מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(4)	(4)	(2)	(3)	(2)	(1)	(2)	(1)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(2)	(4)	(3)	(3)	(3)	(2)	(3)	(1)	(2)

שאלה	21	22	23	24	25	26	27	28	29
תשובה	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(3)	(4)	(2)	(4)

הסברים

.1 **השאלה**: $5\sqrt{2}=?$

פתרון: **__דרך א'__**: פישוט הביטוי
על מנת לפשט את הביטוי עלינו 'להכניס' את 5 לשורש. על מנת לעשות זאת יש 'להמיר' את 5 לשורש, לשם כך עלינו לבדוק מיהו המספר שהשורש שלו שווה ל-5. המספר אשר השורש שלו שווה ל-5 הוא 25. ולכן 'נמיר' את 5 ל- $\sqrt{25}$, ונקבל: $5\sqrt{2}$ ⇦ $\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}$. כעת לפנינו כפל בין שני שורשים מאותה מעלה (שורש שני) כך שאנו יכולים להכניס את שני הבסיסים תחת אותו שורש: $\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}$ ⇦ $\sqrt{25\cdot2}$ ⇦ $\sqrt{50}$

__דרך ב'__: פישוט התשובות
ברור שהתשובה הנכונה אינה תשובה (1) או תשובה (4), שכן לא יתכן שהתשובה למכפלה של המספר השלם 5 בשורש של 2 שאינו מספר שלם תהיה מספר שלם, הרי שעלינו לפשט את תשובות (2) ו-(3) ולבדוק מי מהן שווה לביטוי המוצע:

__תשובה (2)__: $\sqrt{50}$. נפשט את התשובה על ידי פירוק של המספר 50 למכפלה בין גורמים, כך שאחד הגורמים יהיה מספר שניתן להוציא ממנו שורש שלם: $\sqrt{50}$ ⇦ $\sqrt{25\cdot2}$ ⇦ $5\sqrt{2}$. זו התשובה הנכונה, ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק תשובות נוספות.

תשובה (2).

.2 **השאלה**: $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=?$

פתרון: לאור התשובות נחפש לצמצם את הביטוי. אין חוק בנוגע לחיבור או חיסור שורשים, למעט שבכל מקרה של חיבור וחיסור, אנו מבקשים למצוא מה הגורם המשותף שניתן להוציא. לאחר הוצאת הגורם המשותף נקבל מכפלה, ונוכל לצמצם את אחד מהגורמים שלה עם המכנה:

__דרך א'__: פישוט אלגברי – פירוק מספר למכפלה

$$\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{9\cdot3}+\sqrt{4\cdot3}}{\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{3}}$$

נצמצם $\sqrt{3}$ מהמונה והמכנה, ונקבל: $\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{3}}$ ⇦ $\left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)$ ⇦ $3+2$ ⇦ 5.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי – הוצאת גורם משותף בחיבור/חיסור

$\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{3}} \Leftarrow \left(\sqrt{9}+\sqrt{4}\right) \Leftarrow 3+2 \Leftarrow 5$.

תשובה (4).

---

3. **השאלה**: $\sqrt{x^3y^2}=?$ $\quad (0<x,y)$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט הביטוי

$\sqrt{x^3y^2} \Leftarrow \sqrt[2]{x^3y^2} \Leftarrow x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{2}{2}} \Leftarrow x^{1\frac{1}{2}}\cdot y^1$

כעת נעבור על התשובות על מנת לבדוק מי מהן שווה לביטוי:

<u>תשובה (1)</u>: xy. הביטוי xy שקול ביטוי x^1y^1. מכיוון שתשובה זו שונה מהביטוי המקורי, ולכן נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $y\sqrt{x}$. שורש הוא חזקת $\frac{1}{2}$, ולכן הביטוי $y\sqrt{x}$ שקול לביטוי ל- $y^1x^{\frac{1}{2}}$. תשובה זו שונה מהביטוי המקורי, ולכן נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $x\sqrt{xy}$. שורש הוא חזקת $\frac{1}{2}$, ולכן הביטוי שקול לביטוי - $x^1x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x^{1\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. תשובה זו שונה מהביטוי המקורי, ולכן נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $xy\sqrt{x}$. שורש הוא חזקת $\frac{1}{2}$, ולכן הביטוי שקול לביטוי - $x^1y^1x^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x^{1\frac{1}{2}}y^1$. זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב לדוגמה כי x ו-y הוא 2, ונקבל: $\sqrt{x^3y^2} \Leftarrow \sqrt{2^3\cdot 2^2} \Leftarrow \sqrt{8\cdot 4} \Leftarrow \sqrt{32}$.

נפרק את 32 למכפלה אשר לאחד מגורמיה יש שורש שלם, כלומר ל-16 כפול 2, ונקבל: $\sqrt{32} \Leftarrow \sqrt{16\cdot 2}$
$\Leftarrow \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} \Leftarrow 4\sqrt{2}$.

נבדוק מה ערכה של כל אחת מהתשובות המוצעות, ונמצא כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(3) שונה, ולכן ניתן לפסול תשובות אלו ולקבוע כי התשובה הנכונה היא תשובה (4).

תשובה (4).

---

4. **השאלה**: $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)}=?$

פתרון: ראשית, נפשט את הביטוי מתחת לשורש על מנת להגיע לאחת מהתשובות המוצעות שמכילות מספרים פשוטים. נפתח את הסוגריים בביטוי שמתחת לשורש, ונקבל: $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)} \Leftarrow$

$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} \Leftarrow \sqrt{1+3} \Leftarrow \sqrt{4} \Leftarrow 2$.

תשובה (2).

---

5. **השאלה**: $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}} = ?$

פתרון: נפשט באמצעות חוק החזקה השלילית את החזקה שבתוך השורש כך שנקבל מספר נוח יותר לעבודה: $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{8^{\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{2^{3\cdot\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{2^1} \Leftarrow \sqrt{2}$.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: $2x\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x}} = ?$ $\quad (0 < x)$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

בביטוי שלפנינו פעולת חיסור בין ביטויים עם שורשים וחזקות. עלינו להגיע לאחת התשובות, כלומר לביטוי או נעלם. מכיוון שאין חוק לחיסור שורשים או חזקות נוציא x כגורם משותף:

$2x\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x}} \Leftarrow x\left(2\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right)$.

מכיוון שהביטוי $\frac{x}{\sqrt{x}}$ שווה ל- $\sqrt{x}$, הרי ש: $x\left(2\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) \Leftarrow x\left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)$.

כעת נוציא כגורם משותף $\sqrt{x}$, ונקבל: $x\left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) \Leftarrow x\sqrt{x}(2-1) \Leftarrow x\sqrt{x}\cdot 1 \Leftarrow x\sqrt{x}$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי x שווה ל-2, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא $2\sqrt{2}$

$\left(2x\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 2\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \right)$.

נציב כי x שווה ל-2 בתשובות המוצעות, ונקבל כי ערכן של תשובות (1), (3) ו-(4) שונה מ- $2\sqrt{2}$ ולכן ניתן לפסול תשובות אלו ולקבוע כי התשובה הנכונה היא תשובה (2).

תשובה (2).

---

7. **השאלה**: לכל כל שני מספרים חיוביים x ו-y הוגדרה פעולה חדשה $ כך: $\$(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y+1}$

$\$\left(\$(64,1), \$(9,2)\right) = ?$

פתרון: ראשית נבין את הפעולה המומצאת שלפנינו. לפי הגדרת הפעולה, כאשר מבצעים את הפעולה $ על שני מספרים, התוצאה תהיה שורש המספר השמאלי לחלק למספר הגדול ב-1 מהמספר הימני.

כעת, נחשב את ערכן של שתי הפעולות המומצאות שבתוך הסוגריים, ולבסוף נבצע את הפעולה האחרונה על שתי התוצאות שנקבל: $\$(64,1) = \frac{\sqrt{64}}{1+1} = \frac{8}{2} = 4$

$\$(9,2) = \frac{\sqrt{9}}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$

כעת, 'נכניס' את הביטויים שקיבלנו לביטוי המקורי, ונקבל: $\$\left(\$(64,1), \$(9,2)\right) \Leftarrow \$(4,1)$.

נבצע את פעולת ה-$ על המספרים שקיבלנו, ונקבל: $\$(4,1) \Leftarrow \frac{\sqrt{4}}{1+1} \Leftarrow \frac{2}{2} \Leftarrow 1$.

תשובה (1).

---

8. **השאלה**: $\sqrt{18}+\sqrt{32}=?$

פתרון: מכיוון שאמור, אין חוק לחיבור וחיסור שורשים, עלינו לנסות ולהוציא גורם משותף, ובעזרתו נפשט את הביטוי: $\sqrt{18}+\sqrt{32}$ ⇦ $\sqrt{2}\left(\sqrt{9}+\sqrt{16}\right)$ ⇦ $\sqrt{2}(3+4)$ ⇦ $\sqrt{2}\cdot 7$ ⇦ $7\sqrt{2}$.

תשובה (2).

---

9. **השאלה**: $\left(\sqrt{3}+2\right)^2=?$

פתרון: על מנת לפשט את הביטוי שקיבלנו לאחת התשובות נשתמש בנוסחת הכפל המקוצר הראשונה:
$\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ ⇦ $\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 2+2^2$ ⇦ $3+4\sqrt{3}+4$ ⇦ $7+4\sqrt{3}$

תשובה (1).

---

10. **השאלה**: נתון: $0<x<1$. ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

פתרון: השאלה מפנה אותנו אל התשובות. הנעלם בשאלה הוא שבר אמיתי ולכן ראשית נבין כיצד משפיעה פעולת שורש על שבר אמיתי. כיוון, שפעולת חזקה מקטינה שבר, פעולת שורש תעשה בדיוק ההיפך – תגדיל אותו. כפי שבחזקות השוונו בסיסים בנפרד ומעריכים בנפרד, נוח גם בשורשים לנסות ולהשוות ראשית שורשים בעלי מעריך זהה או בסיס זהה:

תשובות (1) ו-(2): שתיהן עם שורש שלישי, בתשובה (1) הבסיס הוא שבר ולכן התשובה תהיה שבר אמיתי גדול יותר ואילו בתשובה (2) הבסיס הוא הופכי של שבר, כלומר מספר גדול מ-1, לכן התשובה תהיה מספר גדול מ-(1).
(**שימו לב** – פעולת חזקה או שורש לא משנות תכונה של מספר. כלומר, אם המספר היה גדול מ-1 התוצאה תישאר גדולה מ-1 ואם המספר היה שבר אמיתי התוצאה תהיה שבר אמיתי. <u>הפעולה היחידה</u> שמשנה תכונה ממספר גדול מ-1 לשבר אמיתי או להיפך היא מעריך שלילי!). כלומר תשובה (2) גדולה יותר ולכן נפסלת.

תשובות (1) ו-(3): שתיהן עם שורש שלישי, הבסיס של תשובה (3) הוא שבר שעלה בחזקת שתיים כלומר בסיס קטן יותר ולכן גם אחרי פעולת השורש הוא ייתן תוצאה קטנה יותר מתשובה (1).
תשובה (1) נפסלת.

תשובות (3) ו-(4): נשווה ראשית את הבסיסים. בתשובה (4) הבסיס קטן יותר (שבר אמיתי שעלה בחזקה גדולה יותר), כמו כן השורש שאמור להגדיל את השבר "חלש" יותר. לכן, תשובה (4) קטנה יותר.
תשובה (3) נפסלת.

תשובה (4).

---

11. **השאלה**: $5\cdot\sqrt{0.16}=?$

פתרון: על מנת לפשט את הביטוי, וכדי לחשב את ערכו של הביטוי שמתחת לשורש, 'נמיר' את השבר העשרוני לשבר פשוט: $5\cdot\sqrt{0.16}$ ⇦ $5\cdot\sqrt{\frac{16}{100}}$ ⇦ $5\cdot\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$ ⇦ ${}^{1}\cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{10}_2}$ ⇦ $\frac{4}{2}$ ⇦ 2.

תשובה (2).

.12 **השאלה**: $\sqrt{(27)^{-\frac{1}{3}}} = ?$

פתרון: נפשט את הביטוי על מנת להגיע לאחת מהתשובות המוצעות.

ראשית, נפשט את הביטוי שנמצא מתחת לשורש: $\sqrt{(27)^{-\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

על מנת להמשיך ולהתקדם, מכיוון שהמעריך של החזקה הוא שבר 'נמיר' את החזקה לכתיבה כשורש

באמצעות חוק השורשים: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$: $\sqrt{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} \Leftarrow \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} \Leftarrow \sqrt{\frac{1}{3}}$.

תשובה (2).

.13 **השאלה**: $\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^4} = ?$

פתרון: על מנת לחשב את ערכו המספרי של הביטוי, עלינו להתחיל לפתור מבפנים החוצה, כלומר מהבסיס ומעריכיו ורק לבסוף נתייחס לשורש ממעלה שלישית.
שורש וחזקה עשויים לבטל זה את זה אם מעריכיהם תואמים. במקרה שלפנינו, ניתן לבטל את השורש הפנימי באמצעות החזקה הרביעית.

נוח לראות זאת כאשר ממירים את השורש לחזקה: $\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^4} \Leftarrow \sqrt[3]{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^4} \Leftarrow \sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}\cdot 4}} \Leftarrow \sqrt[3]{8^2} \Leftarrow$

$\sqrt[3]{64} \Leftarrow 4$.

תשובה (4).

.14 **השאלה**: $\frac{2a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = ?$

פתרון: על מנת לצמצם את הביטוי יש שתי אפשרויות:
להוציא גורם משותף מהביטוי שבמונה או לפרק את המונה וליצור שני שברים
(שימו לב – מכיוון ש-2 תשובות הן ביטוי של פעולת חיסור, בהחלט הגיוני להחליט ולפצל לשני שברים כבר בהתחלה):

<u>**דרך א'**</u>: פיצול לשני שברים: $\frac{2a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Leftarrow \frac{2a}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Leftarrow 2\sqrt{a}-1$

או, הוצאת גורם משותף במונה: $\frac{2a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Leftarrow \frac{\sqrt{a}\left(2\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}} \Leftarrow 2\sqrt{a}-1$

זכרו – תבניות שחשוב לדעת:

$a = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$

$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

תשובה (3).

---

15. **השאלה**: $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{2}=?$ $(0<a)$

פתרון: עלינו לפשט ביטוי המורכב ממכפלת 3 גורמים שלכולם יש שורש מהמעלה השלישית.
נוכל לכנס את כולם תחת אותו שורש (על פי החוק: $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$), ונקבל: $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{2}$ ⇦ $\sqrt[3]{4a\cdot a^2\cdot 2}$ ⇦ $\sqrt[3]{8a^3}$.

כעת מכיוון שיש לנו מכפלה אשר נמצאת תחת שורש שלישי, נפצל אותה לשני גורמי המכפלה, ונפתור את השורש של המספר נחשב, ואת הנעלם נמיר לכתיבה כחזקה לפי החוק ($\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$):

$\sqrt[3]{8a^3}$ ⇦ $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{a^3}$ ⇦ $2\cdot a^{\frac{3}{3}}$ ⇦ $2\cdot a^1$ ⇦ $2a$.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: לכל שני מספרים a ו- b הוגדרה הפעולה # כך: $\#(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}$

$\#(\#(3,4),12)=?$

פתרון: לפנינו הגדרה של פעולה מומצאת, וביטוי שעל מנת לפשטו יש לבצע עליו את הפעולה המומצאת.
נפשט את הביטוי לפי סדר פעולות חשבון, כלומר נתחיל מהסוגריים הפנימיים.
כלומר, ראשית, נמצא את ערך הביטוי $\#(3,4)$ לפי הגדרת הפעולה, ונקבל:

$\#(3,4)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

נציב את המספר 5 בביטוי, ונקבל $\#(5,12)$.

כעת נבצע את הפעולה המומצאת על הביטוי, ונקבל:

$\#(5,12)=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{20}+\sqrt{60}}=?$

פתרון: בשאלה שלפנינו שבר שבמונה ובמכנה שלו יש חיבור של שורשים. מכיוון שבתשובות המוצעות יש מספרים קטנים ומצומצמים, נשאף לצמצם את הביטוי, ולשם כך נוציא גורם משותף במונה ובמכנה.
כיוון שמדובר בשורשים, ננסה לפרק את הבסיסים למכפלות של גורמים קטנים יותר.
נתחיל במונה: $\sqrt{5}+\sqrt{15}$ ⇦ $\sqrt{5}+\sqrt{5\cdot 3}$ ⇦ $\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$ ⇦ $\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$

כעת, נפשט את המכנה. יש מספר אפשרויות לפירוק המספרים למכפלות, אולם מכיוון שבמונה קיבלנו מכפלה שאחד מהגורמים שלה הוא $\sqrt{5}$, נשאף לפרק למכפלה שזה אחד מגורמיה גם במכנה:

$\sqrt{20}+\sqrt{60}$ ⇦ $\sqrt{5\cdot 4}+\sqrt{5\cdot 12}$ ⇦ $\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ ⇦ $\sqrt{5}\cdot 2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3\cdot 4}$ ⇦
$\sqrt{5}\cdot 2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}$ ⇦ $\sqrt{5}\cdot 2+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot 2$ ⇦ $2\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$

כעת, נרכיב את הביטוי מחדש, ונקבל: $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{20}+\sqrt{60}}$ ⇦ $\dfrac{\sqrt{5}(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{5}(1+\sqrt{3})}$ ⇦ $\dfrac{1}{2}$.

תשובה (2).

---

18. **השאלה**: $\frac{3\sqrt{12}}{2}=?$

פתרון: על מנת לפשט את הביטוי עלינו למצוא גורם שיצטמצם עם המכנה. נפרק את השורש שבמונה למכפלה על מנת לקבל גורם שנוכל לצמצמו עם המכנה: $\frac{3\sqrt{12}}{2} \Leftarrow \frac{3\sqrt{3\cdot4}}{2} \Leftarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{2} \Leftarrow$

$\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}} \Leftarrow 3\sqrt{3}$.

תשובה (3).

---

19. **השאלה**: $0<x<y<\frac{1}{2}$.

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

נציב מספרים שיש להם שורש ריבועי שלם, למשל x שווה ל- $\frac{1}{9}$ ו-y שווה ל- $\frac{1}{4}$, ונחשב את ערכה של כל אחת מהתשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. אם x שווה ל- $\frac{1}{9}$ ו-y שווה ל- $\frac{1}{4}$, ערכו של הביטוי הוא $\frac{5}{6}$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{1}{9}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\right).$$

<u>תשובה (2)</u>: $2x$. אם x שווה ל- $\frac{1}{9}$, הרי ש-2x שווה ל- $\frac{2}{9}$ $\left(2x=2\cdot\frac{1}{9}=\right)$.

<u>תשובה (3)</u>: $x+y$. אם x שווה ל- $\frac{1}{9}$ ו-y שווה ל- $\frac{1}{4}$, ערכו של הביטוי הוא $\frac{13}{36}$

$$\left(x+y=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{4+9}{36}=\right)$$

<u>תשובה (4)</u>: $\sqrt{x\cdot y}$. אם x שווה ל- $\frac{1}{9}$ ו-y שווה ל- $\frac{1}{4}$, ערכו של הביטוי הוא $\frac{1}{6}$

$$\left(\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\right).$$

מצאנו שתשובה (1) היא התשובה שערכה הוא הגדול ביותר.

<u>דרך ב'</u> : פישוט אלגברי

על פי הנתון שלפנינו, x ו-y הם שברים חיוביים, כאשר y גדול מ-x.
על מנת להכריע מי מבין הביטויים שבתשובות גדול יותר, נבחר זוגות של ביטויים שנוח לנו להשוות ביניהם, ונפסול כל פעם את הביטוי הקטן מבין זוג הביטויים שבדקנו.
תחילה נוח להשוות בין תשובות (2) ו-(3) :
ניתן לכתוב את תשובה (2) באופן שידמה יותר לתשובה (3) : $2x = x + x$.
לפי הנתון y גדול מ-x. מכאן שבתשובה (3) מוסיפים ל-x מספר גדול יותר, ולכן תשובה (2) נפסלת.
כעת נשווה בין תשובות (1) ו-(3).
לשם כך יש להבין כיצד מתנהגים שברים חיוביים תחת פעולת שורש.
כאשר מוציאים שורש משבר חיובי, מקבלים בהכרח תוצאה שגדולה מהשבר המקורי.
לפיכך, $\sqrt{x}$ גדול יותר מ-x, ו- $\sqrt{y}$ גדול יותר מ-y, ומכאן שערכה של תשובה (3) קטן מערכה של תשובה (1), ולכן נפסול את תשובה (3).
לבסוף, עלינו להשוות בין תשובות (1) ו-(4).
נפרק את תשובה (4) למכפלה של שני שורשים : $\sqrt{x \cdot y}$ ⇦ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.
$\sqrt{y}$ הוא שבר חיובי. מכיוון שאנו כופלים את $\sqrt{x}$ בשבר חיובי (ב- $\sqrt{y}$), הרי שערכה של המכפלה קטן מערכו של $\sqrt{x}$.
לעומת זאת, בתשובה (1) מוסיפים ל- $\sqrt{x}$ מספר חיובי כלשהו $\left(\sqrt{y}\right)$, ולכן ערך הביטוי בהכרח גדול מ- $\sqrt{x}$. מצאנו שערכה של תשובה (1) גדול מערכה של תשובה (4), ולכן ניתן לקבוע כי תשובה (4) נפסלת, וכי התשובה הנכונה היא תשובה (1).

תשובה (1).

.20 השאלה : $\sqrt{72} = ?$

פתרון : מכיוון שכל התשובות המוצעות הן מכפלה של מספר בשבר, נפרק את השבר למכפלה אשר לאחד ממרכיביה יש שורש : $\sqrt{72}$ ⇦ $\sqrt{36 \cdot 2}$ ⇦ $\sqrt{36} \cdot \sqrt{2}$ ⇦ $6\sqrt{2}$.

תשובה (2).

.21 השאלה : $3\sqrt{3} = ?$

פתרון : **<u>דרך א'</u>** : על מנת לפשט את הביטוי 'נכניס' את המספר 3 לתוך השורש.
על מנת לעשות זאת עלינו לשאול מיהו המספר שהשורש השני שלו שווה ל-3. התשובה היא 9, ולכן :
$3\sqrt{3}$ ⇦ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$.
על פי חוק החזקות : $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$ ת : $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$, ומכאן שניתן לפשט את הביטוי באופן הבא : $\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$ ⇦ $\sqrt{9 \cdot 3}$ ⇦ $\sqrt{27}$

<u>דרך ב'</u> : בדיקת תשובות. ננסה לפשט כל אחד מהביטויים המוצעים בתשובות על ידי פירוק המספר למכפלה אשר לאחד מהגורמים שלה יש שורש שלם, עד שנמצא את הביטוי השווה לביטוי $3\sqrt{3}$:

<u>תשובה (1)</u> : $\sqrt{18}$. ניתן לפשט את הביטוי באמצעות 'פירוק' המספר 18 למכפלה 9 ן- 2 : $\sqrt{18}$ ⇦ $\sqrt{9 \cdot 2}$ ⇦ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$ ⇦ $3\sqrt{2}$. מכיוון שקיבלנו ביטוי השונה מהביטוי המקורי, התשובה נפסלת.

<u>תשובה (1)</u> : $\sqrt{27}$. ניתן לפשט את הביטוי באמצעות 'פירוק' המספר 27 למכפלה 9 ו-3 : ⇦ $\sqrt{27}$ $\sqrt{9 \cdot 3}$ ⇦ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$ ⇦ $3\sqrt{3}$. מכיוון שקיבלנו ביטוי הזהה לביטוי המקורי, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.22 **השאלה**: $\sqrt{300}-\sqrt{75}=?$

פתרון: פישוט אלגברי באמצעות הוצאת גורם משותף.
נפשט תחילה כל אחד מהגורמים בנפרד על ידי פירוקו למכפלה אשר לאחד מגורמיה יש שורש שלם:

$$10\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{100}\cdot\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{100\cdot 3} \Leftarrow \sqrt{300}$$

$$5\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{25\cdot 3} \Leftarrow \sqrt{75}$$

כעת נפשט את הביטוי כולו על ידי שימוש בפירוק שביצענו לכל אחד מהמחוברים:

$$5\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{3}(10-5) \Leftarrow 10\sqrt{3}-5\sqrt{3} \Leftarrow \sqrt{300}-\sqrt{75}$$

תשובה (1).

.23 **השאלה**: $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4}=?$

פתרון: נתבונן בתשובות על מנת לבחור מה עלינו לעשות מבחינת הפישוט האלגברי. בתשובות שלפנינו אין חזקה או סוגריים וגם לא שורש מעל הביטוי כולו. כמו כן, השברים שמופיעים בתשובות הם בעלי מכנה יחיד, כך שיהיה זה נכון לבצע לשברים שלפנינו מכנה משותף.
סדר הפעולות בהן נפשט: נפשט את הביטוי שבתוך הסוגריים על ידי חיבור השברים באמצעות מכנה משותף, לאחר מכן נפתח את הסוגריים ונבטל את החזקה והשורש.
נתחיל עם מכנה משותף לביטוי שבתוך הסוגריים:

$$.\ \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftarrow \frac{3-2}{\sqrt{3\cdot 2}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

כעת 'נבנה' את הביטוי מחדש, ונבטל את השורש על ידי המרתו לחזקה (תזכורת – המרת השורש לחזקה נעשית באמצעות החוק: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$), ונקבל:

$$.\ \frac{1}{6} \Leftarrow \frac{1^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} \Leftarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \Leftarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\frac{4}{2}} \Leftarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^4}$$

תשובה (3).

.24 **השאלה**: $\sqrt{0.025}\cdot\sqrt{40}=?$

פתרון: איננו יודעים 'לעבוד' עם שורשים של שברים עשרוניים ולכן 'נמיר' את השבר העשרוני לשבר פשוט:

$$.1 \Leftarrow \sqrt{1} \Leftarrow \sqrt{\frac{100}{100}} \Leftarrow \sqrt{\frac{25}{100\cancel{0}}\cdot 4\cancel{0}} \Leftarrow \sqrt{\frac{25}{1000}}\cdot\sqrt{40} \Leftarrow \sqrt{0.025}\cdot\sqrt{40}$$

תשובה (1).

.25 **השאלה**: $\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4=?$

פתרון: חזקה ושורש הן פעולות הפוכות. על מנת 'לבטל' שורש שני יש להעלות ביטוי בחזקת 2, כלומר,

יש לפשט את הביטוי בדרך הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4$ ⇦ $\left(\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2\right)^2$ ⇦ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

קיבלנו ביטוי שניתן לפשטו באמצעות נוסחת הכפל המקוצר: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ ⇦

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇦ $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

נחבר את השברים באמצעות מכנה משותף: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ⇦ $\frac{1+3+\sqrt{2}}{6}$ ⇦ $\frac{4+\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{6}$ ⇦

$\frac{4+\sqrt{12}}{6}$ ⇦ $\frac{4+\sqrt{4\cdot 3}}{6}$ ⇦ $\frac{4+2\sqrt{3}}{6}$ ⇦ $\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{6}$ ⇦ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

תשובה (4).

.26 **השאלה**: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}=?$

פתרון: בשאלה שלפנינו ביטוי מורכב שעל פי התשובות אמור להגיע למספר או לביטוי פשוט עם שורש.
ראשית, נפשט את הסוגריים – לפנינו סוגריים בחזקה שנייה עם שני גורמים בפעולת חיסור, כלומר
נוסחת הכפל המקוצר השנייה: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}$ ⇦ $\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{24}$ ⇦

$3+2+2\sqrt{3\cdot 2}+\sqrt{24}$ ⇦ $5-2\sqrt{6}+\sqrt{24}$ ⇦ $5-\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{24}$ ⇦ $5-\sqrt{4\cdot 6}+\sqrt{24}$ ⇦ 5.

תשובה (3).

.27 **השאלה**: $\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)^2-5\sqrt{8}=?$

פתרון: לאור התשובות עלינו לפתוח סוגריים ולפשט את הביטוי שקיבלנו. נפתח את הסוגריים בעזרת נוסחת הכפל המקוצר הראשונה, וביטויים שמתחת לשורש נפשט למכפלה של ביטויים:

$\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)^2-5\sqrt{8}$ ⇦ $\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}-5\sqrt{8}$ ⇦ $10+5+2\sqrt{2\cdot 5}\cdot\sqrt{5}-5\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$

⇦ $15+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-5\cdot 2\cdot\sqrt{2}$ ⇦ $15+2\sqrt{2}\cdot 5-10\sqrt{2}$ ⇦ $15+10\sqrt{2}-10\sqrt{2}$ ⇦ 15.

תשובה (4).

.28 **השאלה**: הפעולה \$ מוגדרת עבור כל שני מספרים x ו-y באופן הבא: $x\$y=\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2$.

$\sqrt{5}\$\sqrt{5}=?$

פתרון: בביטוי המבוקש מופיע המספר $\sqrt{5}$ גם משמאל ל-\$ וגם מימין לו. כלומר, ה-x וה-y שווים ל- $\sqrt{5}$. נציב זאת בהגדרת הפעולה, ונקבל: $\sqrt{5}\$\sqrt{5}$ ⇦ $\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)^2$ ⇦

$\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(0\right)^2$ ⇦ $2^2\left(\sqrt{5}\right)^2-0$ ⇦ $4\cdot 5$ ⇦ 20.

תשובה (2).

---

29. **השאלה** : עבור כל שני מספרים חיוביים x ו-y הוגדרה הפעולה $ כך : $\$(x\,,y)=x^{\frac{1}{y}}$.
נתון כי a ו-b מספרים חיוביים. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון : לפנינו פעולה מומצאת המוגדרת על שני מספרים, ולפיה יש להעלות את המספר השמאלי בחזקה שהמעריך שלה הוא שבר. על מנת למצוא מי מהתשובות נכונה, עלינו ליישם את הפעולה המומצאת לגבי כל אחת מהתשובות, ולבדוק האם הביטויים המתקבלים בשני האגפים זהים.

<u>תשובה (1)</u> : $\$(a\,,a)=\$(1,2)$. נציב את המשתנים בפעולה המוצעת, ונקבל : $a^{\frac{1}{a}}=1^{\frac{1}{2}}$ משוואה זו אינה נכונה בהכרח, שכן 1 בכל חזקה שווה ל-1, ואולם $a^{\frac{1}{a}}$ אינו בהכרח שווה ל-1.

<u>תשובה (2)</u> : $\$(a\,,b^2)=\$(a^2\,,b)$. נציב את המשתנים בפעולה המוצעת, ונקבל $a^{\frac{1}{b^2}}=\left(a^2\right)^{\frac{1}{b}}$.

לפי חוקי חזקות כאשר יש חזקה בחזקה עלינו לכפול את המעריכים, כלומר : $a^{\frac{1}{b^2}}=a^{\frac{2}{b}}$.
מכיוון שמשוואה זו אינה נכונה בהכרח, התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u> : $\$(16,2)=\$(4,4)$. נציב את המשתנים בפעולה המוצעת, ונקבל $16^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$.

לפי חוק השורשים, ניתן להמיר כתיבה כחזקה שהיא שבר לשורש : $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, ולפיכך :
$16^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$ ⇦ $\sqrt[2]{16^1}=\sqrt[4]{4^1}$. משוואה זו אינה נכונה שכן שורש שני של 16 שווה ל-4, ואילו שורש רביעי של 4 הוא בהכרח מספר הקטן מ-4.

<u>תשובה (4)</u> : $\$(a^n\,,n)=\$(a,1)$. נציב את המשתנים בפעולה המוצעת, ונקבל $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{1}}$.

לפי חוקי חזקות במצב של חזקה בחזקה יש לכפול את המעריכים, כלומר : $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{1}}$ ⇦ $a^{\frac{n}{n}}=a^1$ ⇦ $a^1=a^1$. מכיוון שקיבלנו משוואה שהיא בהכרח תמיד נכונה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).