מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(1)	(3)	(2)	(4)	(4)	(4)	(4)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(1)	(4)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)

שאלה	21	22	23	24	25	26
תשובה	(4)	(2)	(1)	(4)	(2)	(1)

הסברים

1. **השאלה**: $y<0<x$

איזה מהביטויים הבאים הוא **בוודאות** שלילי?

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): $x^3(x+y)$.

נבדוק בנפרד את סימנו של כל אחד משני הגורמים של המכפלה הנתונה:

נתון כי x הוא חיובי, ולפיכך x^3 בהכרח חיובי.

מכיוון ש-x חיובי ו-y שלילי לא ניתן לדעת האם סכומם $(x+y)$ חיובי או שלילי, ולפיכך הרי שלא ניתן לקבוע בוודאות את סימנה של המכפלה.

תשובה (2): $y^3(y-x)$.

נבדוק בנפרד את סימנו של כל אחד משני הגורמים של המכפלה הנתונה:

נתון כי y הוא שלילי ולפיכך y^3 גם הוא שלילי.

נתון כי $y<x$ ולכן הביטוי $y-x$ הוא בהכרח שלילי.

מצאנו כי שני גורמי המכפלה הם שליליים, ולכן תוצאת מכפלתם היא בהכרח חיובית.

תשובה (3): $x^2(y-x)$.

לפי הנתון x חיובי ולכן גם x^2 הוא חיובי.

x גדול מ-y, ולכן הביטוי $y-x$ הוא בהכרח שלילי.

מצאנו כי אחד מגורמי המכפלה הוא חיובי והאחר שלילי, ומכאן שתוצאת המכפלה בהכרח שלילית. מכיוון שמצאנו את התשובה הנכונה. ניתן לעצור כאן.

תשובה (4): $y^2(x-y)$.

לפי הנתון y שלילי, ומכאן ש-y^2 חיובי.

x גדול מ-y, ולכן הביטוי $x-y$ הוא בהכרח חיובי.

מצאנו כי שני גורמי המכפלה הם חיוביים, ולכן תוצאת מכפלתם היא בהכרח חיובית.

תשובה (3).

2. **השאלה**: $c^2 < a \cdot b$

$b < c < a$

מה מהבאים **אינו** יתכן?

פתרון: השאלה מפנה אותנו לתשובות. עלינו לבדוק לגבי כל תשובה כי מתקיימים שני תנאים.
התנאי הראשון שנבדוק הוא האם מתקיים היחס בין גודלם של המשתנים בהתאם לנתון השני $(b < c < a)$, והתנאי השני הוא האם מכפלתם של a ו-b, יכולה להיות גדולה מ- c^2.

מכיוון שכאשר מעלים מספר כלשהו בריבוע, נקבל בהכרח תוצאה השווה או הגדולה מ-0, הרי שמכפלת a ו-b, אשר לפי הנתון הראשון גדולה מ- c^2, צריכה להיות חיובית.

<u>תשובה (1)</u>: $0 < a$; $0 < b$.

אם a ו-b הם שני מספרים חיוביים, יתכן כי $b < c < a$. למשל כאשר $a = 5$; $c = 2$ ו- $b = 1$ $(1 < 2 < 5)$. מכיוון שמצאנו כי תנאי זה יכול להתקיים, נבדוק האם גם התנאי הנוסף יכול להתקיים.
לפי נתוני התשובה a ו-b הם מספרים חיוביים, ומכאן שמכפלתם תהיה בהכרח גדולה מ-0, ולכן גם התנאי $c^2 < a \cdot b$ יכול להתקיים ($2^2 < 5 \cdot 1$ ⇦ $4 < 5$).
מכיוון שמצאנו כי מצב זה יכול להתקיים, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < c$; $b < 0$.

אם b שלילי, ו-c הוא מספר חיובי, יתכן כי $b < c < a$. למשל אם $a = 2$; $c = 1$ ו- $b = -1$ $(-1 < 1 < 2)$. מכיוון שמצאנו כי תנאי זה יכול להתקיים, נבדוק כי התנאי הנוסף יכול אף הוא להתקיים.
על מנת שהתנאי הראשון יתקיים, a צריך להיות מספר חיובי. לפי הנתון b הוא מספר שלילי, ולכן מכפלתם של a ו-b היא בהכרח מספר שלילי, הקטן מ-0.
מכאן שהתנאי $c^2 < a \cdot b$ לא יכול להתקיים. מכיוון שמצאנו מצב שאינו יכול להתקיים, הרי שזו התשובה הנכונה.
מצאנו את התשובה הנכונה, ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות, אולם נעשה זאת לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (3)</u>: $a < 0$; $b < 0$.

אם a ו-b הם מספרים שליליים, יתכן כי $b < c < a$. למשל: $a = -1$; $c = -2$; $b = -6$ $(-6 < -2 < -1)$.
אם a ו-b הם מספרים שליליים, הרי שמכפלתם תהיה בהכרח גדולה מ-0, ולכן ניתן לקבוע כי גם התנאי $c^2 < a \cdot b$ יכול להתקיים ($(-2)^2 < (-1) \cdot (-6)$ ⇦ $4 < 6$).

<u>תשובה (4)</u>: $a < 0$;. $c < 0$.

אם a ו-c הם מספרים שליליים, , יתכן כי $b < c < a$. למשל אם $a = -1$; $c = -2$ ו- $b = -6$ $(-6 < -2 < -1)$. מצאנו כי תנאי זה יכול להתקיים, ולכן נבדוק את התנאי הנוסף.
על מנת שהתנאי הראשון יתקיים, b צריך להיות מספר שלילי.
לפי הנתון a הוא מספר שלילי, ומכאן שמכפלתם של a ו-b ששניהם שליליים, היא בהכרח מספר חיובי, הגדול מ-0. מכאן שהתנאי $c^2 < a \cdot b$ יכול אף הוא להתקיים ($(-2)^2 < (-1) \cdot (-6)$ ⇦ $4 < 6$).

תשובה (2).

3. **השאלה:** $x<-1$
איזה מהביטויים הבאים הוא חיובי?

פתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית

נעבור על התשובות המוצעות, נציב דוגמה מספרית המתאימה לנתוני השאלה, למשל $x=-2$, ונבדוק מי מהן היא חיובית:

תשובה (1): $-\frac{2}{x+1}$.

נתבונן במכנה השבר: $x+1$. x הוא מספר שלילי הקטן מ-(1-), ולכן כאשר נוסיף ל-x את המספר 1, נקבל בהכרח תוצאה הקטנה מ-0, כלומר שלילית.
מצאנו שהן המונה והן המכנה הם שליליים, ומכאן שהביטוי בהכרח חיובי.

תשובה (2): $2(x+1)$.

מכיוון ש-x הוא מספר שלילי, הרי שהביטוי $x+1$ הוא בהכרח שלילי.
תוצאת המכפלה של ביטוי שלילי ב-2 היא בהכרח שלילית.

תשובה (3): $x\cdot(-x-1)$.

מכיוון ש-x קטן מ-(1-), הרי ש- $(-x)$ הוא ביטוי חיובי הגדול מ-1.
הביטוי $(-x-1)$ שהוא הפחתה של 1 מביטוי חיובי הגדול מ-1, הוא בהכרח חיובי.
לפי הנתון x הוא שלילי. מכפלת ביטוי שלילי (x) בביטוי חיובי $(-x-1)$ היא בהכרח שלילית.

תשובה (4): $3(x-1)$.

נתבונן בביטוי $(x-1)$. מכיוון ש-x קטן מ-(1-), הרי שכאשר נפחית ממנו 1נקבל תוצאה שלילית. תוצאת המכפלה של ביטוי שלילי בביטוי החיובי (המספר 3), היא בהכרח שלילית.

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: a ו-b שלמים, חיוביים וגדולים מ-1.
איזה מהביטויים הבאים בהכרח חיובי?

פתרון: נבדוק את התשובות:

תשובה (1): a^2-b^2.
על מנת לקבוע כי הביטוי חיובי עלינו לדעת כי הביטוי a^2 גדול מ- b^2.
לא ניתן לדעת לפי נתוני השאלה האם a^2 גדול מ- b^2, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $a\cdot(b^2-5)$.

לפי הנתונים a הוא ביטוי חיובי.
לא ניתן לדעת האם (b^2-5) הוא ביטוי חיובי או שלילי. כך לדוגמה, אם b שווה ל-2 הביטוי שלילי ואם b שווה ל-3 הביטוי חיובי.

תשובה (3): a^2+b^2+3.
a ו-b שלמים, חיוביים וגדולים מ-1, ומכאן שהערך המינימלי שיכולים לקבל a ו-b הוא 2.
מכאן שבוודאות כל אחד מהביטויים a^2 ו- b^2 שווה או גדול מ-4 ובהכרח הביטוי חיובי.

תשובה (4): $(b-a)^2-b$

$(b-a)^2$: כאשר מעלים את הביטוי $(b-a)$ בחזקת 2, נקבל בהכרח ביטוי השווה או הגדול מ-0. מביטוי זה מפחיתים את הביטוי החיובי b. מכיוון שלא ניתן לדעת מה היחס בין b לביטוי $(b-a)^2$, הרי שלא ניתן לדעת האם הביטוי חיובי או שלילי.

תשובה (3).

5. **השאלה** : $a^2 < b^3$

מה **אינו** יתכן?

פתרון : בטרם ניגש לבדיקת התשובות על מנת לבחון איזה מהתשובות המוצעות מתארת מצב ש<u>אינו</u> יתכן כפי שביקשה השאלה, נבדוק את הנתונים ונזכור כי ביטוי הגדול מגורם כלשהו בחזקת 2 הוא בהכרח חיובי. כלומר b^3 בהכרח חיובי. על מנת ש- b^3 יהיה חיובי, b עצמו **חייב** להיות חיובי (b שלילי יתן תוצאה שלילית כאשר נעלה אותו בחזקת 3).

מכיוון שביקשו מצב **שאינו** יתכן עלינו לחפש תשובה אשר לפיה b שלילי.

תשובה (2).

---

6. **השאלה** : $a < b < 0$

איזה מהביטויים הבאים הוא הגדול ביותר?

פתרון : על פי נתוני השאלה a ו-b הם מספרים שליליים. מכיוון שנשאלנו מי הביטוי הגדול ביותר, ראשית נבדוק מה סימנם של הביטויים המוצעים :

<u>תשובה (1)</u> : $\frac{1}{a}$. המונה הוא מספר חיובי (1), והמכנה מספר שלילי (a), ולכן הביטוי שלילי.

<u>תשובה (2)</u> : a^2b . a^2 הוא ביטוי חיובי ו-b ביטוי שלילי.
תוצאת מכפלה של מספר חיובי במספר שלילי היא שלילית.

<u>תשובה (3)</u> : $\frac{1}{b}$. המונה הוא מספר חיובי (1) והמכנה מספר שלילי (b), ומכאן שהביטוי שלילי.

<u>תשובה (4)</u> : $\frac{a}{b}$. המונה שלילי (a) והמכנה שלילי (b). הביטוי בהכרח חיובי.

מצאנו כי 3 מהתשובות הן ביטויים שליליים ורק תשובה אחת - תשובה (4), היא ביטוי חיובי, ומכאן שהביטוי בתשובה (4) הוא הגדול ביותר.

תשובה (4).

---

7. **השאלה** : לכל x שלם וחיובי הביטוי $x^2(1-x)(x+1)$ הוא בהכרח -

פתרון : <u>**דרך א'**</u> : הצבת דוגמה מספרית

נציב כי $x = 1$, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 0 $\left[x(1-x)(x+1) = 1^2 \cdot (1-1)(1+1) = 1 \cdot 0 \cdot 2 =\right]$.

תשובות (1) ו-(2) נפסלות. כעת נציב כי $x = 2$, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 12- $\left[x(1-x)(x+1) = 2^2 \cdot (1-2)(1+2) = 4 \cdot (-1) \cdot 3 =\right]$. תשובה (3) נפסלת, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (4).

<u>**דרך ב'**</u> : פישוט אלגברי

את הביטוי $(1-x)(x+1)$ ניתן גם לכתוב כ- $(1-x)(1+x)$, אשר לפי נוסחת הכפל המקוצר השלישית, ניתן להציגו גם כ- $\left(1-x^2\right)$.

נפרק את הביטוי $x^2\left(1-x^2\right)$ לשני חלקים : x^2 ו- $\left(1-x^2\right)$.

לכל x שלם וחיובי הביטוי x^2 הוא ביטוי חיובי.

כאשר x שווה ל-1, הביטוי $\left(1-x^2\right)$ שווה ל-0. כאשר x גדול מ-1 הביטוי יהיה שלילי, וכאשר x שווה ל-0 הביטוי הוא חיובי. מכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה מספר (4).

תשובה (4).

.8 **השאלה** : נתון כי x ו-y הם מספרים שלמים ושליליים וכי x שונה מ-y.

פתרון : נשאלנו מי מהביטויים שבתשובות אינו בהכרח חיובי, כלומר אנו מחפשים ביטוי היכול להיות שווה ל-0 או להיות שלילי במצבים מסוימים.

<u>תשובה (1)</u> : x^2y^4 . כאשר 'מעלים' מספרים שליליים בחזקה זוגית התוצאה בהכרח חיובית. ולכן גם x^2 וגם y^4 הם בהכרח ביטויים חיוביים. תוצאת מכפלה של שני גורמים חיוביים היא בהכרח חיובית.

<u>תשובה (2)</u> : x^3y . כאשר 'מעלים' מספרים שליליים בחזקה אי-זוגית (חזקת 3 וחזקת 1 במקרה של תשובה זו) התוצאה בהכרח שלילית. ולכן הן x^3 והן y הם ביטויים שליליים.
תוצאת מכפלת שני גורמים שליליים היא בהכרח חיובית.

<u>תשובה (3)</u> : $y^2 - x$. y^2 הוא מספר שלילי אשר 'העלו' בחזקה זוגית, כלומר בהכרח חיובי.
כאשר מפחיתים ממספר חיובי מספר שלילי, התוצאה תהיה בהכרח חיובית.
הערה : דרך אחרת להסתכל על תשובה זו היא על פי הכלל שמספר 'גדול' פחות מספר 'קטן' הוא תמיד חיובי. y^2 הוא גורם חיובי אשר בהכרח גדול מן הגורם השלילי x, ולכן תוצאת תרגיל החיסור היא בהכרח תוצאה חיובית.

<u>תשובה (4)</u> : $x^2 - y^2$. הן x^2 והן y^2 הם ביטויים חיוביים (מספרים שליליים אשר העלו בחזקה זוגית). מכיוון שאיננו יודעים ערכו של מי מהם גדול יותר, אין אנו יכולים לקבוע בוודאות האם תוצאת תרגיל החיסור היא חיובית או שלילית.

תשובה (4).

.9 **השאלה** : $a^2 < \frac{x}{y}$ $\quad (y \neq 0)$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון : מכיוון שהביטוי כאשר נתון ביטוי הגדול מ- a^2 , הביטוי בהכרח חיובי. כלומר $\frac{x}{y}$ הוא בהכרח ביטוי חיובי.

על מנת שהביטוי $\frac{x}{y}$ יהיה חיובי על x ו-y להיות שווי-סימן. כלומר, שניהם חיוביים או שניהם שליליים.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: $x+y=0$; $(x,y\neq 0)$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

פתרון: כאשר סכומם של שני מספרים השונים מ-0 שווה ל-0, ניתן להסיק כי מספרים אלו הם מספרים נגדיים, כלומר שני מספרים שמרחקם מ-0 זהה, אחד חיובי והאחר שלילי.
הערה: ניתן גם לעשות פישוט אלגברי למשוואה הנתונה ולהפחית y משני האגפים על מנת לקבל, $x=-y$, משוואה שעל פיה ניתן להסיק כי x ו- y הם שני מספרים שמרחקם מ-0 שווה וסימניהם הפוכים (חיובי ושלילי, כאשר לא ידוע מי מהם חיובי ומי שלילי).

<u>תשובה (1)</u>: $x^2=-y^2$. x ו-y הם מספרים נגדיים השונים מ-0 ולכן x^2 ו- y^2 הם בהכרח שני ביטויים חיוביים השווים בערכם.
מכיוון שלא יתכן כי x^2 שהוא ביטוי חיובי יהיה שווה לביטוי השלילי $\left(-y^2\right)$, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{x}{y}>0$. מכיוון ש- x ו-y מספרים נגדיים, אחד מהם חיובי והאחר שלילי (לא ידוע מי החיובי ומי השלילי) . תוצאת החילוק של x ב-y היא בהכרח שלילית.

<u>תשובה (3)</u>: $(x-y)^2=0$. על מנת ש- $(x-y)^2$ יהיה שווה ל-0, על x ו-y להיות שווים זה לזה. על פי נתוני השאלה x ו-y הם שני מספרים נגדיים ולפיכך תשובה זו אינה נכונה.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{x}{y}=-1$. תוצאת החלוקה של שני מספרים נגדיים שווה תמיד ל- (-1) . טענה זו נכונה בוודאות.

תשובה (4).

---

11. **השאלה**: $x<y<z$

איזה מהביטויים הבאים חיובי **בהכרח**?

פתרון: נבדוק את התשובות השונות המוצעות.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{x+z}{y-x}$.

נתבונן בביטוי שבמונה: $(x+z)$. מכיוון שאיננו יודעים דבר לגבי סימנם של x ו-z איננו יכולים לקבוע דבר לגבי הסימן של תוצאת החיבור של שני מספרים אלו. יתכן כי התוצאה שלילית ויתכן כי היא חיובית. לאור מסקנה זו, אין צורך כי נבחן את מכנה השבר, שכן ניתן לקבוע כבר כעת, כי לא ניתן לקבוע בוודאות דבר לגבי סימנו של הביטוי.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{x-y}{x-z}$.

נתבונן בביטוי שבמונה: $(x-y)$. אמנם איננו יודעים דבר לגבי סימנם של x ו-y, אולם על מנת לקבוע את סימנה של פעולת חיסור מספיק לדעת את היחס בין המשתנים.
על פי הנתון $x<y$. כאשר מחסרים ממספר כלשהו מספר הגדול ממנו התוצאה בהכרח שלילית (קטן פחות גדול תמיד שלילי). ניתן לקבוע כי המונה שלילי.
נתבונן בביטוי שבמכנה: $(x-z)$. נתון כי x קטן מ-z, ולפיכך המכנה אף הוא שלילי.

מכיוון שהן הביטוי במונה והן הביטוי במכנה שליליים, הביטוי בתשובה הוא בהכרח חיובי, ולכן זו התשובה הנכונה.
אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות, אולם נעשה זאת לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{x+y}{z-x}$.
מכיוון שאיננו יודעים דבר לגבי סימנם של x ו-y איננו יכולים לקבוע דבר לגבי תוצאת החיבור של שני מספרים אלו. אם איננו יודעים מהו סימנו של המונה, לא נוכל לדעת בוודאות את סימנו של הביטוי.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{z-y}{y}$. ניתן לפסול במהירות תשובה זו מאותה סיבה שפסלנו את תשובות (1) ו-(3). איננו יודעים דבר לגבי סימנו של y ולפיכך איננו יכולים לקבוע דבר לגבי סימנו של המכנה.

תשובה (2).

---

12. **השאלה**: a ו-b הם מספרים נגדיים.
c ו-d הם מספרים הופכיים.

$$\frac{a}{c}+b\cdot d=?$$

פתרון: מספרים נגדיים הם מספרים שמרחקם מ-0 שווה וסימניהם הפוכים: אחד חיובי והאחר שלילי.
לפי הנתון a ו-b הם מספרים נגדיים, ולכן: $a=-b$.
מהנתון כי c ו-d הם מספרים הופכיים, נסיק כי $c=\frac{1}{d}$.
כעת נציב נתונים אלו בביטוי, כלומר נחליף את a ב- (-b), ואת c ב- $\frac{1}{d}$, ונקבל: $\frac{a}{c}+b\cdot d \Leftarrow$

$$\frac{-b}{\frac{1}{d}}+b\cdot d.$$

נפשט ונקבל: $\frac{-b}{\frac{1}{d}}+b\cdot d \Leftarrow -b\cdot\frac{d}{1}+b\cdot d \Leftarrow -b\cdot d+b\cdot d$.
קיבלנו שני ביטויים זהים, שהם בסימנים נגדיים: $b\cdot d$ ו- $-b\cdot d+$,
ולכן בהכרח ערכו של הביטוי שווה ל-0.

תשובה (1).

---

13. **השאלה**: $a+b<0$; $a=c^2$.
מן הנתון כי $a+b<0$, ניתן להסיק שלפחות אחד מן המשתנים a ו-b הוא שלילי.
כלומר, יתכן שרק אחד מהם הוא שלילי, ויתכן כי שניהם שליליים.
על פי הנתון הנוסף $a=c^2$. מנתון זה ניתן להסיק כי a בהכרח <u>אינו</u> שלילי, שכן אם c שווה ל-0, גם a שווה ל- 0, ואם c שונה מ-0, הרי ש-a הוא בהכרח חיובי.
מכיוון שמצאנו כי a אינו שלילי, הרי שניתן להסיק ש- b בהכרח שלילי.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: a ו-b מספרים שליליים.
איזה מהביטויים הבאים הוא **בהכרח** שלילי.

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות, ונבדוק ערכו של מי מהביטויים המוצעים הוא שלילי:

תשובה (1): $a^2(a-b)$. a^2 הוא בהכרח ביטוי חיובי. איננו יודעים האם $(a-b)$ הוא ביטוי חיובי או שלילי.

תשובה (2): $b^3(a+b)$. b הוא מספר שלילי, ולפיכך b^3 הוא ביטוי שלילי. a ו-b הם מספרים שליליים ולכן סכום המספרים $(a+b)$ הוא בהכרח ביטוי שלילי.
$b^3(a+b)$ הוא כפל של שני ביטויים שליליים, ולכן הוא בהכרח ביטוי חיובי.

תשובה (3): $a(b-a)$. a הוא מספר שלילי. לגבי הביטוי $(b-a)$, איננו יודעים את סימנו מכיוון שאיננו יודעים מה היחס בין a ו-b, ובמילים אחרות מי גדול ממי.
מכיוון שאיננו יודעים דבר לגבי סימנו של הביטוי $(b-a)$, לא ניתן לקבוע את סימנו של הביטוי כולו.

תשובה (4): $b^2(a+b)$. b^2 הוא בהכרח ביטוי חיובי. a ו-b הם מספרים שליליים, ולכן סכום המספרים $(a+b)$ הוא בהכרח ביטוי שלילי.
כפל של ביטוי חיובי בביטוי שלילי הוא בהכרח שלילי.

תשובה (4).

---

15. **השאלה**: $x-y<z$.

פתרון: נתבקשנו להשלים את המשפט, ועל כן נפנה לתשובות:

תשובה (1): אם $z<0$, $x<y$. אם z שלילי, ניתן להסיק כי x קטן מ-y שכן חיסור של שני מספרים 'נותן' תוצאה שלילית, רק כאשר מדובר בחיסור של מספר קטן ממספר גדול. ניתן להפסיק לבדוק שכן תשובה זו נכונה.

תשובה (1).

---

16. **השאלה**: נתון: $0<a\cdot b$

איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה בהכרח?

פתרון: בנתון מופיעה מכפלה הגדולה מ-0. בכדי שמכפלה של שני מספרים תהיה גדולה מ-0, שני המספרים הללו צריכים להיות שווי-סימן (שני חיוביים או שני שליליים). כעת נתבונן בתשובות:

תשובה (1): $0<(-a)\cdot(-b)$
a ו-b הם שווי סימן. כאשר נוסיף לכל אחד מהם סימן מינוס, כל אחד מהם יהפוך את סימנו, אך הם עדיין ישארו שווי סימן. לפיכך מכפלתם עודנה חיובית. תשובה זו נכונה בהכרח ולכן נפסלת.

תשובה (2): $0<\frac{a}{b}$
a ו-b הם שווי סימן. כאשר מחלקים שני מספרים שווי סימן, התוצאה בהכרח חיובית. גם תשובה זו נכונה בהכרח ולכן נפסלת.

תשובה (3): $0<a+b$
a ו-b הם שווי סימן. כאשר מחברים שני מספרים חיוביים התוצאה חיובית, וכאשר מחברים שני מספרים שליליים התוצאה שלילית. לפיכך סכומם של a ו-b אינו בהכרח חיובי, ולכן זו התשובה שחיפשנו.

תשובה (3).

.17 **השאלה**: נתונים: $0<x<1$; $y<-1$; $a=x^2-y^2$

איזו מהטענות הבאות נכונה בוודאות לגבי a?

פתרון: עלינו להסיק מהנתונים מידע לגבי a. על פי הנתון השלישי: $a=x^2-y^2$.

על פי הנתון הראשון, x הוא שבר חיובי. כאשר מעלים שבר חיובי בריבוע, נקבל שבר חיובי.
על פי הנתון השני, y הוא מספר שלילי הקטן מ-(1-). כאשר נעלה את y בריבוע, הוא יהפוך לחיובי, ונקבל בהכרח מספר הגדול מ-1.
$a=x^2-y^2$. x^2 הוא שבר חיובי. y^2 הוא מספר חיובי הגדול מ-1. כאשר נפחית משבר חיובי מספר חיובי הגדול מ-1, נקבל תוצאה שלילית. מכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (1).

תשובה (1).

.18 **השאלה**: לגבי הפעולה $ ידוע כי בעבור כל שלושה מספרים x, y ו-z מתקיים:

אם שלושתם חיוביים, אזי גם abc חיובי. ואם שלושתם שליליים, אזי גם abc שלילי.

איזו מהפעולות הבאות **לא** יכולה להחליף את הפעולה $?

פתרון: נתבונן בתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: חיבור. בחיבור של שלושה מספרים חיוביים מתקבלת תוצאה חיובית, ומחיבור של שלושה מספרים שליליים מתקבלת תוצאה שלילית. כלומר, הפעולה חיבור מתאימה להחליף את הפעולה $.

<u>תשובה (2)</u>: חיסור. כאשר מחסרים מספר חיובי ממספר חיובי, לא ניתן לדעת בוודאות את סימנה של התוצאה, שכן הסימן תלוי בגודלם של המספרים. לכן, הפעולה חיסור **אינה** מתאימה להחליף את הפעולה $.

תשובה (2).

.19 **השאלה**: x מספר שלם השונה מ-0. הביטוי $\dfrac{x}{\frac{1}{x}+x}$ הוא -

פתרון: התשובות מלמדות אותנו שעלינו לקבוע את סימנו של הביטוי. מכיוון שלא ידוע סימנו של x, נבדוק את שני המצבים האפשריים:

<u>אם x חיובי</u>: אם x חיובי, גם הביטוי $\frac{1}{x}$ חיובי. לפיכך הן המונה והן המכנה של הביטוי המבוקש מורכבים מביטויים חיוביים, ומכאן שהביטוי כולו חיובי.

<u>אם x שלילי</u>: אם x שלילי, הרי שגם הביטוי $\frac{1}{x}$ שלילי. לפיכך, מונה הביטוי הוא ביטוי שלילי.

מכיוון שמכנה הביטוי מורכב מחיבור של שני ביטויים שליליים, הרי שגם המכנה הוא שלילי.

כאשר מחלקים ביטוי שלילי בביטוי שלילי, מקבלים תוצאה חיובית, ולכן הביטוי כולו חיובי.

לסיכום, מכיוון שמצאנו כי בשני המצבים הביטוי חיובי, הרי שניתן לקבוע כי הביטוי המבוקש תמיד חיובי.

תשובה (1).

.20 **השאלה**: נתון: $0<a^2\cdot b^3$; $a+b<0$

איזה מאי-השיוויונים הבאים נכון בהכרח?

פתרון: הנתון הראשון הוא מכפלה הגדולה מ-0. בכדי שתוצאת מכפלה של שני גורמים תהיה חיובית, שני גורמי המכפלה צריכים להיות שווי-סימן (שניהם חיוביים או שניהם שליליים).

הגורם הראשון במכפלה הוא a^2. ניתן לקבוע כי a^2 הוא בהכרח ביטוי חיובי, שכן כאשר מעלים מספר השונה מ-0 בריבוע התוצאה בהכרח חיובית.

מכיוון שתוצאת המכפלה חיובית, הרי שבהכרח גם הגורם השני במכפלה b^3, צריך להיות חיובי.

אם b^3 הוא ביטוי חיובי, הרי בהכרח גם b הוא חיובי, שכן העלאה בחזקה אי-זוגית אינה משנה סימן.

על פי הנתון השני, סכומם של a ו-b הוא שלילי. מכיוון שמצאנו כי b חיובי, הרי שבכדי שסכומם של שני הגורמים יהיה שלילי, ניתן לקבוע כי a בהכרח שלילי.

כעת נתבונן בתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: $0<a\cdot b$

מצאנו כי b חיובי ו-a שלילי.

מכפלה של מספר חיובי ומספר שלילי היא שלילית ולא חיובית, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $0<a-b$

מצאנו כי b חיובי ו-a שלילי.

מספר שלילי פחות מספר חיובי נותן מספר שלילי ולא חיובי. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $-b<-a$

מצאנו כי b חיובי ו-a שלילי , אם a שלילי, הרי ש- $(-a)$ הוא חיובי.

b הוא חיובי, ולכן $(-b)$ הוא שלילי. מספר חיובי גדול ממספר שלילי. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

.21 **השאלה**: נתון: $a^3<y^2$.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: התשובות מלמדות אותנו שעלינו להסיק מידע על סימני הנעלמים. על פי הנתון: $a^3<y^2$.

באגף הימני מופיע y^2. כל מספר שונה מ-0 בריבוע הוא חיובי, ולכן y^2 הוא חיובי או שווה ל-0 (y^2 שווה ל-0 אם y שווה ל-0), אך לא ניתן לדעת מה סימנו של y. נבדוק את סימנו של a.

על פי הנתון: $a^3<y^2$. מספר הקטן מאיבר חיובי יכול להיות חיובי, שלילי או 0.

כלומר לא ניתן לדעת את סימנו של a^3, ולכן לא ניתן לדעת גם את סימנו של a.

לדוגמה: יתכן כי y שווה ל-3 ואז y^2 שווה ל-9. במקרה כזה יתכן ש-a שווה ל-0, 1 או (-1), שכן כל המקרים הללו מקיימים את אי השוויון הנתון.

תשובה (4).

.22 **השאלה**: נתון: $x<0<y$

איזה מאי-השיוויונים הבאים נכון בוודאות?

פתרון: נתבונן בתשובות:

<u>תשובה (1)</u>: $y^2<(x+y)^2$. לשם הנוחות נפתח את הסוגריים על פי נוסחת הכפל המקוצר הראשונה, ונקבל: $y^2<x^2+2xy+y^2$. בשני האגפים מופיע האיבר y^2. באגף הימני נוספים לו x^2 ו- $2xy$. x^2 הוא מספר חיובי (שלילי בריבוע הופך לחיובי), ו-$2xy$ הוא מספר שלילי (מכפלה של שלילי וחיובי היא שלילית). מכיוון שלא ידוע מי מהאיברים שהוספנו גדול יותר בערכו המוחלט, לא ניתן לדעת אם התוספת שלהם מקטינה או מגדילה את y^2, ולפיכך התשובה אינה נכונה בהכרח.

<u>תשובה (2)</u>: $x^2<(x-y)^2$. לשם הנוחות נפתח את הסוגריים על פי נוסחת הכפל המקוצר השנייה, ונקבל: $x^2<x^2+y^2-2xy$. בשני האגפים מופיע האיבר x^2. באגף הימני נוספים לו y^2 ו- $2xy$. y^2 הוא מספר חיובי, $2xy$ הוא מספר שלילי (מכפלה של שלילי וחיובי היא שלילית) ולכן $-2xy$ הוא חיובי. תוספת של איברים חיוביים מגדילה את x^2, ולפיכך התשובה נכונה בהכרח.

תשובה (2).

.23 **השאלה**: נתונים שישה מספרים שלמים שמכפלתם שלילית.

כמה מהמספרים שליליים, לכל היותר?

פתרון: בשאלה מתוארת קבוצה של מספרים. חלקם חיוביים וחלקם שליליים. כאשר כופלים מספרים חיוביים זה בזה מקבלים תמיד תוצאה שהיא חיובית. מכפלה של כל שני מספרים שליליים היא חיובית.
נתון כי תוצאת המכפלה היא שלילית, ולכן מספר השליליים בקבוצה הוא בהכרח אי-זוגי.
מספר השליליים הגדול ביותר האפשרי, אם כך, הוא המספר האי-זוגי הגדול ביותר מתוך 6 מספרים.
כלומר, לכל היותר 5 מהמספרים הם שליליים.

תשובה (1).

.24 **השאלה**: נתון: $x^5\cdot y^4\cdot z^2<0$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: בתשובות עלינו לקבוע איזו מהמכפלות המתוארות שלילית (קטנה מ-0).
ראשית, נבדוק מה המידע שאנו יכולים להסיק מתוך הנתון לגבי סימני הנעלמים.
בנתון מתוארת מכפלה הקטנה מ-0. האיברים y^4 ו- z^2 הם בהכרח חיוביים, מכיוון שכאשר מעלים בחזקה זוגית מספר השונה מ-0 התוצאה בהכרח חיובית. מכאן שעל מנת שהמכפלה כולה תהיה שלילית, x^5 הוא בהכרח שלילי, ולפיכך גם x עצמו הוא מספר שלילי (חזקה אי-זוגית אינה משנה/משמרת את הסימן).
<u>לסיכום</u>: מנתוני השאלה, ניתן לקבוע כי x שלילי, אולם לא ניתן להסיק דבר לגבי סימנם של z ו-y.
מכיוון שבכל אחת מהמכפלות שבתשובות מופיע הנעלם y או הנעלם z. מכיוון שאיננו יודעים את סימנם, לא נוכל לקבוע מוודאות את סימני המכפלות שבתשובות.

תשובה (4).

.25 **השאלה**: נתון: $m < -n$

לפיכך, **לא** ייתכן ש -

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

נתון כי $m < -n$, נוסיף n לשני האגפים, ונקבל: $m + n < 0$.
אם סכומם של שני מחוברים קטן מ-0, יתכן ששני המחוברים הם שליליים, ויתכן כי אחד מהם שלילי ואחד מהם חיובי (כאשר ערכו המוחלט של המספר השלילי גדול יותר, כלומר המספר השלילי רחוק יותר מ-0). לא יתכן שסכומם של שני מחוברים חיוביים יהיה מספר שלילי. תשובה (2).

<u>דרך ב'</u>: בכדי לבדוק איזה מהמצבים שבתשובות **לא** ייתכן, נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: m ו-n שליליים.
אם n הוא שלילי, הרי ש- $(-n)$ הוא מספר חיובי.

על פי הנתון m קטן מ- $(-n)$, כלומר m הוא מספר שלילי הקטן ממספר חיובי. תשובה (1) אפשרית.

<u>תשובה (2)</u>: m ו-n חיוביים. אם n הוא חיובי, הרי ש- $(-n)$ הוא מספר שלילי.

על פי הנתון m קטן מ- $(-n)$, כלומר m הוא מספר חיובי הקטן ממספר שלילי. תשובה (2) אינה

אפשרית, ולכן היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.26 **השאלה:** נתון: $a < 0 < b$

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

פתרון: נבדוק את סימנו של הביטוי בכל אחת מהתשובות המוצעות.

<u>תשובה (1)</u>: $-2a$. a הוא מספר שלילי. תוצאת מכפלה של שני ביטויים שליליים: (a) ב-(2-) הוא בהכרח ביטוי חיובי.

<u>תשובה (2)</u>: b^2a. a שלילי ו-b חיובי. תוצאת מכפלת ביטוי שלילי (a) בביטוי חיובי $\left(b^2\right)$ היא בהכרח ביטוי שלילי.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{3}{a}$. הביטוי $\frac{3}{a}$ מורכב ממונה שהוא מספר חיובי, ומכנה שהוא מספר שלילי, ולכן תוצאת החלוקה היא בהכרח מספר שלילי.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{a}{b}$. הביטוי $\frac{a}{b}$ מורכב ממונה שהוא מספר שלילי, ומכנה שהוא מספר חיובי, ומכאן שתוצאת החלוקה היא מספר שלילי.

ערכן של תשובות (2), (3) ו- (4) הוא שלילי וערכה של תשובה (1) חיובי. לפיכך תשובה (1) היא הגדולה ביותר.

תשובה (1).