

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(4)	(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(4)	(3)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(1)	(3)	(1)	(3)	(2)	(1)	(4)	(4)	(4)

הסברים

הסקה מתרשים (שאלות 1-5)

עיינו היטב בתרשים ובטבלה שלפניכם וענו על חמש השאלות שלאחריו.

התרשים שלפניכם מתאר את ציונם של 25 ילדים בשני מבחנים במתמטיקה. הציונים הם בין 1 ל-10.

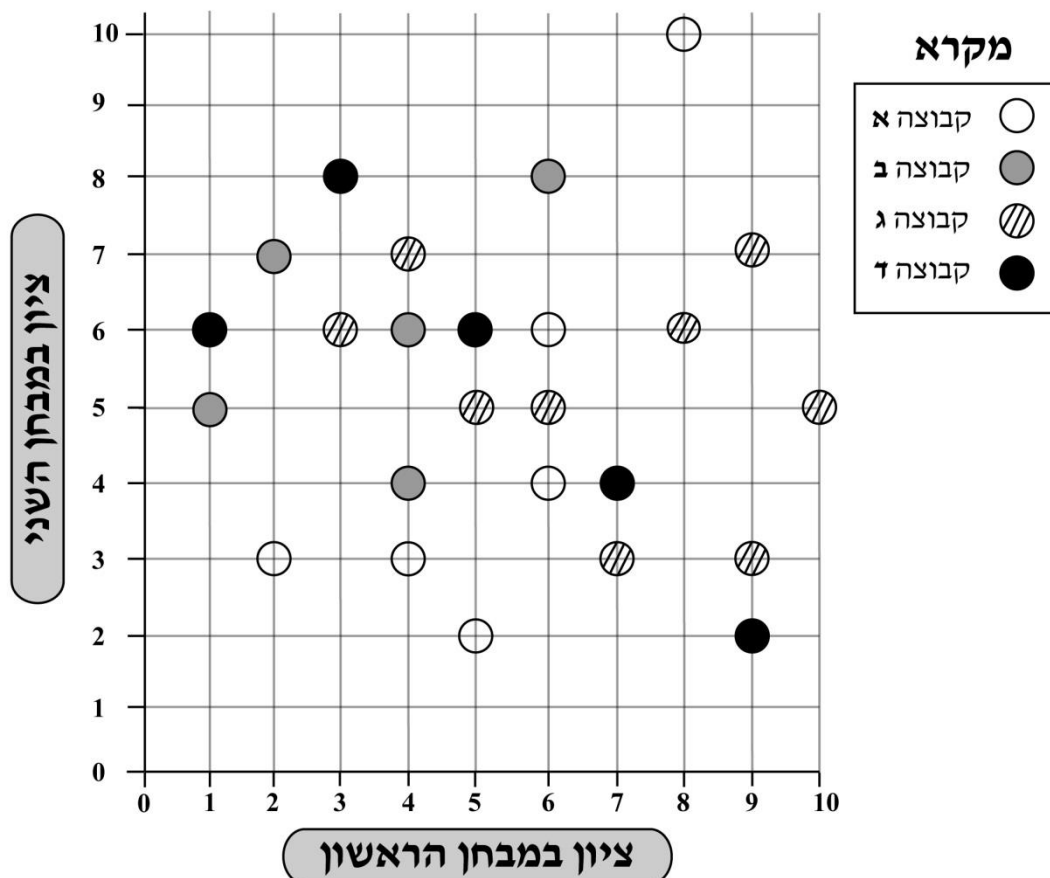
הילדים נחלקו ל-4 קבוצות המסומנות באותיות א, ב, ג ו-ד. הקבוצות אינן באותו הגודל.

כל אחד מהעיגולים מייצג ילד אחד. צבע העיגול מייצג את הקבוצה שהוא משתייך אליה (ראו מקרא).

מיקומו של העיגול ביחס לציר האופקי מייצג את הציון של הילד במבחן הראשון ומיקומו ביחס לציר האנכי מייצג

את ציונו של אותו ילד במבחן השני.

לדוגמה: אחד הילדים מקבוצה ד קיבל ציון 3 במבחן הראשון וציון 8 במבחן השני.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות

1. **השאלה:** מה מספר הילדים שסכום הציונים שהם קיבלו בשני המבחנים הוא בדיוק 10?

פתרון: על מנת שסכום הציונים בשני המבחנים של תלמיד מסוים יהיה בדיוק 10 התלמיד צריך לקבל בשני המבחנים את הציונים: 1 ו-9 או 2 ו-8 או 3 ו-7 או 4 ו-6 או 5 בשניהם, כאשר אין חשיבות לסוג המבחן בו יקבל התלמיד כל אחד מהציונים. נתבונן בתרשים ונחפש את התלמידים שהם בעלי צמדי הציונים. נתבונן בתרשים ונמצא כי יש 4 תלמידים כאלה:

תלמיד מקבוצה ב' אשר קיבל במבחן הראשון ציון 4 וציון 6 במבחן השני.
תלמיד מקבוצה ג' שקיבל ציון 5 בשני המבחנים.
תלמיד מקבוצה א' שקיבל ציון 6 במבחן הראשון, וציון 4 במבחן השני.
תלמיד מקבוצה ג' שקיבל ציון 7 במבחן הראשון וציון 3 במבחן השני.

תשובה (4).

2. **השאלה:** אחד הילדים קיבל את הציון הגבוה ביותר בקבוצתו במבחן הראשון ואת הציון הנמוך ביותר בקבוצתו במבחן השני.

לאיזו קבוצה משתיך ילד זה?

פתרון: נתבונן על כל התלמידים בכל אחת מן הקבוצות. ראשית נבדוק מי מהתלמידים קיבל את הציון הגבוה ביותר בקבוצתו במבחן הראשון, ולאחר מכן נבדוק אם אותו תלמיד קיבל גם את הציון הנמוך ביותר בקבוצתו במבחן השני.

כך למשל, אם נתבונן על חברי קבוצה א', התלמיד שקיבל את הציון הגבוה ביותר במבחן הראשון קיבל ציון של 8, אולם מכיוון שתלמיד זה קיבל גם את הציון הגבוה ביותר מבין חברי קבוצתו במבחן השני, זו אינה הקבוצה הנכונה.

בקבוצה ד' יש תלמיד אשר עונה על נתוני השאלה: במבחן הראשון הוא קיבל את הציון 9, שהוא הציון הגבוה ביותר בקבוצתו, ובמבחן השני -2 במבחן השני, שזהו הציון הנמוך ביותר בקבוצתו.

תשובה (4).

3. **השאלה:** מתוך ילדי קבוצה ד, מה אחוז הילדים שהציון שלהם במבחן הראשון גבוה מהציון שלהם במבחן השני?

פתרון: נמצא כמה ילדים בסך הכול בקבוצה ד', וכמה מהם קיבלו ציון גבוה יותר במבחן הראשון. בקבוצה ד' יש 5 ילדים ומתוכם 2 קיבלו ציון גבוה יותר במבחן הראשון: אחד מהם שקיבל 9 במבחן הראשון ו-2 במבחן השני, והשני שקיבל 7 במבחן הראשון ו-4 במבחן השני.

מכאן ש- $\frac{2}{5}$ מהילדים בקבוצה ד' קיבלו במבחן הראשון ציון גבוה יותר מהמבחן השני, המהווים 40%

$$\text{מכלל ילדי הקבוצה} \left(\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = \right)$$

תשובה (4).

4. **השאלה:** כמה ילדים קיבלו ציון 4 באחד המבחנים או בשניהם?

פתרון: נתבונן בתרשים במקום שבו מופיע הציון 4 בכל אחד מהצירים. כדי למצוא בקלות את מספר הילדים שקיבלו ציון זה נמתח קו אנכי מהציר האופקי וקו אופקי מהציר האנכי מהמקום שבו רשומה הספרה 4 ועד לקצה התרשים. מספר הילדים שקיבלו ציון זה הוא מספר הילדים שיהיו על שני הקווים. לאחר שנספור אותם נמצא ש-6 ילדים קיבלו 4 באחד המבחנים או בשניהם.

שימו לב כי אחד הילדים קיבל ציון של 4 בשני המבחנים, ולכן יש לספור אותו רק פעם אחת.

תשובה (2).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

5. **השאלה:** עבור כל ילד חושבה "מידת השיפור" – "הציון שקיבל במבחן השני פחות הציון שקיבל במבחן הראשון".

מידת השיפור הגדולה ביותר הייתה ____ . מידת שיפור זו התקבלה אצל ____ ילדים.

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות: ממבט בתשובות נראה כי מידת השיפור הגדולה ביותר היא 5 או 9. מכיוון שמידת השיפור הגדולה ביותר המוצעת בתשובות היא 9, נבדוק קודם אם מידת שיפור זו היא אכן הגדולה ביותר.

על מנת לקבל מידת שיפור השווה ל-9 יש למצוא תלמיד אחד לפחות שקיבל ציון 10 במבחן השני וציון של 1 במבחן הראשון. בתרשים אין אף תלמיד שקיבל 10 במבחן השני ו-1 במבחן הראשון ולכן ניתן לפסול את תשובות (2) ו-(4). מכאן שמידת השיפור הגדולה ביותר היא 5.

על מנת שנקבל מידת שיפור השווה ל-5 על התלמיד לקבל 10 במבחן השני ו-5 במבחן הראשון, או 9 במבחן השני ו-4 במבחן הראשון, או 8 במבחן השני ו-3 במבחן הראשון, או 7 במבחן השני ו-2 במבחן הראשון, או 6 במבחן השני ו-1 במבחן הראשון.

כאשר נתבונן בתרשים נמצא כי יש 3 תלמידים שקיבלו ציונים כאלה: תלמיד אחד מקבוצה ד' שקיבל 8 במבחן השני ו-3 במבחן הראשון, תלמיד אחד מקבוצה ב' שקיבל ציון 7 במבחן השני וציון 2 במבחן הראשון, ותלמיד אחד מקבוצה ד' שקיבל 6 במבחן השני ו-1 במבחן הראשון.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 6-20)

6. **השאלה:** נתון: $x - 1 + 2^x$ הוא מספר ראשוני.

x אינו יכול להיות –

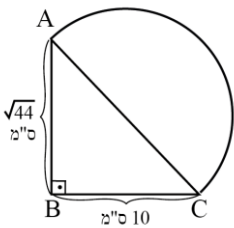
פתרון: בדיקת תשובות

תשובה (1): 1. נציב ש- $x = 1$ בביטוי הנתון, ונקבל: $1 - 1 + 2^1 = 2$. מכיוון שהמספר 2 הוא ראשוני, הרי ש- x יכול להיות שווה ל-1, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 2. נציב ש- $x = 2$ בביטוי הנתון, ונקבל: $2 - 2 + 2^2 = 2$. מכאן שניתן לפסול תשובה זו. ראשוני ולכן x יכול להיות שווה ל-2.

תשובה (3): 3. נציב ש- $x = 3$ בביטוי הנתון, ונקבל: $3 - 3 + 2^3 = 6$. המספר 6 אינו מספר ראשוני ולכן x לא יכול להיות שווה ל-3. מכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (3).



7. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם חצי מעגל שקוטרו AC.

ABC הוא משולש ישר-זווית.

על פי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, מה אורך הרדיוס של חצי המעגל (בס"מ)?

פתרון: AC הוא קוטר במחצית המעגל שבסרטוט. כמו כן, AC הוא יתר במשולש ישר הזווית ABC. מכאן שעל מנת למצוא את אורכו של הרדיוס חצי המעגל יש למצוא את קוטרו, שאותו נוכל למצוא בעזרת משפט פיתגורס.

$$144 = AC^2 \Leftrightarrow 44 + 100 = AC^2 \Leftrightarrow (\sqrt{44})^2 + 10^2 = AC^2$$

נוציא שורש ריבועי משני צדי המשוואה, ונקבל: $AC = 12 \Leftrightarrow 144 = AC^2$.

מצאנו כי אורכו של AC שהוא קוטר המעגל שווה ל-12 ס"מ, ומכאן שאורך הרדיוס שווה ל-6 ס"מ

$$\left(\frac{12}{2} = \right)$$

תשובה (2).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

8.

השאלה: x הוא מספר שלם גדול מ-1.

$$y = \frac{x!}{(x-1)!}$$

y בהכרח -

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

$$\text{נציב ש-} x = 2, \text{ ונקבל: } y = \frac{2!}{(2-1)!} \Leftrightarrow y = \frac{2!}{1!} \Leftrightarrow y = \frac{1 \cdot 2}{1} \Leftrightarrow y = 2$$

כעת נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): מתחלק ב-2. קיבלנו ש- $y = 2$ שהוא מספר שאכן מתחלק ב-2, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

תשובה (2): גדול מ- x . כאשר הצבנו ש- $x = 2$, קיבלנו ש- $y = 2$. מכאן ש- y אינו גדול מ- x אלא שווה לו, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): מתחלק ב-5. קיבלנו ש- $y = 2$ ומכאן ש- y אינו מתחלק ב-5, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): שווה ל- x . קיבלנו ש- $y = 2$ כאשר הצבנו ש- $x = 2$, ומכאן ש- y אכן שווה ל- x . לכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

$$\Leftrightarrow y = \frac{3!}{(3-1)!} \text{ ונקבל: } x = 3, \text{ כעת נציב כי } x = 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \Leftrightarrow y = 3$$

כעת נעבור רק על התשובות שעוד לא פסלנו:

תשובה (1): מתחלק ב-2. קיבלנו ש- $y = 3$ ומכאן ש- y אינו מתחלק ב-2. לכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): שווה ל- x . קיבלנו ש- $y = 3$ כאשר הצבנו ש- $x = 3$, ומכאן ש- y אכן שווה ל- x . לכן התשובה מתאימה.

מכיוון שפסלנו שלוש תשובות ניתן לקבוע כי תשובה (4) היא התשובה הנכונה.

דרך ב': הבנה אלגברית

משמעות הסימן עצרת היא מכפלת כל המספרים השלמים מ-1 ועד למספר עליו מתבצעת הפעולה. כך

$$\text{למשל, } 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \text{ . מכאן ש: } y = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x-1) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x-1)}$$

$x!$ לבין תוצאת הפעולה $(x-1)!$ הוא שבפעולה $x!$ נכפול גם ב- x .

מכאן שלאחר צמצום נקבל ש: $y = x$.

תשובה (4).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

9. השאלה: מנוע המכונית של משה שוקל 550 ק"ג ומשקלו של משה הוא $\frac{1}{5}$ ממשקל המנוע.

משקלו של אור קטן ב-25 ק"ג ממשקלו של משה.
משקל מנוע מכוניתו של אור הוא פי 4 ממשקל גופו.

מה משקל מנוע מכוניתו של אור (בק"ג)?

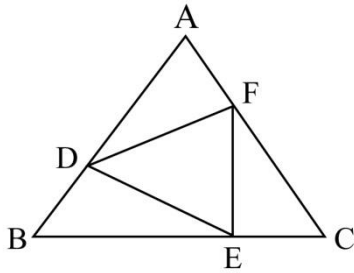
פתרון: נמצא את משקליהם של משה ואור על פי נתוני השאלה.

נתון כי משקלו של משה הוא $\frac{1}{5}$ ממשקל המנוע של מכוניתו, אשר לפי הנתונים שוקל 550 ק"ג.

$$\text{מכאן שמשקלו של משה הוא } 110 \text{ ק"ג } \left(550 \cdot \frac{1}{5} = \right)$$

ידוע כי משקלו של אור קטן ב-25 ק"ג ממשקלו של משה, ומכאן שמשקלו של אור הוא 85 ק"ג
($110 - 25 =$). משקל מנוע מכוניתו של אור גדול פי 4 ממשקלו, ומכאן שמשקלו של המנוע במכוניתו
שווה ל-340 ק"ג ($85 \cdot 4 =$).

תשובה (3).



10. השאלה: בסרטוט שלפניכם משולשים שווים צלעות ABC ו-DEF.

נתון $AB = 3$ ס"מ, $DB = 1$ ס"מ.

מה אורך הצלע DE (בס"מ)?

פתרון: נתון כי אורכה של צלע במשולש ABC שווה ל-3 ס"מ וכי
אורכה של הצלע BD שווה ל-1 ס"מ. מכאן שאורכה של הצלע
AD הוא 2 ס"מ ($3 - 1 =$). למעשה מצאנו כי הנקודה D

מחלקת את הצלע AB ביחס של 1:2.

ידוע כי המשולשים ABC ו-DEF הם משולשים שווים צלעות, ומכאן נוכל להסיק משיקולי סימטריה
שגם הנקודות F ו-E מחלקות את הצלעות המשולש ABC ביחס של 1:2. כלומר: $AF = EC = 1$ ו-
 $FC = BE = 2$

נתבונן על משולש BDE:

במשולש זה $DB = 1$ ו- $BE = 2$. בנוסף, מכיוון שמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות הרי ש-
 $\angle DBE = 60^\circ$. אם יש משולש אשר אחת מצלעותיו גדולה פי 2 מצלע אחרת, והזווית שמול הצלע
השלישית היא בת 60° , הרי שבהכרח משולש זה הוא משולש זזהב כאשר $\angle BDE = 90^\circ$ ו-
 $\angle DEB = 30^\circ$.

הניצב הגדול במשולש זה גדול פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן, ומכאן שהצלע DE, שהיא הניצב הגדול במשולש
BDE, שווה ל- $\sqrt{3}$ ס"מ ($1 \cdot \sqrt{3} =$).

תשובה (4).

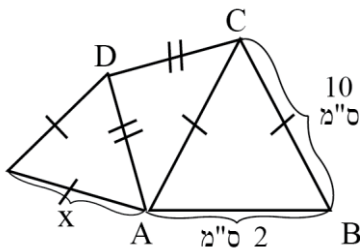
סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

11. השאלה: בכיתה 40 ילדים: שחורי-שיער, בלונדינים וגינגיים. כל אחד מהם עוסק באחד משני ענפי ספורט: טניס או כדורסל. 20 ילדים משחקים טניס ו-20 ילדים משחקים כדורסל. בכיתה 10 גינגיים, מהם 8 משחקים טניס. 15 בלונדינים משחקים כדורסל ו-5 שחורי שיער משחקים טניס.

כמה ילדים שחורי-שיער יש בסך הכול בכיתה?

פתרון: עלינו למצוא את סך כול התלמידים שחורי השיער בכיתה, ידוע כי כל אחד מהתלמידים משחק או טניס או כדורסל. מכיוון שלפי הנתון יש 5 שחורי שיער שמשחקים טניס, הרי שבשביל למצוא את סך כול שחורי השיער בכיתה יש למצוא את מספר שחורי השיער שמשחקים כדורסל. לפי הנתונים 20 ילדים משחקים טניס ו-20 ילדים משחקים כדורסל. ידוע כי בכיתה יש 10 גינגיים שמהם 8 משחקים טניס, ומכאן שבכיתה יש 2 גינגיים שמשחקים כדורסל ($10 - 8 =$). בנוסף, נתון כי יש בכיתה 15 בלונדינים אשר משחקים כדורסל. מצאנו כי יש 17 תלמידים גינגיים ובלונדינים שמשחקים כדורסל ($2 + 15 =$). נתון כי בסך הכול יש 20 תלמידים אשר משחקים כדורסל, ומכאן שבהכרח יש 3 שחורי שיער שמשחקים כדורסל ($20 - 17 =$). לסיכום: 5 ילדים שחורי שיער משחקים טניס, ו-3 תלמידים שחורי שיער משחקים כדורסל, ומכאן שיש בסך הכול 8 ילדים שחורי שיער בכיתה ($5 + 3 =$).

תשובה (1).



12. השאלה: בסרטוט שלפניכם שלושה משולשים שווים-שוקיים ($EA = ED, DA = DC, CA = CB$).

לשלושת המשולשים היקפים שווים.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$$x = ?$$

פתרון: נתון כי משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים

($CA = CB$). לפי נתוני הסרטוט אורכה של הצלע BC הוא 10 ס"מ, ומכאן שגם AC שווה ל-10 ס"מ.

לפי נתוני הסרטוט אורכה של AB הוא 2 ס"מ, ולפיכך היקף משולש ABC שווה ל-22 ס"מ ($10 + 10 + 2 =$). ידוע כי היקפי שלושת המשולשים שבסרטוט שווים זה לזה, ולכן היקפי כל המשולשים

שבסרטוט שווים ל-22 ס"מ.

נתבונן על משולש ADC:

מצאנו כי אורכה של הצלע AC שווה ל-10 ס"מ, וכי היקף המשולש שווה ל-22 ס"מ.

מכאן שסכום הצלעות AD ו-DC שווה ל-12 ס"מ ($22 - 10 =$).

מכיוון שלפי נתוני הסרטוט, הצלעות AD ו-DC שוות זו לזו, הרי שאורך כל אחת מהן הוא 6 ס"מ ($\frac{12}{2} =$).

נתבונן על המשולש השמאלי הקיצוני שבסרטוט:

מצאנו שאורכה של הצלע AD שווה ל-6 ס"מ, ולפי הנתונים מצאנו כי היקף כל משולש שווה ל-22 ס"מ,

ומכאן שסכום אורכי שתי הצלעות האחרות במשולש שווה ל-16 ס"מ ($22 - 6 =$).

שתי הצלעות האחרות במשולש שוות זו לזו ושוות ל-x ומכאן ש-x = 8 ($\frac{16}{2} =$).

תשובה (1).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

13. **השאלה:** המספר 0.05 הוא x אחוזים מ-2.

$$x = ?$$

פתרון: ריבוע יחסים

נתון כי המספר 0.05 מהווה x אחוזים מתוך 2. מכאן שהמספר 2 הוא השלם, ולכן הוא שווה ל-100%.
נשתמש בריבוע יחסים על מנת למצוא את x:

מספר	אחוז
2	100%
0.05	x

היחס בכל שורה שווה זה לזה ולכן נוכל לבנות את המשוואה: $\frac{2}{100} = \frac{0.05}{x}$
נכפול את שני צדי המשוואה ב-100x, ונקבל: $2x = 0.05 \cdot 100$ $\Leftrightarrow 2x = 5$
נחלק את שני צדי המשוואה ב-2, ונקבל: $x = 2.5$.

תשובה (3).

14. **השאלה:** $\frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} = ?$ (x ≠ ±1)

פתרון: זרז א': הצבת דוגמה מספרית

נציב ש-2, x = 2, ונקבל: $\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+1}}{\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2+1}}$

נחבר את השברים במונה ובמכנה באמצעות מכנה משותף, ונקבל: $\frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3+1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3}}$

קעת נעבור על התשובות המוצעות, ונפסול כל תשובה אשר ערכה שונה מ-2:

תשובה (1): x. הצבנו ש-2, x = 2. תוצאת הביטוי שהתקבל שווה גם היא ל-2, ומכאן שבשלב זה לא ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): x² - 1. נציב ש-2, x = 2, ונקבל: $2^2 - 1 \Leftrightarrow 4 - 1 \Leftrightarrow 3$. מכיוון שתוצאה זו שונה מערכו של הביטוי, הרי שניתן לפסול אותה.

תשובה (3): 3. מכיוון שמצאנו כי ערכו של הביטוי הוא 2, הרי שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): $\frac{x+1}{x-1}$. נציב ש-2, x = 2, ונקבל: $\frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{2+1}{2-1} \Leftrightarrow 3$. מכיוון שתוצאה זו אינה שווה לערכו של הביטוי, הרי שהתשובה אינה מתאימה וניתן לפסול אותה.

פסלנו שלוש תשובות ולכן ניתן לקבוע כי תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

דרך ב': פישוט אלגברי

נפשט את הביטוי באמצעות יצירת מכנה משותף $(x+1)(x-1)$ במונה ובמכנה של השבר, ונקבל:

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2}{(x+1)(x-1)}} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1-x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{2x}{2} \Leftrightarrow x$$

תשובה (1).

15. השאלה: עידן ואלון מלקטים יחד אפונים למרק, שלהכנתו דרושים 150 אפונים. עידן מלקטת 45 אפונים בשעה ואלון מלקט 80 אפונים בשעה.

כמה דקות יידרשו לשניהם יחדיו לליקוט 150 האפונים הדרושים למרק?

פתרון: ריבוע יחסים

עידן ואלון מלקטים יחד אפונים. מכיוון שנתבקשנו למצוא את הזמן הנדרש להם לליקוט 150 אפונים יחדיו, הרי שעלינו למצוא מה ההספק המשותף שלהם.

נתון כי עידן מלקטת 45 אפונים בשעה וכי אלון מלקט 80 אפונים בשעה. מכאן שביחד הם מלקטים 125 אפונים בשעה ($45 + 80 =$). נשאלנו מה הזמן הנדרש בדקות, ולכן נרשום כי הם אוספים יחדיו 125 אפונים ב-60 דקות.

על מנת להכין את המרק דרושים 150 אפונים. נסמן ב- x את מספר הדקות שיידרשו לעידן ולאלון ללקט 150 אפונים, ונשתמש בריבוע יחסים על מנת למצוא זמן זה:

מספר אפונים	דקות
125	60
150	x

היחס בכל שורה שווה זה לזה ולכן נוכל ליצור את המשוואה: $\frac{12}{25} = \frac{x}{150} \Leftrightarrow \frac{60}{125} = \frac{x}{150}$

נכפול ב-150 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $x = \frac{60 \cdot 150}{125} \Leftrightarrow x = \frac{60 \cdot 6}{5} \Leftrightarrow x = 72$

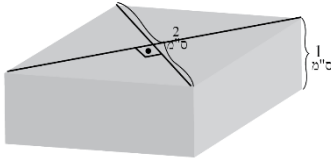
מצאנו שלעידן ולאלון ייקח 72 דקות על מנת ללקט יחד 150 אפונים.

תשובה (3).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

16.

השאלה: בתיבה שלפניכם מסורטטים אלכסוני אחת הפיאות.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט, מה נפח התיבה (בסמ"ק)?

פתרון: נפח תיבה שווה לשטח בסיסה כפול גובהה. גובה התיבה נתון ולכן על מנת למצוא את נפח התיבה יש למצוא את שטח בסיסה.

שטח בסיס תיבה יכול להיות ריבוע או מלבן. בתיבה שבסרטוט האלכסונים של בסיס התיבה מאונכים זה לזה ועל כן בסיס התיבה הוא בהכרח ריבוע. בריבוע האלכסונים שווים זה לזה ומכאן ששני אלכסוני בסיס התיבה שווים ל-2 ס"מ.

שטח ריבוע שווה למחצית מכפלת אלכסוניו, ומכאן שטח בסיס התיבה שווה ל-2 סמ"ר $\left(\frac{2 \cdot 2}{2} = \right)$.

מצאנו ששטח בסיס התיבה שווה ל-2 סמ"ר, וידוע כי גובה התיבה שווה ל-1, ומכאן שנפח התיבה שווה ל-2 סמ"ק $(2 \cdot 1 =)$.

תשובה (2).

17.

השאלה: ממוצע הציונים של שובל ושיר גבוה ב-12 נקודות מציונו של אור.

בכמה נקודות גבוה ממוצע הציונים של שובל, שיר ואור מציונו של אור?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שלא נתון מה ציונם של כל אחד מהילדים, נציב כי ציונו של אור הוא 10. נתון כי ממוצע הציונים של שובל ושיר גבוה ב-12 נקודות מציונו של אור, ומכאן שממוצע הציונים של שובל ושיר הוא $22 (= 10 + 12)$.

לפי נוסחת הממוצע, ממוצע ציוניהם של שובל ושיר שווה ל: $\frac{\text{סכום הציונים של שובל ושיר}}{2}$.

מצאנו כי ממוצע ציוניהם של שובל ושיר הוא 22 ומכאן שסכום ציוניהם הוא $44 (= 22 \cdot 2)$.

לפי נוסחת הממוצע, ממוצע ציוניהם של שובל, שיר ואור הוא סכום ציוניהם של כל השלושה חלקי 3. מכיוון שסכום ציוניהם של שובל ושיר הוא 44, והצבנו כי ציונו של אור הוא 10, ומכאן שממוצע

ציוניהם של כל השלושה הוא $18 \left(= \frac{44 + 10}{3} = \frac{54}{3} \right)$.

מכיוון שממוצע ציוניהם של השלושה הוא 18 גבוה ב-8 נקודות מציונו של אור $(18 - 10 =)$.

דרך ב': פישוט אלגברי

נסמן את הציון של אור ב-x, את הציון של שובל ב-y ואת הציון של שיר ב-z.

נתון כי ממוצע הציונים של שובל ושיר גבוה ב-12 נקודות מהציון של אור. מכאן ש: $\frac{y+z}{2} = 12 + x$.

נכפול ב-2 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $y + z = 24 + 2x$. כלומר, מצאנו כי סכום הציונים של שובל ושיר שווה ל- $24 + 2x$.

ממוצע הציונים של שובל, שיר ואור הוא: $\frac{x + y + z}{3}$.

עלינו למצוא בכמה גבוה ממוצע הציונים של שובל, שיר ואור מהציון של אור ולכן בביטוי שהתקבל עבור הממוצע של השלושה נחליף את סכום הציונים של שובל ושיר בביטוי שמצאנו לעיל, ונקבל:

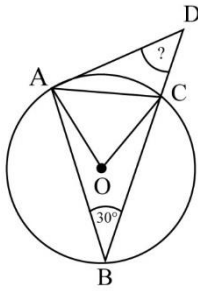
$$.8 + x \leftarrow \frac{3 \cdot (8 + x)}{3} \leftarrow \frac{24 + 3x}{3} \leftarrow \frac{24 + 2x + x}{3}$$

מצאנו כי ממוצע הציונים של שובל, שיר ואור גבוה ב-8 נקודות מציונו של אור.

תשובה (1).

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

18. השאלה: בסרטוט שלפניכם A, B ו-C נקודות על היקף המעגל שמרכזו בנקודה O.



D נקודה על המשך הקטע BC.

נתון: $AB = BC$;

AD משיק למעגל בנקודה A.

על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,

$\angle ADC = ?$

פתרון: נתבונן במשולש ABC :

ידוע כי במשולש זה $\angle ABC = 30^\circ$. במשולש סכום הזווית שווה ל- 180°

ומכאן שסכומן של הזוויות $\angle ACB$ ו- $\angle CAB$ הוא 150°

($180^\circ - 30^\circ =$) בנוסף נתון כי $AB = BC$. במשולש שווה-שוקיים זווית הבסיס שוות זו לזו ומכאן

$$\text{ש: } \left(\frac{150^\circ}{2} = \right) \angle ACB = \angle CAB = 75^\circ$$

כעת נתבונן על המעגל:

הזווית $\angle ABC$ היא זווית היקפית במעגל הנשענת על הקשת הקטנה AC. הזווית $\angle AOC$ היא זווית

מרכזית במעגל הנשענת על אותה הקשת. במעגל זווית מרכזית גדולה פי 2 מזווית היקפית הנשענת על

אותה קשת, ומכאן ש- $\angle AOC = 60^\circ$ ($30^\circ \cdot 2 =$).

נתבונן על משולש AOC:

במשולש זה מצאנו שהזווית $\angle AOC$ שווה ל- 60° . כמו כן, במשולש זה הצלעות AO ו-AC הן רדיוסים

במעגל, ומכאן שמשולש זה הוא משולש שווה-שוקיים. משולש שווה-שוקיים בו אחת מהזוויות

שווה ל- 60° הוא משולש שווה-צלעות (שכן, על פי סכום הזווית נקבל ששתי הזוויות האחרות שוות גם הן

ל- 60°). מכאן ש: $\angle OAC = \angle OCA = 60^\circ$.

AD הוא משיק למעגל. במעגל, רדיוס למשיק מאונך לו ולכן $\angle OAD = 90^\circ$. מצאנו ש-

$\angle OAC = 60^\circ$ ומכאן ש- $\angle CAD = 30^\circ$ ($90^\circ - 60^\circ =$).

נתבונן במשולש ACD:

במשולש זה זווית $\angle ACB$ היא זווית חיצונית למשולש, כאשר שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

הן זוויות $\angle CAD$ ו- $\angle ADC$. ידוע כי במשולש זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות

שאינן צמודות לה. מצאנו ש- $\angle CAD = 30^\circ$ ו- $\angle ACB = 75^\circ$, ומכאן ש: $30^\circ + \angle ADC = 75^\circ$.

נחסר 30° משני צדי המשוואה, ונקבל: $\angle ADC = 45^\circ$.

תשובה (4).

19. השאלה: נתון: $0 < x, y$.

$$- x^y + y^x + 3y + 1 \text{ הוא בהכרח זוגי כאשר מתקיים} -$$

פתרון: בדיקת תשובות

נעבור על התשובות המוצעות ונבדוק האם הביטוי הנתון זוגי בהכרח בהינתן כל אחת מן התשובות:

תשובה (1): x, y זוגיים.

כאשר מעלים מספרים שלמים בחזקות שלמות החזקה אינה משנה את 'סימנו' של המספר, ולכן כאשר נעלה מספר זוגי בחזקה שלמה התוצאה תהיה זוגית. אם x ו- y זוגיים, הרי שגם תוצאת הביטויים x^y ו- y^x היא

זוגית. סכום של שני מספרים זוגיים היא זוגית, ועל כן תוצאת החיבור $x^y + y^x$ זוגית.

בנוסף, תוצאת המכפלה של מספר זוגי בכל מספר היא זוגית, ומכאן שאם y זוגי, הרי שהביטוי $3y$ אף הוא

זוגי. מצאנו כי הסכום $x^y + y^x + 3y$ זוגי, מכאן שגם תוצאת החיבור $x^y + y^x + 3y$ זוגית.

כאשר נוסיף את המספר 1 שהוא מספר אי-זוגי, לביטוי הזוגי נקבל תוצאה אי-זוגית. מצאנו כי כאשר x ו- y זוגיים תוצאת הביטוי בהכרח אי-זוגית.

תשובה (2): $x = y$.

מצאנו כי כאשר x ו- y זוגיים, תוצאת הביטוי הנתון היא אי-זוגית. מכאן, בהינתן ש- x ו- y שווים זה לזה ושניהם זוגיים הרי שהביטוי בהכרח אינו זוגי. מכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): x זוגי ו- y אי-זוגי.

כאשר מעלים מספר זוגי בחזקה שלמה, התוצאה היא זוגית. ולכן כאשר x זוגי ו- y אי-זוגי, הביטוי x^y זוגי. כאשר מעלים מספר אי-זוגי בחזקה שלמה התוצאה היא אי-זוגית, ומכאן שהביטוי y^x אי-זוגי.

מצאנו כי הביטוי x^y זוגי וכי הביטוי y^x אי-זוגי, ועל כן הסכום $x^y + y^x$ הוא אי-זוגי.

כאשר כופלים שני מספרים אי-זוגיים, התוצאה היא אי-זוגית, ומכאן שאם y אי-זוגי, הרי שהביטוי $3y$ הוא אי-זוגי.

סכום של שני מספרים אי-זוגיים הוא זוגי. מצאנו כי הסכום $x^y + y^x$ הוא אי-זוגי, וכי הביטוי $3y$ הוא גם אי-זוגי, ועל כן הסכום $x^y + y^x + 3y$ הוא זוגי.

כאשר נוסיף 1 שהוא מספר אי-זוגי לתוצאה של הביטוי הזוגי $x^y + y^x + 3y$, נקבל תוצאה אי-זוגית.

מצאנו כי הביטוי $x^y + y^x + 3y + 1$ הוא אי-זוגי, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): x אי-זוגי ו- y זוגי.

כאשר מעלים מספר אי-זוגי בחזקה שלמה התוצאה היא אי-זוגית. ולכן כאשר x אי-זוגי ו- y זוגי, הביטוי x^y הוא אי-זוגי. כאשר מעלים מספר זוגי בחזקה שלמה התוצאה היא זוגית, ומכאן שהביטוי y^x הוא זוגי.

תוצאת החיבור של מספר זוגי ומספר אי-זוגי היא אי-זוגית. מצאנו כי הביטוי x^y אי-זוגי והביטוי y^x זוגי, ועל כן הסכום $x^y + y^x$ הוא אי-זוגי. תוצאת המכפלה של מספר זוגי בכל מספר היא זוגית, ומכאן שאם y זוגי הביטוי $3y$ זוגי אף הוא.

מצאנו כי הביטוי $x^y + y^x$ הוא אי-זוגי וכי הביטוי $3y$ זוגי, ועל כן הביטוי $x^y + y^x + 3y$ הוא אי-זוגי.

כאשר מוסיפים לביטוי אי-זוגי את המספר 1, שהוא מספר אי-זוגי, התוצאה שתקבל תהיה זוגית.

הביטוי $x^y + y^x + 3y$ הוא אי-זוגי, ועל כן הביטוי $x^y + y^x + 3y + 1$ הוא בהכרח זוגי. זו התשובה הנכונה.

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

דרדב' : הצבת דוגמה מספרית

נציב מספרים על מנת למצוא באיזה מצב הביטוי זוגי. נציב למשל כי $x = 2$ ו- $y = 2$ ונקבל:
 $x^y + y^x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 4 + 4 + 4 + 1 \Leftrightarrow 13$. הצבנו שני מספרים זוגיים השווים זה לזה, וקיבלנו כי תוצאת הביטוי היא אי-זוגית, ומכאן שפסלנו את תשובות (1) ו-(2).

ניתן למצוא כי זו אינה התשובה הנכונה גם כאשר נציב שני מספרים זוגיים עבור x ו- y . למשל, ניתן להציב כי $x = y = 2$ כך שנקבל: $x^y + y^x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2^2 + 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 4 + 4 + 6 + 1 \Leftrightarrow 15$. התקבלה תוצאה אי-זוגית ועל כן ניתן לקבוע כי הביטוי הנתון אינו זוגי בהכרח כאשר x ו- y זוגיים.

כעת נציב מספרים לבדיקת תשובה (3), כלומר האם הביטוי זוגי, כאשר x זוגי ו- y אי-זוגי. נציב למשל, כי $x = 2$ ו- $y = 1$, ונקבל: $x^y + y^x + 3y + 1 \Leftrightarrow 2^1 + 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow 2 + 1 + 3 + 1 \Leftrightarrow 7$.

מכיוון שקיבלנו ביטוי שאינו זוגי, הרי שניתן לפסול את תשובה (3) ולקבוע כי תשובה (4) היא התשובה הנכונה. לשם השלמת ההסבר נציב מספרים על מנת לבדוק תשובה זו. לפי תשובה (4), x הוא מספר אי-זוגי ו- y מספר זוגי. נציב למשל כי $x = 1$ ו- $y = 2$, ונקבל:

$$x^y + y^x + 3y + 1 \Leftrightarrow 1^2 + 2^1 + 3 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow 1 + 2 + 6 + 1 \Leftrightarrow 10$$

קיבלנו תוצאה זוגית, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

20. השאלה: לכל מספר שלם וחיובי n הוגדרה הפעולה $\$(n)$ כך:

$$\$(n) = n \text{ ועד } 1 \text{ שלמים מספרים השלמים מ-} 1$$

$$\$(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ למשל:}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

ראשית, נבדוק מה ערכו של $\$(n)$ במספר מצבים, על מנת שנוכל לבחון את הנטען בתשובות.

$$\text{כאשר } n = 1, \text{ הרי שלפי ההגדרה } \$(1) \text{ שווה ל-} [\$(1) = 1]$$

$$\text{כאשר } n = 2, \text{ הרי שלפי ההגדרה } \$(2) \text{ שווה ל-} [\$(2) = 1 + 2]$$

$$\text{כאשר } n = 3, \text{ הרי שלפי ההגדרה } \$(3) \text{ שווה ל-} [\$(3) = 1 + 2 + 3]$$

כעת נעבור לבחון את התשובות המוצעות בהתאם לדוגמאות והנתון:

תשובה (1): אם $\$(n)$ אי-זוגי אזי n זוגי. מצאנו כי גם כאשר $n = 1$ וגם כאשר $n = 2$, תוצאת הפעולה $\$(n)$ היא אי-זוגית, ומכאן שהטענה כי כאשר $\$(n)$ אי-זוגי אז n זוגי אינה נכונה.

תשובה (2): אם n זוגי אזי $\$(n)$ זוגי. מצאנו כי כאשר $n = 2$ שווה ל-3, ומכאן שאין זה נכון לטעון כי כאשר n זוגי אז $\$(n)$ זוגי, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): אם $[\$(n+1) - \$(n)]$ זוגי אזי n זוגי. נציב למשל ש- $n = 1$. כאשר $n = 1$ הביטוי שווה ל:

$$[\$(1+1) - \$(1)] \Leftrightarrow [\$(2) - \$(1)]$$

$$\text{שווה ל: } [(1+2) - (1)] \Leftrightarrow 3 - 1 \Leftrightarrow 2$$

מכיוון שמצאנו שכאשר $[\$(n+1) - \$(n)]$ זוגי, n יכול להיות מספר אי-זוגי, הרי שהתשובה אינה נכונה.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לקבוע כי תשובה (4) היא התשובה הנכונה.

הצבה מתאימה לפסילת תשובות, אך אינה יכולה לשמש כהוכחה של ממש של הטענה בתשובה (4), ולכן נפשט באופן אלגברי את התשובה להסביר

סימולציה 7 הסברים לפרק 2 חשיבה כמותית

תשובה (4): אם n זוגי אזי $[(n+1) - (n)]$ הוא אי-זוגי.

נפשט את הביטוי $[(n+1) - (n)]$, ונקבל: $[1+2+3+\dots+n+(n+1) - (1+2+3+\dots+n)]$

$\Leftrightarrow [1+2+3+\dots+n+(n+1) - 1 - 2 - 3 - \dots - n] \Leftrightarrow [n+1]$

מצאנו כי למעשה הטענה היא: אם n זוגי אזי $[n+1]$ הוא אי-זוגי.

מכיוון שטענה זו בהכרח נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).
