כיוון שבשאלה זו אין לנו ביטוי שאליו אנו שואפים, נתבונן בתשובות ונחפש גורם משותף ביניהן. מכיוון שכמעט כל התשובות הן בעלות בסיס 12, נשאף להביא את כל התשובות לבסיס זה כך יהיה לנו נוח יותר להשוות ביניהן. תשובה (2) אשר מופיעה בצורה מפושטת תהווה "עוגן" בעבורנו. נתחיל בתשובה (3) אשר הבסיס שלה אף הוא שווה ל-12:

<u>תשובה (3)</u>: $\left(12^4\right)^4$. נפשט את הביטוי בעזרת כפל מעריכים, ונקבל: $\left(12^4\right)^4 \Leftarrow 12^{4\cdot 4} \Leftarrow 12^{16}$

הערך שמצאנו שונה מערכה של תשובה (2), ולכן עלינו לבדוק תשובה נוספת על מנת לדעת מי מהתשובות היא היוצאת דופן.

<u>תשובה (4)</u>: $12^6\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^2$. נפשט את הביטוי שבסוגריים, כך שגם הוא יהיה בבסיס 12, ונקבל:

$12^6\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^2 \Leftarrow 12^6\cdot(4\cdot 3)^2 \Leftarrow 12^6\cdot 12^2 \Leftarrow 12^{6+2} \Leftarrow 12^8$.

מצאנו כי ערכו של הביטוי בתשובה (4) זהה לערך הביטוי שבתשובה (2), ולכן ניתן לקבוע כי תשובה (3) היא התשובה יוצאת הדופן.

לשם השלמת הבדיקה בלבד נפשט את תשובה (1).

<u>תשובה (1)</u>: $2^{16}\cdot 3^8$. מכיוון שהבסיסים שונים, ננסה להגיע לחזקות שוות על ידי פירוק החזקה של 2, ונקבל: $2^{16}\cdot 3^8 \Leftarrow 2^{8+8}\cdot 3^8 \Leftarrow 2^8\cdot 2^8\cdot 3^8$.

מכיוון שכעת לכל הבסיסים יש חזקות זהות, ניתן 'לחבר' את כל הבסיסים באמצעות כפל ביניהם:

$2^8\cdot 2^8\cdot 3^8 \Leftarrow (2\cdot 2\cdot 3)^8 \Leftarrow 12^8$.

תשובה (3).

10. **השאלה**: $\frac{22^2-22}{21^2+21}=?$

פתרון: לאור התשובות, נחשב את ערכו של הביטוי. החזקות שלפנינו הן בעלות בסיסים גדולים, לכן, לכאורה, יש צורך בחישובים של מספרים גדולים, אולם מכיוון שבמבט בתשובות המוצעות אנו יודעים שהערכים המוצעים אינם גבוהים, אין טעם בחישובים מסובכים, אלא יש לחפש דרך לפשט את הביטוי.

בחיבור וחיסור, הדרך לפשט היא הוצאת גורם משותף: $\frac{22^2-22}{21^2+21} \Leftarrow \frac{22\cdot(22-1)}{21\cdot(21+1)} \Leftarrow \frac{22\cdot 21}{21\cdot 22}$.

קיבלנו שבר אשר הביטויים במונה ובמכנה שלו הם זהים לגבריי, ומכאן שערכו של השבר הוא 1.

תשובה (1).

---

11. **השאלה**: $\frac{x^{x+1}}{\frac{1}{x}}=?$ $\quad (1<x)$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

על מנת לפשט את הביטוי עלינו להגיע למצב של בסיסים זהים.

מכיוון שהבסיס במונה הוא x, נפשט את המכנה, באמצעות החוק כי: $\left(\frac{x}{1}\right)^{-m}=\left(\frac{1}{x}\right)^{m}$, ונקבל כי הביטוי שבמכנה שקול ל- x^{-1}.

כעת נציב ביטוי זה בביטוי המקורי, ונקבל: $\frac{x^{x+1}}{\frac{1}{x}} \Leftarrow \frac{x^{x+1}}{x^{-1}}$.

כאשר יש חלוקה של בסיסים זהים, יש לחסר את החזקות, ומכאן: $\frac{x^{x+1}}{x^{-1}} \Leftarrow x^{x+1-(-1)} \Leftarrow x^{x+2}$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

אין כל נתון לגבי גודלו של x, למעט כי הוא גדול מ-1, ולכן נציב כי x שווה ל-2, ונקבל: $\frac{x^{x+1}}{\frac{1}{x}} \Leftarrow$

$\frac{2^{2+1}}{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{2^3}{\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{8}{\frac{1}{2}} \Leftarrow 8\cdot\frac{2}{1} \Leftarrow 16$.

תשובה (2).

---

12. **השאלה**: $2^{2x}\cdot 4^{x+1}=?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

לאור התשובות המוצעות עלינו להגיע לבסיס יחיד, נמיר את 4 לבסיס 2, ונקבל: $2^{2x}\cdot 4^{x+1} \Leftarrow$

$2^{2x}\cdot\left(2^2\right)^{x+1} \Leftarrow 2^{2x}\cdot 2^{2x+2} \Leftarrow 2^{2x+2x+2} \Leftarrow 2^{4x+2}$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב בביטוי למשל כי x שווה ל-1, ונקבל: $2^{2x}\cdot 4^{x+1} \Leftarrow 2^{2\cdot 1}\cdot 4^{1+1} \Leftarrow 2^2\cdot 4^2 \Leftarrow$

תשובה (3).

.13 **השאלה**: לכל x חיובי הוגדרה פעולה חדשה $ כך ש: $\$(x) = x^{x+1}$;

$\$\big(\$(1)\big) =$

פתרון: ראשית נבין את הפעולה המומצאת. כאשר מבצעים את פעולת ה-$ על נעלם כלשהו (x), התוצאה המתקבלת היא הנעלם בחזקת מעריך הגדול ממנו ב-1.
כעת, נבדוק מה ערכו של הביטוי בסוגריים הפנימיים $\$(1)$ על ידי הצבתו בהגדרת הפעולה, ונקבל כי ערכו של $\$(1)$ הוא 1 $\left(\$(1) = 1^{1+1} = 1^2 =\right)$

כעת נתייחס לפעולה ה'חיצונית', כיוון שאנו מבצעים את אותה פעולה בדיוק שוב על המספר 1, נוכל להגיד, גם מבלי לחשב, שהתוצאה היא שוב 1.

תשובה (1).

.14 **השאלה**: נתון: $0 < x < y$. ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא הקטן ביותר?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית
נשאלנו מי הביטוי הקטן ביותר, ולכן ניתן לפתור את השאלה באמצעות הצבת מספרים המקיימים את נתוני השאלה, למשל $x = 1$ ו- $y = 2$ בתשובות המוצעות וחישוב ערכה של כל אחת מהתשובות.
התשובה אשר ערכה הוא הנמוך ביותר היא תשובה (2) אשר ערכה שווה ל-1, ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

השאלה מפנה אותנו לתשובות. ולכן נחפש תשובות אשר הבסיסים שלהן או המעריכים שלהם זהים.
בתשובות (1) ו-(2) המעריכים זהים. לפי הנתון y גדול מ-x, ולכן ערכה של תשובה (1) - y^4 גדול מערכה של תשובה (2) - x^4 , ומכאן שתשובה (1) נפסלת.
כעת, נשווה בין תשובה (2) לתשובה (3). נפשט את הביטוי בתשובה (2), ל- $x \cdot x^3$.
הביטוי בתשובה (3) הוא y^3x . בשתי התשובות יש ביטוי המורכב ממכפלה של x בביטוי אחר.
בתשובה (2) כופלים את x ב- x^3 , ובתשובה (3) כופלים את x ב- y^3 . מכיוון ש- $x < y$, הרי שבהכרח x^3 קטן מ- y^3, ומכאן שערכה של תשובה (2) קטן מערכה של תשובה (3).
כעת נשווה בין תשובה (2) לתשובה (4). נפשט את תשובה (2) ל- $x^2 \cdot x^2$.
בשתי התשובות כופלים את x^2 בביטוי כלשהו. בתשובה (2) ב- x^2 ובתשובה (4) ב- y^2 .
מכיוון ש- $x < y$, הרי ש- x^2 קטן מ- y^2 , ומכאן שערכה של תשובה (2) קטן מערכה של תשובה (3).

תשובה (2).

.15 **השאלה**: $x^2 \cdot \frac{1}{x^{x+1}} = ?$ $\quad (0 < x)$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית
נציב לדוגמה כי $x = 2$ בביטוי, ונמצא כי ערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{2}$ $\left(x^2 \cdot \frac{1}{x^{x+1}} = 2^2 \cdot \frac{1}{2^{2+1}} = 4 \cdot \frac{1}{8} =\right)$.

נציב כי x שווה 2, ונמצא כי ערכן של תשובות (2), (3) ו-(4) שונה מ- $\frac{1}{2}$, ולכן ניתן לפסול אותן, ולקבוע כי תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

מכיוון שבתשובות המוצעות מופיע הבסיס x, נפשט את הביטוי בעזרת חוקי החזקות, כך שיכיל כפל בין בסיסים זהים (x). על מנת שנוכל לחבר בין החזקות אנו זקוקים לבסיסים זהים.

במכפלה שלפנינו הבסיס של הגורם הראשון הוא x, ושל השני - $\frac{1}{x}$.

באמצעות חוק ה'חזקה השלילית', נהפוך את הבסיס על ידי כפל ב-(-1) של המעריך, ונקבל: $\frac{1}{x^{x+1}}$ ⇦

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} \Leftarrow x^{-1\cdot(x+1)} \Leftarrow x^{-x-1}$$

כעת נציב ביטוי זה בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $x^2\cdot\frac{1}{x^{x+1}} \Leftarrow x^2\cdot x^{-x-1}$

כעת, מכיוון שקיבלנו כפל של בסיסים זהים, ניתן לחבר את החזקות: $x^2\cdot x^{-x-1} \Leftarrow x^{2+-x-1} \Leftarrow x^{1-x}$.

ניתן לפסול את תשובות (2), (3) ו-(4) השונות מביטוי זה או לפשט את הביטוי שבתשובה (1):

$x\cdot\frac{1}{x^x} \Leftarrow x^1\cdot x^{-x} \Leftarrow x^{1-x}$.

תשובה (1).

.16 **השאלה**: עבור כל x ו-y חיוביים, הוגדרה פעולה חדשה @ באופן הבא: $x^2 @ y^2 = x\cdot y$.

$$\frac{1}{4}@\frac{1}{9}=?$$

פתרון: ראשית, נבין את הפעולה החדשה שהוגדרה: לפי הגדרת הפעולה כאשר יש סימן @ בין שני מספרים שהם ביטויים שהעלו אותם בחזקה שנייה. תוצאת הפעולה היא מכפלת המספרים לפני שהעלו אותם בחזקה שנייה. כלומר, בכדי לפתור את השאלה, צריך קודם כל לפשט את הביטוי המבוקש כך שיתאים לתבנית המוצעת, ורק אז נוכל לפתור את הביטוי.

אם x^2 הוא $\frac{1}{4}$, הרי ש-x הוא המספר שכאשר נעלה אותו בריבוע נקבל $\frac{1}{4}$, כלומר שווה ל- $\frac{1}{2}$ $\left(x=\frac{1}{2} \leftarrow x^2=\frac{1}{4}\right)$, באותו אופן נמצא כי y שווה ל- $\frac{1}{3}$ $\left(y=\frac{1}{3} \leftarrow y^2=\frac{1}{9}\right)$.

נציב כי x שווה ל- $\frac{1}{2}$, ו-y שווה ל- $\frac{1}{3}$ בהגדרת הפעולה, ונקבל: $\frac{1}{4}@\frac{1}{9} \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2@\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

כעת מכיוון שלפי הגדרת הפעולה יש לכפול את x ו-y, נקבל: $\left(\frac{1}{2}\right)^2@\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \Leftarrow \frac{1}{6}$.

תשובה (1).

---

17. **השאלה**: $\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = ?$ $(m \neq n)$

פתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית

אין נתון כל מספרי לגבי m ו-n, אלא רק נתון שלפיו ערכם שונה, ולכן נציב למשל כי m שווה ל-1, ו-n שווה ל-2, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא: $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{{}^1\cancel{2}}{{}_1\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{4}_2} = \frac{3}{2}\right)$.

נציב ערכים אלו בתשובות, ונמצא כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(3) שונה מערך זה, ומכאן שתשובה (4) היא התשובה הנכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי

לפנינו כפל בין בסיסים שונים. ברצוננו להגיע לבסיסים זהים על מנת להשתמש בחוק של כפל בין בסיסים זהים. במטרה להגיע לבסיס המוצע ב-3 מהתשובות $\left(\frac{2}{3}\right)$, 'נהפוך' את הבסיס הימני באמצעות חוק ה'חזקה השלילית' (זכרו – הבסיס מתהפך והמעריך משנה סימן), ונקבל:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-n}$$

כעת נציב ביטוי זה בביטוי המקורי, ונקבל: $\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-n}$.

כעת, מכיוון שמדובר בכפל בין בסיסים זהים, ניתן לחבר את המעריכים/חזקות שלהם, ולקבל: $\left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}$.

תשובה (4).

18. **השאלה**: a הוא מספר חיובי.

ערכו של איזה מהביטויים הבאים **אינו** שווה ל- $a^{-n}+a^{n}$?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי a שווה ל-2 ו-n שווה 3, ונקבל כי ערך הביטוי הוא $8\frac{1}{8}$ $\left(a^{-n}+a^{n}=2^{-3}+2^{3}=\frac{1}{8}+8=\right)$.

כעת נציב מספרים אלו בתשובות המוצעות, ונקבל כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(4) זהה ל- $8\frac{1}{8}$, ואילו ערכה של תשובה (3) הוא 9 , ומכאן שזו התשובה הנכונה.

$$\left[a^{2n}\left(a^{-n}+a^{-2n}\right)=2^{2\cdot3}\left(2^{-3}+2^{-2\cdot3}\right)=2^{6}\cdot\left(\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{2^{6}}\right)=\frac{2^{6}}{2^{3}}+\frac{2^{6}}{2^{6}}=2^{6-3}+1=\right]$$

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

השאלה מפנה אותנו לתשובות.

נפשט כל אחת מהתשובות המוצעות, ונבדוק מי מהן אינה שווה לביטוי:

<u>תשובה (1)</u>: $a^{n}\left(1+a^{-2n}\right)$. נפשט את הביטוי באמצעות פתיחת הסוגריים, ונקבל: $a^{n}\left(1+a^{-2n}\right) \Leftarrow$

$a^{n}+a^{n}\cdot a^{-2n} \Leftarrow a^{n}+a^{n-2n} \Leftarrow a^{n}+a^{-n}$.

מכיוון שמצאנו כי תשובה (1) זהה לביטוי הנתון בשאלה, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (2)</u>: $a^{-n}\left(a^{2n}+1\right)$. נפשט את הביטוי באמצעות פתיחת סוגריים, ונקבל: $a^{-n}\left(a^{2n}+1\right) \Leftarrow$

$a^{-n}\cdot a^{2n}+a^{-n} \Leftarrow a^{-n+2n}+a^{-n} \Leftarrow a^{n}+a^{-n}$

מצאנו כי תשובה (2) זהה לביטוי הנתון בשאלה, ומכאן שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (3)</u>: $a^{2n}\left(a^{-n}+a^{-2n}\right)$. נפשט את הביטוי, ונקבל: $a^{2n}\left(a^{-n}+a^{-2n}\right) \Leftarrow$

$a^{2n}\cdot a^{-n}+a^{2n}\cdot a^{-2n} \Leftarrow a^{2n}\cdot a^{-n}+a^{2n}\cdot a^{-2n} \Leftarrow a^{2n-n}+a^{2n-2n} \Leftarrow a^{n}+a^{0} \Leftarrow$

$a^{n}+1$

מכיוון שמצאנו כי תשובה (3) **אינה** שווה לביטוי הנתון בשאלה, הרי זו התשובה הנכונה.

אין צורך להמשיך ולבדוק את תשובה (4), אולם נעשה זאת לשם השלמת ההסבר:

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{1+a^{2n}}{a^{n}}$. נפשט את הביטוי באמצעות פרוק המונה, ונקבל: $\frac{1+a^{2n}}{a^{n}} \Leftarrow \frac{1}{a^{n}}+\frac{a^{2n}}{a^{n}}$

קיבלנו ביטוי המורכב משני מחוברים. המחובר הראשון שווה ל- a^{-n}, ואילו כאשר מפשטים את המחובר השני באמצעות חיסור חזקות זהות, נקבל: a^{-n}.

קיבלנו תשובה הזהה לביטוי שבשאלה ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3).

19. **השאלה**: $\frac{4^{a+b} \div 4^{a+2b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}} = ?$.

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב כי a שווה ל-2 ו-b שווה ל-1, ונקבל כי ערך הביטוי שווה ל-1

$$\left(\frac{4^{a+b} \div 4^{a+2b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}} = \frac{4^{2+1} \div 4^{2+2\cdot1}}{2^{2-1} \div 2^{2\cdot2-1}} = \frac{4^3 \div 4^4}{2^1 \div 2^3} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \right).$$

נציב ערכים אלו בתשובות המוצעות, ונקבל כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(3) שונה מ-1, ומכאן שניתן לפסול אותן ולקבוע כי התשובה הנכונה היא תשובה (4).

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

בכל התשובות המוצעות הבסיס הוא 2, ולכן נהפוך את 4 ל- 2^2 , ונקבל:

$$\frac{4^{a+b} \div 4^{a+2b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}} \Leftarrow \frac{\left(2^2\right)^{a+b} \div \left(2^2\right)^{a+2b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}} \Leftarrow \frac{2^{2a+2b} \div 2^{2a+4b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}}$$

כעת מכיוון שהן במונה והן במכנה יש חילוק בין בסיסים זהים, נחסר את החזקות, ונקבל:

$$\frac{2^{2a+2b} \div 2^{2a+4b}}{2^{a-b} \div 2^{2a-b}} \Leftarrow \frac{2^{2a+2b-(2a+4b)}}{2^{a-b-(2a-b)}} \Leftarrow \frac{2^{2a+2b-2a-4b}}{2^{a-b-2a+b}} \Leftarrow \frac{2^{-2b}}{2^{-a}} \Leftarrow 2^{-2b-(-a)} \Leftarrow 2^{a-2b}$$

תשובה (4).

---

20. **השאלה**: $\frac{2^{2x}}{2^x + 2^x} = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי x שווה ל-1, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 1 $\left(\frac{2^{2x}}{2^x + 2^x} = \frac{2^{2\cdot1}}{2^1 + 2^1} = \frac{4}{2+2} = \right)$.

מכיוון שערכן של תשובות (2) ו-(3) שונה מ-1, ניתן לפסול תשובות אלו.

נציב שוב על מנת להכריע בין תשובות (1) ו-(4), למשל כי x שווה ל-2, ונמצא כי כעת ערכו של הביטוי הוא 2 $\left(\frac{2^{2x}}{2^x + 2^x} = \frac{2^{2\cdot2}}{2^2 + 2^2} = \frac{16}{4+4} = \right)$, ומכאן שתשובה (1) נפסלת.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

במכנה הביטוי יש שני מחוברים. הדרך לפשט פעולת חיבור/חיסור היא הוצאת גורם משותף: $\frac{2^{2x}}{2^x + 2^x}$

$$\Leftarrow \frac{2^{2x}}{2^x \cdot (1+1)} \Leftarrow \frac{2^{2x}}{2^x \cdot 2} \Leftarrow \frac{2^{2x}}{2^x \cdot 2^1} \Leftarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+1}} \Leftarrow 2^{2x-(x+1)} \Leftarrow 2^{2x-x-1} \Leftarrow 2^{x-1}.$$

תשובה (4).

.21 **השאלה**: $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^5}{\left(\frac{9}{15}\right)^3} = ?$

פתרון: פישוט אלגברי

מדובר בשאלה על ערכו של ביטוי המורכב מערכים מספריים בלבד, נחשב את ערכו של הביטוי. על מנת שלא לעבוד עם מספרים גדולים, נחפש לצמצם ככל הניתן: $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^5}{\left(\frac{9}{15}\right)^3} \Leftarrow \dfrac{\frac{3^5}{5^5}}{\frac{9^3}{15^3}} \Leftarrow \dfrac{3^5}{5^5}\dfrac{15^3}{9^3} \Leftarrow$

$\dfrac{3^5}{5^5}\dfrac{(3\cdot5)^3}{\left(3^2\right)^3} \Leftarrow \dfrac{3^5\cdot3^3\cdot5^3}{5^5\cdot3^6} \Leftarrow \dfrac{3^{5+3}\cdot5^3}{5^5\cdot3^6} \Leftarrow \dfrac{3^8\cdot5^3}{5^5\cdot3^6} \Leftarrow 3^{8-6}\cdot5^{3-5} \Leftarrow 3^2\cdot5^{-2} \Leftarrow 9\cdot\dfrac{1}{25} \Leftarrow \dfrac{9}{25}$.

תשובה (3).

.22 **השאלה**: $\dfrac{x^{x+1}}{x} = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי x שווה ל-2, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(\dfrac{x^{x+1}}{x} = \dfrac{2^{2+1}}{2} = \dfrac{8}{2} =\right)$.

נציב ערך זה בתשובות ונמצא כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(4) שונה מ-4, ולכן ניתן לקבוע כי תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

בחילוק של בסיסים זהים יש לחסר את המעריכים/חזקות, ונקבל: $\dfrac{x^{x+1}}{x} \Leftarrow \dfrac{x^{x+1}}{x^1} \Leftarrow x^{x+1-1} \Leftarrow x^x$.

תשובה (3).

.23 **השאלה**: $\dfrac{2^7\cdot5^4}{10^6} = ?$

פתרון: לאור התשובות, עלינו לחשב את ערכו המספרי של הביטוי, לשם כך אנו זקוקים לבסיסים זהים. הבסיסים שבמונה הם מספרים ראשוניים, ולכן אין באפשרותנו לפרק אותם, אך נוכל לפרק את הבסיס שבמכנה ל-5 ול-2 בעזרת החוק $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$: $10^6 \Leftarrow (2\cdot5)^6 \Leftarrow 2^6\cdot5^6$.

כעת נציב ביטוי זה בביטוי המקורי, ונקבל: $\dfrac{2^7\cdot5^4}{10^6} \Leftarrow \dfrac{2^7\cdot5^4}{2^6\cdot5^6} \Leftarrow 2^{7-6}\cdot5^{4-6} \Leftarrow 2^1\cdot5^{-2} \Leftarrow$

$2\cdot\dfrac{1}{25} \Leftarrow \dfrac{2}{25}$.

תשובה (3).

.24 **השאלה**: נתון: $x+y+z=4$

$2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = ?$

פתרון: ראשית, נפשט את הביטוי עליו נשאלנו. במכפלה של בסיסים זהים ניתן לחבר את המעריכים,
נקבל: $2^z \cdot 2^y \cdot 2^x \Leftarrow 2^{x+y+z}$
לפי הנתון $x+y+z=4$, נציב ערך זה בביטוי, ונקבל: $2^{x+y+z} \Leftarrow 2^4 \Leftarrow 16$.

תשובה (2).

.25 **השאלה**: $2^{\left(2^0\right)} \cdot 3^{\left(3^0\right)} \cdot 5^{\left(2^0\right)} = ?$

פתרון: ראשית נפשט את הביטויים שבתוך הסוגריים. זכרו: כאשר מעלים כל מספר (השונה מ-0), בחזקת 0 התוצאה תהיה שווה ל-1. נקבל: $2^{\left(2^0\right)} \cdot 3^{\left(3^0\right)} \cdot 5^{\left(2^0\right)} \Leftarrow 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \Leftarrow 30$.

תשובה (3).

.26 **השאלה**: ערכם של שלושה מארבעת הביטויים הבאים שווה. מיהו הביטוי הנותר?

פתרון: __**דרך א'**__: הצבת דוגמה מספרית

נציב בכל אחד מהביטויים המוצעים בתשובות כי $x=2$, ונקבל:

__תשובה (1)__: x^2. כאשר x שווה ל-2, ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(x^2 = 2^2 =\right)$

__תשובה (2)__: $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$. כאשר x שווה ל-2, ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} =\right)$.

מצאנו כי ערכן של תשובות (1) ו-(2) זהה, ומכאן שהתשובה הנכונה – התשובה יוצאת הדופן - היא בהכרח אחת משתי התשובות הנותרות, תשובות (3) ו-(4).
מי שהבחין כי למעט סימן המינוס שבתוך הסורגים, תשובה (4) זהה לתשובה (2), הרי מכיוון שסימן המינוס מתבטל בעזרת החזקה הזוגית, יכול לקבוע ללא שימוש נוסף בהצבה, כי ערכה של תשובה (4) שווה בערכה לתשובות (1) ו-(2), ולפיכך התשובה הנכונה היא תשובה (3).

מי שלא הבחין בכך ייאלץ להמשיך בבדיקת הדוגמה המספרית:

__תשובה (3)__: $(-x)^{-2}$. כאשר x שווה ל-2, ערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{4}$ $\left((-x)^{-2} = (-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} =\right)$.

מכיוון שערכה של תשובה זו שונה מערכן של תשובות (1) ו-(2), הרי שניתן לקבוע כי זו התשובה הנכונה.
לשם השלמת ההסבר נבדוק את ערכה של תשובה (4):

__תשובה (4)__: $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2}$. כאשר x שווה ל-2, ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{1}\right)^{2} =\right)$

.

<u>דרך ב'</u> : נפשט את התשובות המוצעות.

זכרו : בכדי להמיר חזקה שלילית לחזקה חיובית, יש להפוך את הבסיס. כאשר מעלים מספר שלילי בחזקה זוגית התוצאה בהכרח חיובית :

<u>תשובה (1)</u> : x^2 .

<u>תשובה (2)</u> : $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$. נפשט את הביטוי, ונמצא כי ערכו שווה ל- x^2 : $x^2 \Leftarrow \left(\frac{x}{1}\right)^2 \Leftarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$.

<u>תשובה (3)</u> : $(-x)^{-2}$. נפשט את הביטוי, ונמצא כי ערכו שווה ל- $\frac{1}{x^2}$: $\frac{1}{x^2} \Leftarrow \left(-\frac{1}{x}\right)^2 \Leftarrow (-x)^{-2}$.

<u>תשובה (4)</u> : $\left(-\frac{1}{x}\right)^{-2}$. נפשט את הביטוי ונמצא כי ערכו שווה ל- x^2 : $x^2 \Leftarrow \left(-\frac{x}{1}\right)^2 \Leftarrow \left(-\frac{1}{x}\right)^{-2}$.

התשובה יוצאת הדופן היא תשובה (3).

תשובה (3).

.27 **השאלה** : $\frac{a^4 \cdot b^3}{a^3 \cdot b^2} \div \frac{a^5 \cdot b^2}{a^3 \cdot b^3} = ?$

פתרון : **<u>דרך א'</u>** : הצבת דוגמה מספרית

נציב $a=2$ ו- $b=3$ בביטוי, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא $\frac{9}{2}$

$$\left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a^3 \cdot b^2} \div \frac{a^5 \cdot b^2}{a^3 \cdot b^3} = \frac{2^4 \cdot 3^3}{2^3 \cdot 3^2} \div \frac{2^5 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{{}^2\cancel{16} \cdot \cancel{27}^3}{\cancel{8}_1 \cdot \cancel{9}_1} \div \frac{{}^4\cancel{32} \cdot \cancel{9}^1}{{}_1\cancel{8} \cdot \cancel{27}_3} = \frac{3 \cdot 2}{1} \div \frac{4}{3} = {}^3\cancel{6} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_2} = \right)$$

כעת נציב ערכים אלו בתשובות, ונמצא כי ערכן של תשובות (1), (3) ו-(4) שונה מערך זה, ולכן ניתן לפסול אותן ולקבוע כי תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u> : פישוט אלגברי

ראשית נפשט כל שבר בנפרד. בכל אחד מהשברים יש במונה ובמכנה בסיסים a ו-b בחזקות שונות.
נבצע את תרגיל החילוק על ידי חיסור מעריכים של בסיסים זהים, נקבל :

$$a^1 \cdot b^1 \div a^2 \cdot b^{-1} \Leftarrow a^{4-3} \cdot b^{3-2} \div a^{5-3} \cdot b^{2-3} \Leftarrow \frac{a^4 \cdot b^3}{a^3 \cdot b^2} \div \frac{a^5 \cdot b^2}{a^3 \cdot b^3}$$

כעת נבצע את החילוק בין האיברים, נוח לרשום את החילוק כקו שבר : $\Leftarrow a^{1-2} \cdot b^{1-(-1)} \Leftarrow \frac{a^1 \cdot b^1}{a^2 \cdot b^{-1}}$

$$\frac{b^2}{a} \Leftarrow a^{-1} \cdot b^2$$

תשובה (2).

28. **השאלה**: לכל שני מספרים a ו-b הוגדרה פעולה חדשה $ באופן הבא: $\$(a,b)=a^b$

איזו מהטענות הבאות נכונה בוודאות?

פתרון: לפנינו פעולה מומצאת המוגדרת על שני מספרים, ולפיה יש להעלות את המספר השמאלי בחזקת המספר הימני. על מנת לדעת איזו מהתשובות נכונה עלינו ליישם את הפעולה המומצאת בכל אחת מהתשובות ולבדוק האם הביטויים המתקבלים בשני האגפים זהים.

<u>תשובה (1)</u>: $\$(a,b)=\$(b,a) \Leftarrow a^b=b^a$. משוואה זו תהיה אינה נכונה בהכרח (ניתן לבדוק זאת על ידי הצבת שני מספרים לדוגמה, למשל: $a=2$ ו- $b=3$).

<u>תשובה (2)</u>: $\$(a,b)=a\cdot\$(a,b-1) \Leftarrow a^b=a\cdot a^{b-1} \Leftarrow a^b=a^1\cdot a^{b-1} \Leftarrow a^b=a^{1+b-1} \Leftarrow a^b=a^b$.

תשובה (2).