

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(1)	(2)	(2)	(1)	(3)	(3)	(4)	(3)	(3)	(3)	תשובה

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	שאלה
(2)	(4)	(4)	(4)	(3)	(4)	(4)	(4)	(3)	(2)	תשובה

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-4)

1. **השאלה:** יוסף מכין מיץ מתפוזים טריים. מכל תפוז שהוא סוחט הוא מפיק 0.25 ליטר מיץ.

כמה תפוזים בסך הכול, צריך יוסף כדי להכין 15 ליטר מיץ?

פתרון: ריבוע יחסים

בשאלה נתונה כמות המיץ שניתן להפיק מכל תפוז, כלומר נתון היחס בין כמות התפוזים לכמות המיץ הנסחטת מהם. על כן נוכל להשתמש בריבוע יחסים על מנת למצוא את כמות התפוזים הדרושה להכנת 15 ליטרים מיץ. ידוע כי יוסף מפיק מתפוז אחד 0.25 ליטר מיץ. נסמן ב-x את כמות התפוזים הדרושה עבור 15 ליטר מיץ ונבנה את ריבוע היחסים הבא:

מיץ (ליטרים)	מספר תפוזים
0.25	1
15	x

$$\frac{0.25}{1} = \frac{15}{x} \text{ : היחס בכל שורה שווה, ועל כן נוכל לבנות את המשוואה:}$$

$$0.25x = 15 \text{ : נקבל ב-x, ונקבל:}$$

$$x = \frac{15}{0.25} \text{ : נחלק את שני צדי המשוואה ב-0.25, ונקבל: } x = \frac{15}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = 15 \cdot \frac{4}{1} \Leftrightarrow x = 60$$

אפשרות נוספת למצוא את x בעזרת ריבוע היחסים היא באמצעות הבנת הקשר בין המספרים בכל שורה: אם נתבונן בשורה העליונה של ריבוע היחסים נראה כי המספר הימני גדול פי 4 מהמספר השמאלי. היחס בשתי השורות שווה זה לזה ועל כן גם בשורה התחתונה המספר הימני גדול פי 4 מהמספר השמאלי. על כן x, שהוא מספר התפוזים הדרושים להכנת 15 ליטר מיץ, שווה ל-60 תפוזים (= 15 · 4).

תשובה (3).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

2. **השאלה:** זוג מספרים ייקראו "משלימים" אם סכומם הוא ריבוע של מספר שלם.

איזה מזוגות המספרים הבאים אינו זוג מספרים משלימים?

פתרון: בדיקת תשובות

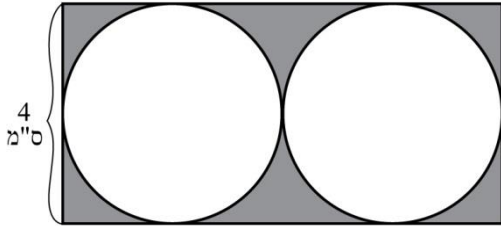
נעבור על התשובות המוצאות ונראה באיזו תשובה, לאחר חיבור המספרים המופיעים בה, לא נקבל מספר אשר יש לו שורש ריבועי שלם.

תשובה (1): 19, -100. נחבר את שני המספרים, ונקבל שהתוצאה שווה ל-81 ($= -19 + 100$), מכיוון של-81 יש שורש ריבועי שלם ($\sqrt{81} = 9$), התשובה אינה נכונה.

תשובה (2): 20, 44. נחבר את שני המספרים ונקבל שהתוצאה שווה ל-64 ($= 20 + 44$), מכיוון של-64 יש שורש ריבועי שלם ($\sqrt{64} = 8$), התשובה אינה נכונה.

תשובה (3): 25, 25. נחבר את שני המספרים ונקבל שהתוצאה שווה ל-50 ($= 25 + 25$), מכיוון של-50 אין שורש ריבועי שלם, לא ייתכן כי 25 ו-25 הם מספרים משלימים, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (3).



3. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם מלבן ובתוכו שני מעגלים. המעגלים משיקים זה לזה ולצלעות המלבן כמותואר בסרטוט.

על פי נתונים אלו והנתון שבסרטוט, מה סכום השטחים הכהים (בסמ"ר)?

פתרון: עלינו לחשב את גודלם של השטחים הכהים. ניתן לראות כי השטח הכהה הוא החלק של המלבן אשר אינו מוסתר על ידי המעגלים. לכן כדי למצוא את השטח הכהה יש למצוא את שטח המלבן ולחסר ממנו את שטחי שני המעגלים.

נמצא את שטחי המעגלים:

אם נעביר במעגל השמאלי קוטר המקביל לרוחב המלבן, אשר נוגע בשתי נקודות ההשקה של המעגל עם אורך המלבן, נקבל מלבן קטן אשר צלע אחת שלו היא קוטר המעגל והצלע מולה היא רוחב המלבן, כלומר הצלע השווה ל-4 ס"מ. לכן ניתן לומר כי קוטר המעגל שווה לרוחב המלבן, ומכאן ש- $2r = 4$. נחלק את שני צדי המשוואה ב-2, ונמצא כי: $r = 2$.

שני המעגלים שבסרטוט זהים משיקולי סימטריה, ועל כן גם רדיוס המעגל הימני שווה ל-2 ס"מ.

נחשב את שטח שני המעגלים בעזרת הנוסחה לחישוב שטח מעגל ($r^2 \cdot \pi$) ונמצא ששטח כל אחד מהמעגלים

$$\text{שווה ל-} 4\pi (= 2^2 \cdot \pi), \text{ ושטח שני המעגלים שווה ל-} 8\pi (= 2 \cdot 4\pi)$$

נמצא את שטח המלבן:

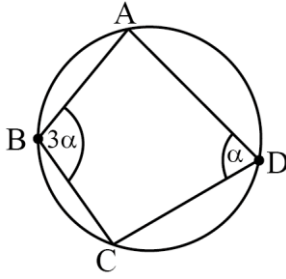
אם נצייר קוטר במעגל השמאלי ובמעגל הימני שמקביל לאורך המלבן, נקבל מלבן וכך נמצא כי אורך המלבן שווה לסכום שני קטרי המעגלים, ומכאן שאורך המלבן שווה ל-8 ס"מ ($= 4 \cdot 2$). שטח המלבן שווה לאורך

המלבן כפול רוחבו, ומכאן ששטחו שווה ל-32 סמ"ר ($= 4 \cdot 8$).

כאמור, השטח הכהה הוא שטח המלבן פחות שטחי שני המעגלים ולכן שווה ל- $32 - 8\pi$.

תשובה (3).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית



4. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מרובע חסום במעגל.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
 $\alpha = ?$

פתרון: בסרטוט שלפנינו מעגל ובתוכו חסום מרובע. בכל מרובע החסום במעגל סכום הזוויות הנגדיות שווה ל- 180° , ומכאן שנוכל לנסח את המשוואה: $\alpha + 3\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow 4\alpha = 180^\circ$.
 נחלק את שני צדי המשוואה ב-4, ונקבל: $\alpha = 45^\circ$.

תשובה (4).

הסקה מטבלה (שאלות 5-9)

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על חמש השאלות שלאחריה.

בטבלה שלפניכם מוצגים נתונים לגבי 8 נשים שהן קרובות משפחה: אביגיל, ברכה, גלית, דליה, הדס, ורד, זיוה וחמוטל. עבור כל אחת מהן, פרט לזיוה, נתונים בטבלה שנת הלידה ושם האם, שהיא אחת מהנשים האחרות. עבור זיוה נתונה שנת הלידה בלבד.

הערה: ל-8 הנשים שבטבלה אין בנות מלבד הבנות שבטבלה.

שם	שנת לידה	שם האם
אביגיל	1950	זיוה
ברכה	1974	הדס
גלית	1975	אביגיל
דליה	1981	אביגיל
הדס	1954	זיוה
ורד	1996	ברכה
זיוה	1930	-
חמוטל	1984	אביגיל

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות

5. **השאלה:** גלית היא -

פתרון: בדיקת תשובות

תשובה (1): אמא של דליה

התשובה אינה נכונה, שכן על פי הטבלה אמא של דליה היא אביגיל ולא גלית.

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

תשובה (2): אמא של אביגיל

התשובה אינה נכונה, שכן על פי הטבלה אמא של אביגיל היא זיוה ולא גלית.

תשובה (3): אחותה של חמוטל

על פי הטבלה אמא של חמוטל היא אביגיל, ואמא של גלית היא גם כן אביגיל. מכאן שגלית היא אחותה של חמוטל, ועל כן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

6. השאלה: בבית ספר לבלט שהיה פעיל בשנת 1992 למדו רק תלמידים בגילים 10-15.

ייתכן ש _____ למדה בבית ספר זה בשנת 1992.

פתרון: בדיקת תשובות

נבדוק בת כמה הייתה כל בת משפחה המופיעה בתשובות בשנת 1992, ונראה אם גילה הוא בין 10 ל-15.

תשובה (1): ברכה. ברכה נולדה בשנת 1974, ולכן בשנת 1992 הייתה בת 18 (= 1974 – 1992), מכיוון שגילה היה מעל ל-15 היא לא יכלה ללמוד בבית ספר לבלט בשנה זו, ועל כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): גלית. גלית נולדה בשנת 1975, ולכן בשנת 1992 הייתה בת 17 (= 1975 – 1992), מכיוון שגילה היה מעל ל-15 היא לא יכלה ללמוד בבית ספר לבלט בשנה זו, ועל כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (3): דליה. דליה נולדה בשנת 1981, ולכן בשנת 1992 הייתה בת 11 (= 1981 – 1992), מכאן שהיא הייתה בטווח הגילאים המתאים ללמוד בבית הספר לבלט בשנה זו ולכן ייתכן שלמדה בו. מכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

7. השאלה: מי האישה הצעירה ביותר מתוך הנשים שיש להן לפחות בת אחת?

פתרון: בדיקת תשובות

נבדוק לגבי כל אחת מבנות המשפחה המופיעות בתשובות מה שנת לידתה והאם יש לה בת אחת לפחות:

תשובה (1): ברכה. ברכה נולדה בשנת 1974, וניתן לראות על פי הטבלה כי היא האמא של ורד.

תשובה (2): ורד. ורד נולדה בשנת 1996, אולם היא אינה מופיעה כאמא של אף אחת ולכן תשובה זו נפסלת.

תשובה (3): זיוה. זיוה נולדה בשנת 1930, ומכיוון שהיא יותר מבוגרת מברכה התשובה נפסלת.

תשובה (4): חמוטל. חמוטל נולדה בשנת 1984, אולם היא אינה מופיעה כאמא של אף אחת אחרת, ולכן תשובה זו נפסלת.

פסלנו את תשובות (2), (3) ו-(4) ומכאן שברכה היא האישה הצעירה ביותר שיש לה לפחות בת אחת מתוך כל הנשים המופיעות בתשובות.

תשובה (1).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

8. **השאלה:** כמה אחוזים מהנשים בטבלה נולדו בשנים 1976-1986?

פתרון: נמצא כמה נשים נולדו בין השנים 1976-1986 על פי טור שנת הלידה שבטבלה. נראה כי דליה (1981) וחמוטל (1984) הן הנשים היחידות בטבלה שנולדו בין השנים 1976-1986. כלומר יש 2 בנות משפחה מתוך 8 בנות משפחה אשר נולדו בטווח זה. הם $\frac{1}{4}$ מתוך 8 $\left(\frac{2}{8} = \right)$ שהם $25\% \left(\frac{1}{4} \cdot 100 = \right)$

תשובה (2).

9. **השאלה:** _____ היא דודתה (אחות אימה) של _____.

פתרון: בדיקת תשובות

תשובה (1): זיוה; ורד. מכיוון שלא מצוין בטבלה מי אמא של זיוה, לא ניתן לדעת האם יש לה אחות, ומכאן שלא ניתן לדעת האם היא דודה של אחת הבנות. על כן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): אביגיל; ברכה. על פי הטבלה אמא של ברכה היא הדס. כדי שאביגיל תהיה דודתה של ברכה עלינו להראות שאביגיל היא אחות של אמא של ברכה, כלומר של הדס. ניתן לראות כי גם הדס וגם אביגיל הן הבנות של זיוה, ומכאן שהן אחיות. מצאנו כי אביגיל היא דודתה של הדס, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

10. **השאלה:** נתון: $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} = 2$

פתרון: פישוט אלגברי

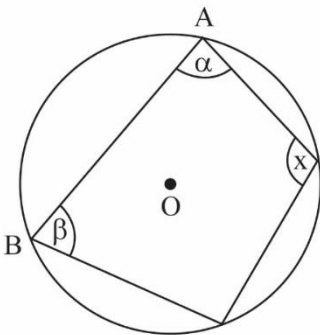
נכפול את שני צדי המשוואה ב- $(x+1) \cdot (x+2)$, ונקבל: $x \cdot (x+2) + x \cdot (x+1) = 2 \cdot (x+2)(x+1)$.
 נפתח את הסוגריים, ונקבל: $x^2 + 2x + x^2 + x = 2 \cdot (x^2 + x + 2x + 2)$.
 נכנס איברים, ונקבל: $2x^2 + 3x = 2x^2 + 6x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 2x^2 + 6x + 4$.
 נחסר משני צדי המשוואה $(2x^2 + 6x)$, ונקבל: $-3x = 4$.
 נחלק את שני צדי המשוואה ב- (-3) , ונקבל: $x = -\frac{4}{3}$.

הערה: המספרים שבתשובות אינם נוחים לבדיקה ועל כן לא כדאי לבדוק אותן.

תשובה (1).

11. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם מרובע ABCD החסום במעגל שמרכזו O.

על פי נתון זה והנתונים שבסרטוט, $x = ?$



פתרון: בסרטוט שלפנינו מרובע חסום במעגל. במרובע חסום במעגל סכום הזוויות הנגדיות שווה ל- 180° , ומכאן נוכל לנסח את המשוואה: $\beta + x = 180^\circ$.

נחסר את β משני צידי המשוואה ונקבל: $x = 180^\circ - \beta$.

תשובה (2).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

12. **השאלה:** 4 ילדים רוצים להסתדר ב-2 זוגות.

בכמה דרכים שונות הם יכולים לעשות זאת?

פתרון: סרטוט + ספירה ידנית

נסרטט את כל האפשרויות לסידור ארבעה ילדים (א', ב', ג', ד') בזוגות:

אפשרות 1: א+ב ; ג+ד.

אפשרות 2: א+ג ; ב+ד.

אפשרות 3: א+ד ; ב+ג.

מצאנו כי ישנן 3 אפשרויות לסדר 4 ילדים ב-2 זוגות.

תשובה (3).

13. **השאלה:** מתחנת אוטובוס יוצא אוטובוס כל 40 דקות בדיוק. האוטובוס הראשון בכל יום יוצא ב-8:30.

נועה נסעה באוטובוס שיצא מהתחנה בשעה 14:30.

אוטובוס זה היה האוטובוס ה-_____ שיצא מהתחנה ביום זה.

פתרון: סרטוט + ספירה ידנית

נכתוב מה הן השעות בהן יצא אוטובוס מתחנת האוטובוס החל מהאוטובוס הראשון ועד האוטובוס שיצא בשעה 14:30, ונמנה את האוטובוסים לפי סדר היציאה:

שעה	08:30	09:10	09:50	10:30	11:10	11:50	12:30	13:10	13:50	14:30
אוטובוס מספר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

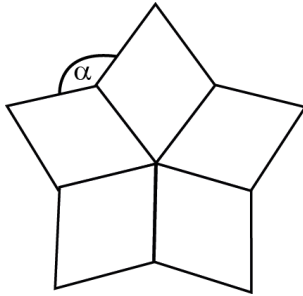
מצאנו כי נועה עלתה על האוטובוס ה-10 שיצא מהתחנה ביום זה.

תשובה (4).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

14.

השאלה: בסרטוט שלפניכם 5 מעוינים חופפים בעלי קודקוד משותף.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,

$$\alpha = ?$$

פתרון: עלינו למצוא את זווית α . ניתן לראות על פי הסרטוט שהיא יוצרת זווית עגולה עם שתי זוויות קהות של המעוין. לכן כדי למצוא את זווית α ראשית נמצא את זוויות המעוין.

לפי הנתונים, לכל 5 המעוינים יש קודקוד משותף, כאשר ניתן לראות כי חמש הזוויות החדות של המעוינים יוצרות זווית עגולה, כלומר הסכום שלהן שווה ל- 360° . מכיוון שכל המעוינים חופפים גם כל הזוויות החדות זהות, ועל כן ניתן לבנות את המשוואה:

$$5x = 360^\circ$$

כאשר x הוא גודלה של הזווית החדה של המעוין.

$$\text{נחלק ב-5 את שני צדי המשוואה, ונקבל כי } x = 72^\circ$$

במעוין סכום זוויות סמוכות שווה ל- 180° , ועל כן הזווית הקהה במעוין שווה ל- $108^\circ (= 180^\circ - 72^\circ)$.

כאמור זווית α ושתי זוויות קהות של המעוין יוצרות זווית עגולה ומכאן נוכל לבנות את המשוואה הבאה:

$$\alpha + 108^\circ + 108^\circ = 360^\circ$$

$$\text{נכנס איברים ונקבל: } \alpha + 216^\circ = 360^\circ$$

$$\text{נחסר } 216^\circ \text{ משני צידי המשוואה ונגיע לתוצאה: } \alpha = 144^\circ$$

תשובה (4).

15.

השאלה: $\frac{1}{25}$ מ- x שווים ל-30% מ- y .

$$x = ?$$

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכו של y ולכן נציב במקומו מספר נוח לחישוב, למשל נציב כי $y = 10$.

$$\text{נמצא כמה הם } 30\% \text{ מ-} y \text{ כלומר מ-} 10: \left(\frac{30}{100}\right) \cdot 10 \Leftrightarrow \frac{300}{100} \Leftrightarrow 3$$

על פי נתוני השאלה $\frac{1}{25}$ מ- x שווים ל-30% מ- y , כלומר ל-3, ועל כן נוכל לבנות את המשוואה הבאה:

$$\left(\frac{1}{25}\right) \cdot x = 3$$

$$\text{נכפול את שני צדי המשוואה ב-25, ונקבל: } x = 75$$

קעת נציב $y = 10$ בתשובות ונפסול כל תשובה שאינה שווה ל-75:

תשובה (1): $0.5y$: נציב כי $y = 10$ ונקבל: $0.5 \cdot 10 = 5$. קיבלנו תוצאה השונה מ-75 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $1.5y$: נציב כי $y = 10$ ונקבל: $1.5 \cdot 10 = 15$. קיבלנו תוצאה השונה מ-75 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $3.5y$: נציב כי $y = 10$ ונקבל: $3.5 \cdot 10 = 35$. קיבלנו תוצאה השונה מ-75 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): $7.5y$: נציב כי $y = 10$ ונקבל: $7.5 \cdot 10 = 75$. מכיוון שפסלנו 3 תשובות הרי שזו התשובה הנכונה.

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

דרך ב': בניית משוואה

$$\frac{1}{25} \cdot x = \frac{30}{100} \cdot y \quad \text{נתון כי } x \text{ שווים ל-} 30\% \text{ מ-} y, \text{ ועל כן נוכל לנסח את המשוואה הבאה:}$$

$$4x = 30y \quad \text{ונקבל:}$$

$$x = 7.5y \quad \text{ונקבל:}$$

תשובה (4).

16. השאלה: נופר קיבלה חבילת סוכריות. ביום הראשון אכלה $\frac{1}{2}$ מן הסוכריות.

ביום השני אכלה $\frac{1}{3}$ מהסוכריות שנותרו, וביום השלישי אכלה $\frac{1}{5}$ מהסוכריות שנותרו לאחר היום השני. אם לאחר היום השלישי נותרו בחבילה 8 סוכריות, כמה סוכריות היו בחבילה שקנתה נופר?

פתרון: בדיקת תשובות

תשובה (1): 24. אם ביום הראשון אכלה נופר $\frac{1}{2}$ מכמות הסוכריות, הרי שהיא אכלה בסך הכל 12 סוכריות

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 24 = \right), \text{ ולכן לאחר היום הראשון נותרו לה 12 סוכריות } (= 24 - 12). \text{ ביום השני אכלה}$$

$$\text{נופר } \frac{1}{3} \text{ מהסוכריות שנותרו לה, ומכאן שאכלה 4 סוכריות } \left(\frac{1}{3} \cdot 12 = \right), \text{ ועל כן אחרי היום שני}$$

$$\text{נותרו לה 8 סוכריות } (= 12 - 4). \text{ ביום השלישי נופר אכלה } \frac{1}{5} \text{ מהסוכריות שנותרו לה, אולם}$$

מכיוון ש-8 אינו מתחלק ב-5 הדבר אינו אפשרי ועל כן התשובה אינה נכונה.

תשובה (2): 25. ביום הראשון אכלה נופר $\frac{1}{2}$ מכמות הסוכריות. מכיוון ש-25 אינו מתחלק ב-2 הדבר אינו

אפשרי ועל כן התשובה אינה נכונה.

תשובה (3): 30. ביום הראשון אכלה נופר $\frac{1}{2}$ מכמות הסוכריות, היא אכלה בסך הכל 15 סוכריות

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 30 = \right), \text{ ולכן לאחר היום הראשון נותרו לה 15 סוכריות } (= 30 - 15). \text{ ביום השני אכלה}$$

$$\text{נופר } \frac{1}{3} \text{ מהסוכריות שנותרו לה, ומכאן שאכלה 5 סוכריות } \left(\frac{1}{3} \cdot 15 = \right), \text{ ועל כן אחרי היום שני}$$

$$\text{נותרו לה 10 סוכריות } (= 15 - 5). \text{ ביום השלישי נופר אכלה } \frac{1}{5} \text{ מהסוכריות שנותרו לה, לכן}$$

$$\text{אכלה 2 סוכריות } \left(\frac{1}{5} \cdot 10 = \right), \text{ ומכאן לאחר היום השלישי נותרו לנופר 8 סוכריות } (= 10 - 2).$$

על פי נתוני השאלה לאחר היום השלישי אכן נותרו לנופר 8 סוכריות ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

17. השאלה: הממוצע של 6 מספרים הוא A. כמה מהם, לכל היותר, גדולים מ-A?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית ובדיקת תשובות

לא נשאלנו על ערכו של A ועל כן נוכל להציב מספרים במקומו. נציב במקום A מספר נוח לעבודה, למשל נציב כי $A = 10$. על פי נוסחת הממוצע, סכום קבוצת מספרים שווה לממוצע שלהם כפול כמות המספרים בקבוצה, ומכאן שלפי ההצבה הסכום של 6 המספרים שווה ל-60 ($6 \cdot 10 = 60$). כעת נעבור על התשובות המוצעות ונראה כמה מספרים יכולים להיות גדולים מ-10 לכל היותר, כך שסכום כל המספרים שווה ל-60. מכיוון שנשאלנו כמה מהמספרים "לכל היותר" גדולים מ-A נתחיל לבדוק את התשובה הגדולה ביותר:

תשובה (4): 5. נראה האם ייתכן כי 5 מספרים גדולים מ-10: כך למשל ייתכן כי כל מספר מבין ה-5 הללו שווה ל-11, וכך הסכום של כל החמישה יהיה שווה ל-55 ($11 \cdot 5 = 55$), ומכאן שכדי להשלים לסכום של 60 על המספר השישי להיות שווה ל-5 ($60 - 55 = 5$). על כן ייתכן ש-5 מספרים יהיו גדולים מ-10, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': הגדרת הממוצע

על פי הגדרת הממוצע, הממוצע הוא האמצע החשובני. מהגדרה זו עולה כי ממוצע של קבוצת מספרים ממוקם איפשהו בין המספר הקטן ביותר בקבוצה למספר הגדול ביותר בקבוצה, ועל כן אחד מהמספרים חייב להיות גדול מהממוצע והשני חייב להיות קטן ממנו. עם זאת, אין הגבלה לגבי שאר המספרים המשתתפים בממוצע. מכאן שאם ממוצעם של 6 מספרים הוא A הרי שאחד מהם לפחות גדול מ-A ואחד מהם לפחות קטן מ-A. שאר 4 המספרים יכולים להיות כולם גדולים או קטנים מ-A, ועל כן לכל היותר 5 מספרים גדולים מ-A.

תשובה (4).

18. השאלה: איזה מן הביטויים הבאים אינו שווה לביטוי $a^{-n} - a^n$?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכם של a ו-n ועל כן נוכל להציב מספרים במקומם. נציב למשל כי $a = 2$ ו- $n = 1$ בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $2^{-1} - 2^1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow -1\frac{1}{2}$.

כעת נעבור על התשובות המוצעות ובהן נציב את אותם ונפסול כל תשובה אשר שווה ל- $-1\frac{1}{2}$:

תשובה (1): $a^{-n}(1 - a^{2n})$. נציב כי $a = 2$ ו- $n = 1$, ונקבל: $2^{-1} \cdot (1 - 2^{2 \cdot 1}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (1 - 2^2) \Leftrightarrow -1\frac{1}{2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 4) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) \Leftrightarrow -1\frac{1}{2}$. התוצאה שהתקבלה זהה לתוצאה שקיבלנו מפישוט הביטוי ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{1}{a^n} - a^n$. נציב כי $a = 2$ ו- $n = 1$, ונקבל: $\frac{1}{2^1} - 2^1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow -1\frac{1}{2}$. התוצאה

שהתקבלה זהה לתוצאה שקיבלנו מפישוט הביטוי ועל כן התשובה נפסלת.

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

תשובה (3): $a^n \left(\frac{1}{a^{2^n}} - 1 \right)$. נציב כי $a = 2$ ו- $n = 1$, ונקבל: $2^1 \cdot \left(\frac{1}{2^{2^1}} - 1 \right) \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right)$

התוצאה שהתקבלה זהה לתוצאה שקיבלנו מפישוט הביטוי ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (4): $a^n (a^{-n} - 1)$. נציב כי $a = 2$ ו- $n = 1$, ונקבל: $2^1 \cdot (2^{-1} - 1) \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$

-1 . התוצאה שהתקבלנו שונה מזו שקיבלנו מפישוט הביטוי ועל כן התשובה מתאימה. מכיוון שפסלנו שלוש תשובות הרי שזו התשובה הנכונה.

דף ב': פישוט אלגברי

הביטוי הנתון בשאלה מפושט באופן יחסי, ועל כן על מנת למצוא מי מהביטויים שבתשובות אינו שווה לו נפשט אותם בעזרת חוקי חזקות. נבדוק איזו תשובה אינה שווה ל- $a^{-n} - a^n$:

תשובה (1): $a^{-n} (1 - a^{2^n})$. נפתח סוגריים, ונקבל: $a^{-n} - a^{-n} \cdot a^{2^n}$.

על פי חוקי חזקות $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, ומכאן ש: $a^{-n} - a^{-n} \cdot a^{2^n} \Leftrightarrow a^{-n} - a^{-n+2^n} \Leftrightarrow a^{-n} - a^n$. מצאנו כי הביטוי שבתשובה זהה לביטוי המקורי ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $\frac{1}{a^n} - a^n$. על פי חוקי חזקות $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ומכאן ש: $\frac{1}{a^n} - a^n \Leftrightarrow a^{-n} - a^n$. מצאנו כי הביטוי

שבתשובה זהה לביטוי המקורי ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $a^n \left(\frac{1}{a^{2^n}} - 1 \right)$. נפתח סוגריים, ונקבל: $\frac{a^n}{a^{2^n}} - a^n$.

על פי חוקי חזקות $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, ומכאן ש: $\frac{a^n}{a^{2^n}} - a^n \Leftrightarrow a^{n-2^n} - a^n \Leftrightarrow a^{-n} - a^n$. מצאנו כי

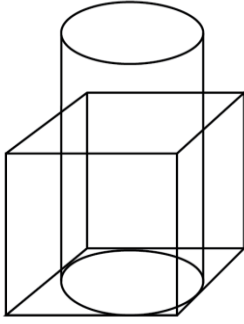
הביטוי שבתשובה זהה לביטוי המקורי ועל כן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ומכאן שתשובה (4) היא התשובה הנכונה.

תשובה (4).

19.

השאלה: בסיסו של גליל חסום בתוך פאת קובייה כמתואר בסרטוט. נפח הגליל שווה לנפח הקובייה.



$$? = \frac{\text{גובה הגליל (בס"מ)}}{\text{מקצוע הקובייה (בס"מ)}}$$

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על אורך מקצוע הקובייה ועל כן נוכל להציב מספרים במקומו. נציב מספר במקום אורך מקצוע הקובייה ובעזרת הצבה זו ונתוני השאלה נמצא את גובה הגליל. נציב למשל כי אורך מקצוע הקובייה שווה ל-2 ס"מ.

נפח הקובייה שווה לאורך מקצוע הקובייה בשלישית ומכאן שנפח הקובייה שווה ל-8 סמ"ק ($2^3 =$).

נתון כי נפח הגליל שווה לנפח הקובייה, ומכאן שגם נפח הגליל שווה ל-8 סמ"ק. כעת יש למצוא את גובה הגליל. כדי שנוכל לחלץ את גובה הגליל מנוסחת הנפח שלו יש למצוא קודם את שטח בסיס הגליל. נתון כי בסיס הגליל חסום בבסיס הקובייה, כך שאם נצייר קוטר בבסיס הגליל שנוגע בנקודות ההשקה של המעגל עם בסיס הקובייה נראה כי הוא שווה למקצוע הקובייה. אורך מקצוע הקובייה

שווה ל-2 ס"מ ומכאן שקוטר הבסיס שווה גם הוא ל-2 ס"מ, ולכן רדיוס הבסיס שווה ל-1 ס"מ ($\frac{2}{2} =$).

נמצא את שטח בסיס הגליל בעזרת הנוסחה לשטח מעגל ($r^2 \cdot \pi$) ונקבל כי שטח בסיס הגליל שווה ל- π

סמ"ר ($1^2 \cdot \pi =$), ומכאן שנפח הגליל שווה ל- $h \cdot \pi$.

מצאנו כי נפח הגליל שווה ל-8 סמ"ק ומכאן ש: $h \cdot \pi = 8$.

נחלק ב- π את שני צדי המשוואה ונקבל כי גובה הגליל שווה ל- $\frac{8}{\pi}$ ס"מ.

$$\frac{4}{\pi} \Leftrightarrow \frac{8}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{\pi} : 2$$

כעת נמצא את היחס בין גובה הגליל למקצוע הקובייה:

תשובה (4).

סימולציה 8 - הסברים לפרק 7 - חשיבה כמותית

20. השאלה: a, b ו-x הם מספרים שלמים, שונים זה מזה וגדולים מ-1.

$$\text{נתון: } x^2 \cdot a \cdot b^3 = 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 15$$

$$a = ?$$

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

בשאלה נתונה משוואה ובה מכפלה של מספרים שלמים (צד ימין) ומכפלה של מספרים שלמים שונים זה מזה המבוטאים כנעלמים (צד שמאל). בביטוי בצידה השמאלי של המשוואה יש מספר המופיע פעם אחת (a), מספר המופיע פעמיים (x) ומספר המופיע שלוש פעמים (b).

ראשית נפשט את המשוואה. בצידה הימני של המשוואה ישנם מספרים שניתן לפרק למכפלה של מספרים ראשוניים. פירוקם עשוי להקל עלינו בעת בדיקת התשובות. על כן 'נפרק' את המספרים הללו למכפלת הגורמים הראשוניים שלהם, וכך נוכל לבדוק תשובות ביתר בקלות:

$$x^2 \cdot a \cdot b^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \Leftrightarrow x^2 \cdot a \cdot b^3 = 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (3 \cdot 5) \Leftrightarrow x^2 \cdot a \cdot b^3 = 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 15$$

כעת נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): 14. אם a שווה ל-14 הרי שהוא שווה למכפלת המספרים הראשוניים 2 ו-7 (14 = 7 · 2), עם זאת בצידה הימני של המשוואה המספר 7 לא מופיע. מכיוון שצד ימין של המשוואה חייב להיות שווה לצד שמאל, לא ייתכן כי a שווה ל-14. תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): 22. אם a שווה ל-22 הרי שהוא שווה למכפלת המספרים הראשוניים 2 ו-11 (22 = 2 · 11),

ואכן ניתן לראות כי בצידה הימני של המשוואה מופיעה המכפלה של המספרים 2 ו-11. נוכל להכפיל אותם זה בזה כדי לראות זאת בצורה ברורה, וכך נקבל כי:

$$x^2 \cdot a \cdot b^3 = 22 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

כעת, על מנת לוודא שהתשובה אכן מתאימה, יש לבדוק האם שאר המספרים שבצד ימין של המשוואה מתאימים לנעלמים x ו-b: ניתן לראות כי בצד ימין של המשוואה אכן מופיע מספר בכפל של עצמו פעמיים (5), ולכן x יכול להיות שווה ל-5, וכמו כן יש מספר המופיע בכפל של עצמו שלוש פעמים (3), לכן b יכול להיות שווה ל-3. מכאן שזו התשובה הנכונה.

דרך ב': הבנה אלגברית

$$\text{לאחר פישוט צד ימין של המשוואה קיבלנו: } x^2 \cdot a \cdot b^3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$$

שני צדי המשוואה שווים זה לזה ועל כן צריכה להיות התאמה בין הנעלמים המופיעים בצד שמאל לבין המספרים המופיעים בצד ימין. בצד שמאל מופיעים שני מספרים בחזקה: x ו-b, כאשר x מופיע בחזקת 2 ו-b בחזקת 3. לאחר פישוט צד ימין של המשוואה נראה כי גם שם מופיעים שני מספרים בחזקה: 5 המופיע בחזקת 2, ו-3 המופיע בחזקת 3. נוכל לכתוב את המשוואה באופן הבא כדי לראות זאת טוב יותר:

$$x^2 \cdot a \cdot b^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$$

$$\text{מכאן נוכל להסיק כי } x = 5 \text{ ו- } b = 3 \text{ ולפיכך } x = 2 \cdot 11 \Leftrightarrow x = 22$$

תשובה (2).