מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(3)	(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(4)	(4)	(3)	(2)	(3)	(3)	(3)	(2)	(3)

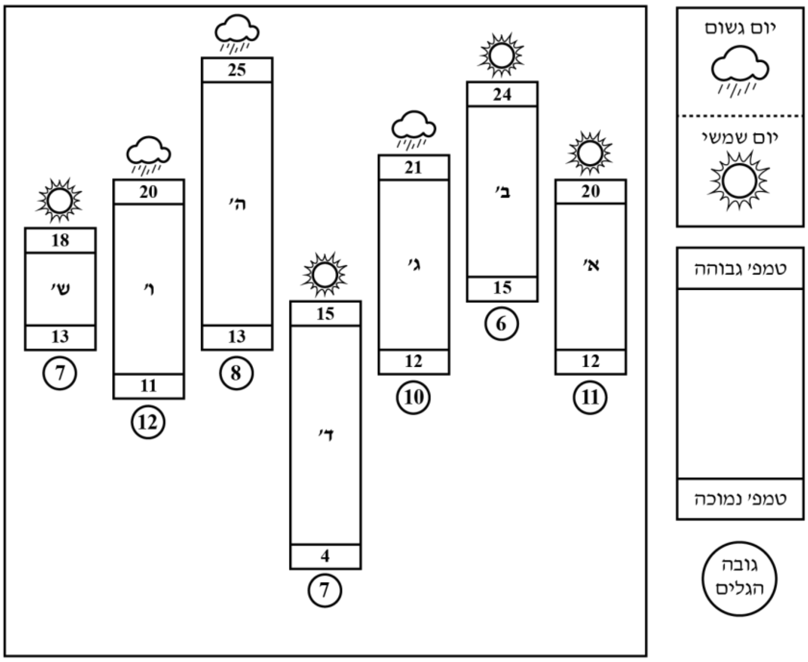
הסברים

הסקה מתרשים (שאלות 1-4)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שלאחריו.

בתרשים שלפניכם נתונים לגבי מזג האוויר בשבוע מסוים.
בתרשים מפורטים בעבור כל אחד מהימים הטמפרטורה הנמוכה והגבוהה ביותר שנמדדה באותו יום, ובטבלה שבתחתית התרשים - הטמפרטורה שנמדדה באותו יום בשעה 12:00.
מעל כל יום קיים סימן בתרשים המראה האם ירד גשם באותו היום או שהיה זה יום שמשי (ראה מקרא).
מתחת לכל יום מצוין גובה הגלים בעיגול המתאים.

לדוגמה: ביום א' הטמפרטורה הגבוהה ביותר הייתה 20 מעלות, והטמפרטורה הנמוכה ביותר הייתה 12 מעלות. הטמפרטורה באותו יום בשעה 12:00 הייתה 19 מעלות. יום זה היה יום שמשי וגובה הגלים ביום זה היה 11 מטרים.



טמפרטורה בשעה 12:00	א'	ב'	ג'	ד'	ה'	ו'	ש'
	19	16	16	10	21	15	13

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

1. **השאלה**: מה היה גובה הגלים הממוצע בימים הגשומים?

פתרון: לפי נוסחת הממוצע, גובה הגלים הממוצע בימים הגשומים שווה לסכום גבהי הגלים בימים אלה חלקי מספר הימים הגשומים. לפי התרשים, ימים ג׳, ה׳ ו-ו׳ היו ימים גשומים ובימים אלה גובה הגלים היה 10 מטרים, 8 מטרים ו-12 מטרים בהתאמה. מכאן שגובה הגלים הממוצע בימים אלה שווה ל:

$$\frac{10+8+12}{3} \Leftarrow \frac{30}{3} \Leftarrow 10.$$

תשובה (4).

הערה: כידוע, הממוצע הוא האמצע החשבוני בין כל הערכים להם עושים ממוצע. מכיוון שההפרש בין המספרים 8, 10 ו-12 קבוע, הממוצע שלהם שווה למספר האמצעי, כלומר ל-10.

---

2. **השאלה**: גובה הגלים <u>ביום מסוים</u> היה **בדיוק מחצית** מגובה הגלים <u>ביום אחר</u>.

מה נכון בנוגע לימים אלה?

פתרון: ראשית יש למצוא על אלו שני ימים מדובר. לפי התרשים, שני הימים היחידים בהם היחס בין גבהי הגלים הוא 1:2 הם ימים ב׳ ו-ו׳, כאשר בימים אלה גובה הגלים היה 6 מטרים ו-12 מטרים בהתאמה.
לפי התשובות עלינו לקבוע מה היה מזג האוויר בשני הימים. לפי התרשים, יום ב׳ היה יום שמשי ואילו ביום ו׳ ירד גשם. מכאן שרק באחד מהימים ירד גשם.

תשובה (3).

---

3. **השאלה**: ידוע כי בימים **ד׳ עד שבת** הטמפרטורה בשעה 14:00 הייתה אותה טמפרטורה.

מה מהבאים יכולה להיות טמפרטורה זו?

פתרון: נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 10. התשובה אינה נכונה, שכן ביום ו׳ הטמפרטורה הנמוכה ביותר הייתה 11 מעלות, ובימים ה׳ ושבת הטמפרטורה הנמוכה ביותר הייתה 13 מעלות. מכאן לא ייתכן כי הטמפרטורה בשעה 14:00 באותם ימים הייתה 10 מעלות.

<u>תשובה (2)</u>: 12. התשובה אינה נכונה, שכן בימים ה׳ ושבת הטמפרטורה הנמוכה ביותר הייתה 13 מעלות. מכאן לא ייתכן כי הטמפרטורה בשעה 14:00 באותם ימים הייתה 12 מעלות.

<u>תשובה (3)</u>: 14. זו התשובה הנכונה. בכל אחד מהימים ד׳ עד שבת הטמפרטורה הנמוכה ביותר הייתה נמוכה מ-14 מעלות והטמפרטורה הגבוהה ביותר הייתה גבוהה מ-14 מעלות.

לשם השלמת ההסבר, תשובה (4) אינה אפשרית מכיוון שביום ד׳ הטמפרטורה הגבוהה ביותר הייתה 15 מעלות, ולכן לא ייתכן שביום זה הטמפרטורה בשעה 14:00 הייתה 16 מעלות.

תשובה (3).

---

4. **השאלה**: ידוע כי ביום מסוים הייתה הטמפרטורה בשעה 12:00 נמוכה ב-5 מעלות מהטמפרטורה הגבוהה ביותר באותו יום, וגבוהה ב-5 מעלות מהטמפרטורה בשעה 20:00.

באיזה מהימים הבאים יתכן שמדובר?

פתרון: לפי הנתונים שבתרשים בימים ג', ד', ו' וש' הטמפרטורה בשעה 12:00 בכל אחד מהימים הייתה נמוכה ב-5 מעלות מהטמפרטורה הגבוהה ביותר באותו יום. מכאן שניתן לפסול את תשובה (2).

נבדוק את התשובות שנותרו:

תשובה (1): **ד'**. ביום זה הטמפרטורה בשעה 12:00 הייתה 10 מעלות. לפי נתוני השאלה, ביום זה הטמפרטורה בשעה 20:00 הייתה נמוכה ב-5 מעלות מהטמפרטורה בשעה 12:00. מכאן שהטמפרטורה בשעה 20:00 הייתה 5 מעלות $\left(=5-10\right)$. מכיוון שהטמפרטורה הנמוכה ביותר ביום זה הייתה 4 מעלות ייתכן שבשעה 20:00 הטמפרטורה הייתה 5 מעלות, ולכן זו התשובה הנכונה.

הגענו לתשובה מתאימה ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק את שאר התשובות. נציין כי תשובות (3) ו-(4) אינן אפשריות מכיוון שבימים אלה הטמפרטורה המינימלית גבוהה מזו שתתקבל בשעה 20:00 אם נבצע את אותו חישוב שביצענו בבדיקה של תשובה (1).

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 20-5)

5. **השאלה**: לכל מספר x מתקיים: $\left(x^{2a}\right)^3 = x \cdot x^3 \cdot x^{4a}$

$a = ?$

פתרון: זוהי שאלת משוואות שבה עלינו למצוא נעלם שהוא מעריך במשוואה. כדי למצוא את ערכו של a יש להשוות את הבסיסים משני צדי המשוואה. יש לאחד את הבסיסים בכל אחד מהאגפים לבסיס אחד, בהתאם לחוקי החזקות, ולאחר מכן נוכל להשוות את המעריכים:

לפי חוק החזקות: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. מכאן שנוכל לפשט את אגף ימין, ולקבל: $\left(x^{2a}\right)^3 = x \cdot x^3 \cdot x^{4a}$

$\Leftarrow \left(x^{2a}\right)^3 = x^{1+3+4a} \Leftarrow \left(x^{2a}\right)^3 = x^{4+4a}$.

בנוסף, לפי חוק החזקות: $\left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$. נשתמש בחוק זה על מנת לפשט את אגף שמאל, ונקבל:

$\left(x^{2a}\right)^3 = x^{4+4a} \Leftarrow x^{2a \cdot 3} = x^{4+4a} \Leftarrow x^{6a} = x^{4+4a}$.

מכיוון שהשווינו את הבסיסים בשני צדי המשוואה, הרי שניתן לקבוע שגם המעריכים/החזקות שווים, ולכן ניתן להסיק מן המשוואה כי: $6a = 4 + 4a$.
נחסר 4a משני צדי המשוואה, ונקבל: $2a = 4$.
נחלק ב-2 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $a = 2$.

תשובה (2).

---

6. **השאלה**: מחירה של חולצה הוא מספר שלם של שקלים.

אם ידוע כי גם אחרי הנחה של 30%, מחיר החולצה נותר מספר שלם של שקלים, מה מהבאים יכול להיות מחיר החולצה לפני ההנחה (בשקלים)?

פתרון: **דרך א'** – בדיקת תשובות:

נעבור על התשובות המוצעות ובכל תשובה נחשב את מחירה של החולצה לאחר ההנחה. התשובה הנכונה היא חולצה שמחירה לאחר ההנחה יהיה מספר שלם של שקלים.

תשובה (1): 18. אם מחירה של חולצה הוא 18 שקלים, 10% ממחיר החולצה שווים ל-1.8 שקלים $\left(=\frac{18}{10}\right)$, ומכאן ש-30% ממחירה הם מספר לא שלם של שקלים $\left(=1.8\cdot 3\right)$.

אם 30% ממחיר החולצה אינם מספר שלם של שקלים גם מחירה לאחר ההנחה לא יהיה מספר שלם. מכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2): 28. אם מחירה של חולצה הוא 28 שקלים, 10% ממחיר החולצה שווים ל-2.8 שקלים $\left(=\frac{28}{10}\right)$, ומכאן ש-30% ממחירה הם מספר לא שלם של שקלים $\left(=2.8\cdot 3\right)$. אם 30% ממחיר החולצה אינם מספר שלם של שקלים גם מחירה לאחר ההנחה לא יהיה מספר שלם. מכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): 35. אם מחירה של חולצה הוא 35 שקלים, 10% ממחיר החולצה שווים ל-3.5 שקלים $\left(=\frac{35}{10}\right)$, ומכאן ש-30% ממחירה הם מספר לא שלם של שקלים $\left(=3.5\cdot 3\right)$. אם 30% ממחיר החולצה אינם מספר שלם של שקלים גם מחירה לאחר ההנחה לא יהיה מספר שלם. מכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

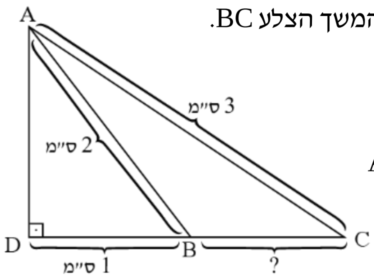
מכיוון שפסלנו 3 תשובות ניתן לדעת כבר בשלב זה שתשובה (4) היא התשובה הנכונה. אולם לשם השלמת ההסבר נבדוק גם תשובה זו:

תשובה (4): 50. אם מחירה של חולצה הוא 50 שקלים, 10% ממחיר החולצה שווים ל-5 שקלים $\left(=\frac{50}{10}\right)$, ומכאן ש-30% ממחירה הם מספר שלם של שקלים $\left(=5\cdot 3\right)$. אם 30% ממחיר החולצה הם מספר שלם של שקלים גם מחירה לאחר ההנחה יהיה מספר שלם. מכאן שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': הבנה אלגברית:

כדי שמחירה של חולצה לאחר 30% הנחה יהיה מספר שלם של שקלים, בהינתן שגם מחירה של החולצה הוא מספר שלם של שקלים, גם 30% ממחירה צריכים להיות מספר שלם של שקלים. 30% ממחירה של חולצה יהיו מספר שלם של שקלים כאשר 10% מהמחיר יהיו מספר שלם של שקלים. 10% יהיו מספר שלם כאשר ספרת האחדות של המספר השלם היא 0. מכאן שתשובה (4) היא התשובה הנכונה.

תשובה (4).



7. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש קהה-זווית. D היא נקודה על המשך הצלע BC.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורכו של הקטע BC (בס״מ)?

פתרון: נתבונן במשולש ABD: משולש זה הוא משולש ישר זווית ובו היתר AB גדול פי 2 מאחד הניצבים (הניצב DB). משולש ישר זווית בו היתר גדול פי 2 מאחד הניצבים הוא משולש זה ובו שתי הזווית האחרות שוות ל-30^o ול-60^o, כאשר הניצב ששווה למחצית היתר נמצא מול הזווית ששווה ל-30^o.
מכאן ש: $\sphericalangle DAB = 30°$ ו- $\sphericalangle ABD = 60°$. במשולש זה הניצב הגדול, שמונח מול הזווית ששווה ל-60^o, גדול פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן, שמונח מול הזווית ששווה ל-30^o. מכאן שהניצב AD שווה ל- $\sqrt{3}$ $\left(1\cdot\sqrt{3}=\right)$.

כעת נתבונן במשולש DAC: משולש זה הוא משולש ישר זווית ובו נתון כי היתר שווה ל-3 ס״מ ומצאנו שהניצב AD שווה ל- $\sqrt{3}$ ס״מ. מכאן שניתן להשתמש במשפט פיתגורס כדי למצוא את הניצב DC.

לפי משפט פיתגורס: $AD^2+DC^2=AC^2$ ⇦ $\left(\sqrt{3}\right)^2+DC^2=3^2$ ⇦ $3+DC^2=9$.

נחסר 3 משני צדי המשוואה, ונקבל: $DC^2=6$.

נוציא שורש ריבועי משני צדי המשוואה, ונקבל: $DC=\sqrt{6}$.

לפי נתוני הסרטוט, $DC=DB+BC$.

נציב במשוואה את גדלי הצלעות לפי נתוני הסרטוט ולפי מה שמצאנו, ונקבל: $\sqrt{6}=1+BC$.

נחסר 1 משני צדי המשוואה, ונקבל: $BC=\sqrt{6}-1$.

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: מכונית נוסעת במהירות $\frac{1}{3}x$ קמ״ש.

בכמה דקות תעבור המכונית מרחק של $\frac{1}{2}x$ ק״מ?

פתרון: <u>דרך א׳</u>: נוסחת התנועה/ריבוע יחסים

לפי נתוני השאלה, המכונית נוסעת במהירות של $\frac{1}{3}x$ קמ״ש, כלומר המכונית עוברת מרחק של $\frac{1}{3}x$ ק״מ בשעה אחת. כדי לענות על השאלה ניתן להשתמש בריבוע יחסים, כאשר נסמן ב-t את מספר השעות שייקחו למכונית לעבור $\frac{1}{2}x$ ק״מ:

ק״מ	שעות
$\frac{1}{3}x$	1
$\frac{1}{2}x$	t

קיים יחס ישר בין זמן הנסיעה לבין המרחק שתעבור המכונית ולכן היחס בכל שורה שווה. מכאן ש:

$$\frac{t}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{\frac{x}{3}} \Leftarrow t\cdot\frac{2}{x}=1\cdot\frac{3}{x} \Leftarrow \frac{2t}{x}=\frac{3}{x}.$$

נכפול ב-x את שני צדי המשוואה, ונקבל: $3=2t$.

נחלק ב-2 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $t=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

כלומר, המכונית תעבור $\frac{1}{2}x$ ק״מ בשעה וחצי. בשעה יש 60 דקות ומכאן שהמכונית תעבור $\frac{1}{2}x$ ק״מ ב-90 דקות $\left(\frac{3}{2}\cdot 60=\right)$.

<u>דרך ב׳</u>: הצבת דוגמה מספרית

אין נתונים ולא נשאלנו לגבי גודלו של x, ולכן נציב כי x שווה למשל 6 (מספר אשר מתחלק ב-2 ו-3 ללא שארית), ונקבל כי מהירותה של המכונית היא 2 קמ״ש $\left(\frac{1}{3}x=\frac{1}{\cancel{3}_1}\cdot\cancel{6}^2=\right)$, וכי המרחק שעליה לעבור הוא 3 ק״מ $\left(\frac{1}{2}x=\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\cancel{6}^3=\right)$.

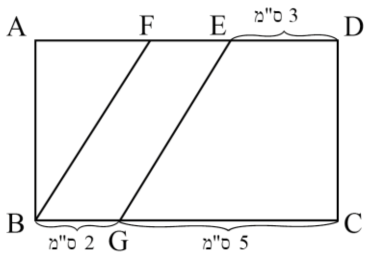
למכונית הנוסעת במהירות 2 קמ״ש נדרש זמן של 1.5 שעות על מנת לעבור מרחק של 3 ק״מ $\left(\frac{3}{2}=\right)$, שהם 90 דקות $\left(\frac{3}{2}\cdot 60=\right)$.

תשובה (1).

---

9. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מלבן המורכב מטרפז, מקבילית ומשולש.
שטח הטרפז EGCD הוא 16 סמ״ר.

לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המשולש ABF (בסמ״ר)?



פתרון: עלינו למצוא את שטח המשולש ABF. משולש ABF הוא משולש ישר-זווית, ומכאן ששטחו שווה למחצית מכפלת ניצביו.
על מנת למצוא את שטחו של המשולש עלינו למצוא את אורכי ניצביו.

הניצב AB הוא רוחב המלבן ABCD, ומכאן שאורכו שווה לאורך הצלע הנגדית לו, הצלע CD.
הצלע CD מהווה גובה בטרפז EGCD, אשר שטחו לפי הנתון שווה ל-16 סמ״ר.
נמצא את אורכה של הצלע DC בעזרת הנוסחה לחישוב שטח טרפז. שטח טרפז שווה למכפלת גובהו בממוצע בסיסיו. לפי נתוני הסרטוט אורכם של בסיסי הטרפז ED ו-GC שווה ל-3 ס״מ ו-5 ס״מ בהתאמה, ומכאן ש: $\frac{3+5}{2}\cdot DC=16 \Leftarrow \frac{8}{2}\cdot CD=16 \Leftarrow 4\cdot CD=16$.
נחלק ב-4 את שני האגפים, ונמצא כי אורכה של CD הוא 4 ס״מ, ומכאן שזה אורכה של הצלע AB.

כעת נמצא את אורך הניצב AF:
לפי הנתונים, המרובע FBGE הוא מקבילית וכידוע צלעותיה הנגדיות של מקבילית שוות זו לזו. מכאן ש: $BG=FE=2$. לפי הסרטוט אורכה של הצלע BC הוא 7 ס״מ $\left(BC=BG+GC=5+2=\right)$.
מכיוון שהצלע AD היא צלע הנגדית לצלע BC, הרי שאורכה שווה אף הוא ל-7 ס״מ.
לפי נתוני הסרטוט, אורך הצלע AD שווה לסכום אורכיהן של הצלעות AF, FE ו-ED, ומכאן ש:
$AF+2+3=7 \Leftarrow AF+5=7$.
נחסר 5 משני צדי המשוואה, ונקבל: $AF=2$.

כעת נחשב את שטח המשולש ABF לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש, ונמצא כי שטח המשולש שווה ל-4 סמ״ר $\left(\frac{AB\cdot AF}{2}=\frac{4\cdot 2}{2}=\right)$.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: שלומי קנה ירקות בשוק. מספר המלפפונים שקנה שלומי גדול פי 3 ממספר הגזרים שקנה, ומספר הקישואים שקנה גדול ב-4 ממספר הגזרים שקנה.
בסך הכול קנה שלומי 29 ירקות.

כמה קישואים קנה שלומי?

פתרון: <u>דרך א'</u>: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: 10. נתון כי מספר הקישואים שקנה שלומי גדול ב-4 ממספר הגזרים שקנה ומכאן ששלומי קנה 6 גזרים $(10-4=)$. בנוסף, שלומי קנה 29 ירקות בסך הכול, ומכאן שאם שלומי קנה 10 קישואים ו-6 גזרים הרי שהוא קנה 13 מלפפונים $(29-10-6=)$. נתון כי מספר המלפפונים שקנה שלומים גדול פי 3 ממספר הגזרים שקנה, אך מכיוון ש-13 אינו גדול פי 3 מ-3, זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: **9**. נתון כי מספר הקישואים שקנה שלומי גדול ב-4 ממספר הגזרים שקנה ומכאן ששלומי קנה 5 גזרים $(9-4=)$. בנוסף, נתון כי שלומי קנה 29 ירקות בסך הכול, ומכאן שאם שלומי קנה 9 קישואים ו-5 גזרים הרי שהוא קנה 15 מלפפונים $(29-9-5=)$.
נתון כי מספר המלפפונים שקנה שלומים גדול פי 3 ממספר הגזרים שקנה.
15 מלפפונים הם אכן פי 3 מ-5 $\left(\frac{15}{5}=\right)$, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: בניית משוואה

נסמן: מספר הקישואים שקנה שלומי=x.

מספר הקישואים שקנה שלומי גדול ב-4 ממספר הגזרים שקנה ומכאן שמספר הגזרים שקנה שווה ל-$(x-4)$. כמו כן, נתון כי מספר המלפפונים שקנה שלומים גדול פי 3 ממספר הגזרים שקנה, ומכאן שמספר המלפפונים שקנה שלומי שווה ל-$3\cdot(x-4)$.

בסך הכול שלומי קנה 29 ירקות ומכאן ש: $29=(x-4)\cdot3+(x-4)+x$ ⇦ $29=x+x-4+3x-12$ ⇦ $5x-16=29$.

נוסיף 16 לשני צדי המשוואה, ונקבל: $5x=45$.

נחלק ב-5 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $x=9$.

תשובה (2).

---

11. **השאלה**: נתון: x הוא מספר שלם וחיובי.

$$6 < \frac{9x}{7}$$

$$\frac{1}{4}x^2 < 15$$

$$x = ?$$

פתרון: פישוט אלגברי + בדיקת תשובות:

ראשית, מכיוון שניתן לפשט את אי-השוויונות שבנתונים, נתחיל מפישוט שלהם:

נתחיל באי-שוויון הראשון: $6 < \frac{9x}{7}$.

נכפול ב-7 את שני צדי האי-שוויון, ונקבל: $42 < 9x$.

נעבור לאי-שוויון השני: $\frac{1}{4}x^2 < 15$.

נכפול ב-4 את שני צדי האי-שוויון, ונקבל: $x^2 < 60$.

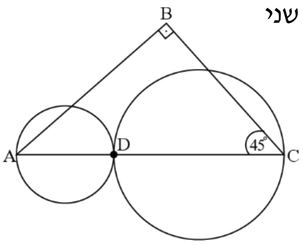
כעת נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: **7**. נציב $x = 7$ באי-שוויון הראשון, ונקבל: $42 < 9 \cdot 7$ ⇦ $42 < 63$. האי-שוויון שהתקבל נכון ולכן נמשיך לבדוק את האי-שוויון השני.
נציב $x = 7$ באי-שוויון השני, ונקבל: $7^2 < 60$ ⇦ $49 < 60$. האי-שוויון שהתקבל נכון גם הוא ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

12. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש ישר-זווית ABC. D היא נקודת ההשקה בין שני המעגלים.
AD ו-DC הם קטרי המעגלים.
נתון: שטח משולש ABC הוא 8 סמ"ר.



מה סכום היקפי המעגלים (בס"מ)?

פתרון: עלינו למצוא את סכום היקפי המעגלים ולכן לשם כך עלינו למצוא את קוטרם של המעגלים. על מנת למצוא אותם נשתמש בשטח המשולש ABC שנתון לנו:

משולש ABC הוא משולש ישר-זווית שאחת מזוויותיו שווה ל-$45°$, ומכאן שזהו משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, משולש כסף. שטח משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים שווה למכפלת ניצביו (השווים) לחלק ל-2. נסמן את אורך כל אחד מהניצב במשולש ABC ב-x.

נתון כי שטחו של המשולש ABC הוא 8 סמ"ר, ומכאן ש: $8 = \frac{x^2}{2}$.

נכפול ב-2 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $x^2 = 16$.

נוציא שורש ריבועי לשני צדי המשוואה, ונקבל: $x = 4$.

מצאנו כי אורך הניצב במשולש ABC שווה ל-4 ס"מ. מכיוון שאורכו של היתר במשולש ישר-זווית שווה-שוקיים גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב, הרי שאורך היתר במשולש שווה ל- $4\sqrt{2}$ ס"מ.
היתר AC מהווה את אורכי שני הקטרים במעגלים שבסרטוט.

היקף מעגל שווה למכפלת אורכו של קוטר המעגל ב-π, ומכאן שאם סכום אורכי הקטרים הוא $4\sqrt{2}$, אין זה חשוב כלל מה אורכו של כל אחד מהקטרים וניתן לקבוע כי סכום היקפי המעגלים שווה ל- $4\sqrt{2}\pi$.

הערה: מי שמבקש לוודא כי זה אכן המצב, מוזמן להניח, לשם הנוחות, כי הקטרים שווים זה לזה.

מכאן שאורך כל קוטר שווה ל- $2\sqrt{2}$ ס״מ $\left(=\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)$. אורכו של קוטר במעגל גדול פי 2 מאורך הרדיוס ומכאן שאורך כל רדיוס שווה ל- $\sqrt{2}$ $\left(=\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$. לפי הנוסחה לחישוב היקף מעגל, היקף מעגל שווה ל- $2\pi r$ ומכאן שהיקף כל מעגל שווה ל- $2\pi\cdot\sqrt{2}$. נתבקשנו למצוא את סכום היקפי המעגלים ומכאן שהיקפי שני המעגלים שווה ל- $2\cdot 2\pi\cdot\sqrt{2}$ ⇦ $4\sqrt{2}\pi$.

תשובה (4).

.13 **השאלה**: נתון: $5a+8b-5c=15$

$a+2b-c=5$

$c-a=?$

פתרון: לפנינו מערכת משוואות. מהשאלה ומהתבוננות בתשובות, ניתן לראות כי עלינו 'להיפטר' מ-b.
נוכל לעשות זאת באמצעות אחת משתי דרכים:
- בידוד b מאחת המשוואות והצבתו במשוואה השנייה או
- השוואת גודלו של b בשתי המשוואות (השוואת המקדם) וחיסור בין המשוואות.
נתבונן במשוואות הנתונות ונמצא כי הדרך השנייה עדיפה, מכיוון שכאשר נבודד את b מכל אחת מהמשוואות נקבל שבר – במשוואה הראשונה כדי לבודד את b נצטרך לחלק ב-8, ובמשוואה השנייה בכדי לבודד את b נצטרך לחלק ב-2. מכיוון שבידוד של b יוביל לקבלת שבר, נעדיף לחסר בין המשוואות על מנת שהחישובים האלגבריים יהיו פשוטים יותר.

כאמור, על מנת לחסר בין המשוואות בכדי שנוכל להיפטר מ-b יש להשוות את המקדם שלו בשתי המשוואות. לשם כך, נכפול ב-4 את המשוואה השנייה, ונקבל: $a+2b-c=5$ ⇦ $4a+8b-4c=20$.
כעת נחסר את המשוואה הראשונה מהמשוואה השנייה, ונקבל: $5a+8b-5c-(4a+8b-4c)=15-20$ ⇦ $5a+8b-5c-4a-8b+4c=-5$ ⇦ $a-c=-5$.
נכפול ב-1- את שני צדי המשוואה, ונקבל: $c-a=5$.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: לכל מספר שלם x הגדול מ-1 הוגדרה הפעולה $\$(x)$ כך:

$\$(x)$ = {המספר הראשוני הקטן ביותר ש-x מתחלק בו}

$$\$[\$(99)\cdot\$(2{,}000)]+\$(333)=?$$

פתרון: זו שאלת פעולות מומצאות. לפי סדר פעולות חשבון עלינו להתחיל מהסוגרים הפנימיים ביותר, ולכן נתחיל עם $\$(333)$. המספר הראשוני הקטן ביותר ש-333 מתחלק בו הוא 3, ולכן ערכו של $\$(333)$ הוא 3.

המספר הראשוני הקטן ביותר ש-99 מתחלק בו הוא 3, ולכן לפי הגדרת הפעולה המומצאת ערכו של $\$(99)$ אף הוא שווה ל-3.

המספר הראשוני הקטן ביותר ש-2,000 מתחלק בו הוא 2, ומכאן שערכו של $\$(2{,}000)$ הוא 2.

נציב את הערכים שקיבלנו בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $\$[\$(99)\cdot\$(2{,}000)]+\$(333)$ ⇦ $\$(3\cdot 2)+3$ ⇦ $\$(6)+3$.

המספר הראשוני הקטן ביותר ש-6 מתחלק בו הוא 2, ולכן ערכו של $\$(6)$ הוא 2.

נציב את התוצאה שקיבלנו בביטוי, ונקבל: $\$(6)+3$ ⇦ $2+3$ ⇦ 5.

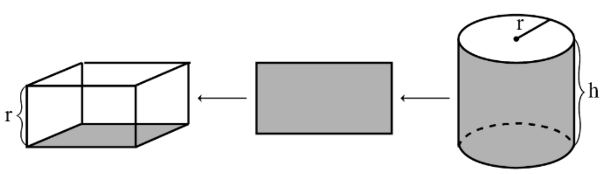
תשובה (3).

---

15. **השאלה**: פרסו את המעטפת של גליל אשר רדיוס בסיסו r וגובהו h.

על המלבן שנוצר כתוצאה מפריסת המעטפת נבנתה תיבה שגובהה r (ראו סרטוט).

$$\frac{\text{נפח הגליל}}{\text{נפח התיבה}}=?$$



פתרון: נחשב את נפחה של כל אחת מהצורות ולבסוף נמצא את היחס ביניהן:

<u>נפח הגליל</u>: לפי הנוסחה לחישוב נפח גליל, נפחו של גליל שווה לשטח הבסיס שלו כפול גובהו. שטח בסיס הגליל הוא מעגל, ולפי הנוסחה לחישוב שטח מעגל שטחו של מעגל שווה ל- πr^2. בנוסף, נתון כי גובה הגליל שווה ל-h ומכאן שנפחו שווה ל: $\pi r^2 h$.

<u>נפח התיבה</u>: נפח התיבה שווה לשטח בסיסה כפול הגובה שלה. בעוד שהגובה של התיבה נתון, יש למצוא את צלעות המלבן שבבסיס התיבה על מנת לחשב את שטח בסיסה. נתון כי שטח מעטפת הגליל שווה לשטח בסיס התיבה. שטח מעטפת שווה להיקף בסיס הצורה כפול גובה הצורה. היקף בסיס הגליל שווה להיקף מעגל, ומכאן שהוא שווה ל- $2\pi r$. כמו כן, ידוע כי גובה הגליל שווה ל-h ומכאן ששטח המעטפת של הגליל, וכך גם שטח בסיס התיבה, שווה ל: $2\pi r\cdot h$. כאמור, נפח תיבה שווה לשטח בסיסה כפול הגובה שלה. נתון כי גובה התיבה שווה ל-r, ומכאן שנפח התיבה שווה ל- $2\pi r\cdot h\cdot r$.

נציב את הנפחים שקיבלנו בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $\frac{\cancel{\pi}r^2\cancel{h}}{2\cancel{\pi}r\cdot\cancel{h}\cdot r}$ ⇦ $\frac{r^2}{2r^2}$ ⇦ $\frac{1}{2}$.

תשובה (2).

.16 **השאלה**: מנהל גן החיות מעוניין לסדר 4 חיות: שועל, תן, זאב וכבש ב-2 זוגות.

בכמה דרכים שונות ניתן לעשות זאת?

פתרון: ספירה ידנית:

זו שאלת צירופים ובה המספרים שבתשובות המוצעות קטנים ולכן כדאי לפתור אותה בעזרת ספירה ידנית. נרשום בצורה מסודרת את כל האפשרויות לסידור 4 החיות ב-2 זוגות:

1. שועל+תן זאב+כבש
2. שועל+זאב תן+כבש
3. שועל+כבש תן+זאב

מצאנו שיש 3 דרכים שונות לחלק את 4 החיות ב-2 זוגות.

תשובה (3).

.17 **השאלה**: נתון: $a^b < 0$

$0 < a \cdot b$

איזה מאי-השוויונים הבאים נכון **בהכרח**?

פתרון: הבנה אלגברית:

נתבונן על הנתון $a^b < 0$: המספר a בחזקה מסוימת קטן מ-0, ומכאן ש-a הוא בהכרח שלילי, שכן כאשר נעלה מספר חיובי בחזקה כלשהי נקבל תמיד תוצאה חיובית. כמו כן, כדי שמספר שלילי יישאר שלילי לאחר העלאתו בחזקה החזקה צריכה להיות אי-זוגית, ומכאן ש-b אי-זוגי (בשלב זה מבט בתשובות יבהיר לנו כי אין כל משמעות לשאלת הזוגיות של המשתנים).
כעת נתבונן על הנתון השני $0 < a \cdot b$: מכפלתם של שני מספרים חיובית. מצב כזה יתקיים כאשר שני המספרים חיוביים או כששניהם שליליים. מכיוון שמצאנו כי a שלילי נוכל להסיק כי גם b שלילי.
נסכם: מצאנו ש-a שלילי וש-b שלילי ואי-זוגי.

כעת נעבור על התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: $a - b < 0$. הפרש בין שני מספרים שליליים יכול להיות חיובי, שלילי או אפס: כך למשל, ייתכן כי $a - b = -3 - (-3)$ ואז ההפרש שווה ל-0, או ש: $a - b = -2 - (-3)$ ואז ההפרש שווה ל-1, או ש: $a - b = -3 - (-1)$ ואז ההפרש שווה ל-2-. מכיוון שלא ניתן לקבוע בוודאות שההפרש בין a לבין b שלילי, הרי שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < a - b$. בדומה להסבר לתשובה הקודמת, ראינו כי ההפרש בין a ל-b יכול להיות חיובי, שלילי או אפס ולכן לא ניתן לקבוע בוודאות כי ההפרש ביניהם חיובי. מכאן שהתשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $a + b < 0$. זו התשובה הנכונה, שכן סכומם של שני מספרים שליליים תמיד שלילי.

<u>תשובה (4)</u>: $0 < a + b$. כאמור, סכומם של שני מספרים שליליים הוא בוודאות שלילי ולכן התשובה נפסלת.

הערה: ניתן לפתור את השאלה גם באמצעות הצבת מספרים, אולם הדרך המומלצת לפתרון השאלה היא בעזרת חשיבה אלגברית.

תשובה (3).

---

18. **השאלה**: בכד ישנם שלושה סוגי כדורים: כדורים לבנים, כדורים אדומים וכדורים כחולים.
ההסתברות שיוגרל כדור אדום או כחול זהה להסתברות שיוגרל כדור לבן.

אם ההסתברות שיוגרל כדור כחול היא $\frac{1}{7}$,

מה ההסתברות שיוגרל כדור אדום?

פתרון: זו שאלת הסתברות. ידוע כי ההסתברות לקבל כדור כלשהו שווה ל-1, כלומר כאשר נגריל כדורים מהכד בוודאות נקבל כדור אדום, כחול או לבן. מכאן שההסתברות להגריל כדור אדום או כדור כחול או כדור לבן שווה ל-1.

ידוע כי ההסתברות שיוגרל כדור כחול היא $\frac{1}{7}$.

כדי למצוא את ההסתברות להגריל כדור אדום יש למצוא את ההסברות להגריל כדור לבן.
ידוע כי ההסתברות שיוגרל כדור אדום או כחול זהה להסתברות שיוגרל כדור לבן. מכיוון שסכום ההסתברויות שווה ל-1 ניתן להסיק שהסיכוי שיוגרל כדור לבן שווה ל- $\frac{1}{2}$ והסיכוי שיוגרל כדור כחול או אדום שווה גם היא ל- $\frac{1}{2}$.

כעת נמצא את הסיכוי להגריל כדור אדום:

לפי הנתון הסיכוי להגריל כדור כחול שווה ל- $\frac{1}{7}$ וכי הסיכוי להגריל כדור אדום או כחול שווה ל- $\frac{1}{2}$. נסמן את ההסתברות להגריל כדור אדום ב-x, ומכאן ש: $x+\frac{1}{7}=\frac{1}{2}$.

נחסר $\frac{1}{7}$ משני צדי המשוואה, ונקבל: $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}$.

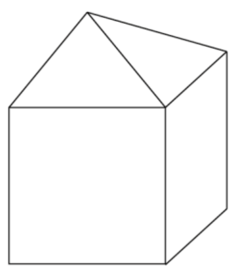
נימכנה משותף, נקבל: $x=\frac{7}{14}-\frac{2}{14}$ ⇦ $x=\frac{7-2}{14}$ ⇦ $x=\frac{5}{14}$.

תשובה (3).

---

19. **השאלה**: על קובייה שאורך מקצועה a ס״מ הונחה פירמידה ריבועית שגובהה $\frac{a}{3}$ ס״מ כבסרטוט.

מה נפח הצורה כולה (בסמ״ק)?



פתרון: נתבקשנו למצוא נפח של צורה תלת מימדית. הצורה שבסרטוט מורכבת משתי צורות תלת מימדית שלכל אחת נוסחה שונה לחישוב הנפח.
נחשב את נפחה של כל אחת מצורות בנפרד, ונסכום את הנפחים שנקבל.

<u>נפח הקובייה</u>: נפח קובייה שווה לאורך המקצוע שלה בשלישית. נתון כי מקצוע הקובייה שווה ל-a, ומכאן שנפחה שווה ל- a^3 סמ״ק.

<u>נפח הפירמידה</u>: נפח פירמידה שווה לשליש ממכפלת שטח בסיסה בגובהה. שטח בסיס הפירמידה זהה לשטח בסיס הקובייה שהוא למעשה ריבוע שאורך צלעו a. מכאן ששטח בסיס הפירמידה שווה ל- a^2.

נתון כי גובהה של הפירמידה שווה ל- $\frac{a}{3}$ ומכאן שנפחה שווה ל: $\frac{a^2\cdot\frac{a}{3}}{3}$ ⇦ $\frac{\frac{a^3}{3}}{3}$ ⇦ $\frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{3}$ ⇦ $\frac{a^3}{9}$.

מכאן שסכום נפחי שתי הצורות, הוא: $a^3+\frac{a^3}{9}$ ⇦ $\frac{9a^3+a^3}{9}$ ⇦ $\frac{10a^3}{9}$.

תשובה (2).

---

20. **השאלה**: במהלך כל שעה גדל מספר החיידקים שבצלחת פי x.
בסוף השעה הראשונה היו בתרבית x חיידקים.
בסוף השעה ה-x היה מספר החיידקים שבצלחת לראשונה מספר דו-ספרתי.

$x = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: 1. אם x שווה ל-1, הרי שבמהלך כל שעה גדל מספר החיידקים פי 1, כלומר נשאר זהה. לפי הנתון בסוף השעה הראשונה היו בתרבית x חיידקים, כלומר אם x שווה 1, הרי שהיה בתרבית חיידק אחד. מצאנו כי כאשר x שווה ל-1, מספר החיידקים בכל שעה נותר זהה לזה שהיה בסוף השעה הקודמת, הרי שזה יהיה מספר החיידקים בתרבית ימשיך להיות 1 בסוף כל אחת מהשעות, וכמובן שגם בסוף השעה ה-x, כלומר השעה ה-1 יהיה בתרבית חיידק אחד, כלומר לעולם לא יהיו בתרבית מספר דו-ספרתי של חיידקים. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 2. אם x שווה ל-2, הרי שבמהלך כל שעה גדל מספר החיידקים פי 2. נתון כי בסוף השעה הראשונה היו בתרבית x חיידקים, כלומר בסוף השעה הראשונה היו 2 חיידקים.
לפי הנתון בסוף השעה ה-x היה לראשונה מספר דו-ספרתי של חיידקים בתרבית, כלומר עלינו לבדוק האם מספר החיידקים בסוף השעה ה-2 היה דו-ספרתי.
אם בסוף השעה הראשונה היו בתרבית 2 חיידקים, ובכל שעה מספר החיידקים גדל פי 2, הרי שבסוף השעה השנייה יהיו בתרבית 4 חיידקים $(= 2 \cdot 2)$. מכיוון ש-4 אינו מספר דו-ספרתי, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (3)</u>: **3**. אם x שווה ל-3, הרי שבכל שעה גדל מספר החיידקים פי 3. נתון כי בסוף השעה הראשונה היו בתרבית x חיידקים, ומכאן שבסוף השעה הראשונה היו 3 חיידקים. נתון כי בסוף השעה ה-x היה לראשונה מספר דו-ספרתי של חיידקים בתרבית, כלומר עלינו לבדוק כמה חיידקים היו בתרבית בסוף השעה ה-3. בסוף השעה הראשונה היו בתרבית 3 חיידקים. אם בכל שעה גדל מספר החיידקים פי 3, הרי שבסוף השעה השנייה היו בתרבית 9 חיידקים $(= 3 \cdot 3)$, ובסוף השעה השלישית היו בתרבית 27 חיידקים $(= 9 \cdot 3)$.
מכיוון ש-27 הוא מספר דו-ספרתי, ואכן זו הפעם הראשונה שבה יש בתרבית מספר דו-ספרתי של חיידקים, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

נתון כי בשעה הראשונה היו בתרבית x חיידקים וכי מספר החיידקים בתרבית גדל פי x במהלך כל שעה.
אם מספר החיידקים גדל בכל שעה פי x, הרי שעל מנת למצוא את מספר החיידקים בכל שעה, ניתן לכפול את המספר ההתחלתי ב-x בכל שעה. מכאן שבסוף השעה השנייה יהיו בתרבית x^2 $(= x \cdot x)$ חיידקים, ובסוף השעה השלישית יהיו x^3 $(= x \cdot x \cdot x)$ חיידקים, וכך הלאה. כלומר, ניתן להגיע למסקנה, שבסוף השעה ה-x מספר החיידקים בתרבית שווה ל- x^x.
נשאלנו בסוף איזו שעה יהיה לראשונה מספר החיידקים בתרבית מספר דו-ספרתי, ומכאן שעלינו למצוא את המספר הקטן ביותר שבחזקת עצמו הוא מספר דו-ספרתי. בשלב זה ניתן גם להיעזר בתשובות.
3 הוא המספר הקטן ביותר אשר בחזקת עצמו, כלומר בחזקת 3, הוא מספר דו-ספרתי $\left(3^3 = 27\right)$.

תשובה (3).
