

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(4)	(1)	(1)	(1)	(4)	(1)	(2)	(1)	(3)	(3)	תשובה

הסברים

1. השאלה: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = ?$

פתרון: ראשית נפשט את הביטוי שבמונה ואת הביטוי שבמכנה:

המונה: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$

המכנה: $\frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{12+10}{30} = \frac{22}{30}$

קיבלנו: $\frac{11}{30} \cdot \frac{30}{22} = \frac{1}{2}$, חילוק בשבר הוא כפל בהופכי, ומכאן: $\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} \leftarrow \frac{1 \cdot 30}{1 \cdot 30} \cdot \frac{30}{22}$

תשובה (3).

2. השאלה: $3^x \cdot 9^x \cdot 27^x = ?$

פתרון: בשאלות חזקות אנו מעוניינים להגיע למצב של בסיסים זהים, נפרק את כל הבסיסים לבסיס הקטן ביותר האפשרי, כלומר 3.

$3^x \cdot 9^x \cdot 27^x = 3^x \cdot (3^2)^x \cdot (3^3)^x = 3^x \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^{x+2x+3x} = 3^{6x}$

תשובה (3).

3. **השאלה: נתון:** $\frac{2}{4x^2 + 8x + 4} = ?$; $(0 < x)$

$$\frac{2}{(2x + 6) - 4}$$

פתרון: דרך א': אלגברה.

ראשית נמיר את קו השבר בכפל בהופכי, ונקבל: $\frac{2}{4x^2 + 8x + 4} \cdot \frac{(2x + 6) - 4}{1}$

לפני שנכפול 'נטפל' בכל שבר בנפרד. בשבר השמאלי נוציא גורם משותף במכנה, ובשבר הימני נפתח את

הסוגריים במונה. נקבל: $\frac{2}{4(x^2 + 2x + 1)} \cdot \frac{2x + 2}{1}$

נוציא גורם משותף גם במונה של השבר הימני, נצמצם ונקבל: $\frac{2}{4(x^2 + 2x + 1)} \cdot \frac{2(x + 1)}{1} = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

המכנה שקיבלנו הוא נוסחת הכפל המקוצר הראשונה. נפתח אותה, ונקבל: $\frac{x + 1}{(x + 1)^2}$

נצמצם, ונקבל: $\frac{1}{x + 1}$

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית.

נמצא מה ערכו של הביטוי כאשר $x = 1$: $\frac{2}{4x^2 + 8x + 4} \Leftrightarrow \frac{2}{4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 4} \Leftrightarrow \frac{2}{4 + 8 + 4} \Leftrightarrow \frac{2}{8 + 4}$

$\frac{2}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}$

נציב $x = 1$ בכל אחת מהתשובות, ונפסול כל תשובה שערכה שונה מ- $\frac{1}{2}$.

תשובה (1): $\frac{1}{x + 1}$. נציב כי $x = 1$, ונמצא כי ערך הביטוי הוא $\frac{1}{2}$. תשובה זו מתאימה לכן לא נפסול

אותה, אך יש לבדוק גם את שאר התשובות.

תשובה (2): $\frac{x - 1}{x + 1}$, כאשר מציבים $x = 1$, מקבלים כי ערך הביטוי שווה ל-0, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $x + 1$, כאשר מציבים $x = 1$, מקבלים כי ערך הביטוי שווה ל-2, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (4): $\frac{x + 1}{x - 1}$, לא יתכן, תשובה זו נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ולכן תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

תשובה (1).

4. השאלה: $4a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a = ?$

פתרון: ניתן לפתור את השאלה על ידי הוצאת גורם משותף מהביטוי הנתון או על ידי 'פתיחת' הסוגריים בביטויים הנתונים בתשובות.

$$(2a^3 + a) \cdot (2a + a) = 4a^4 + 2a^4 + 2a^2 + a^2 = 6a^4 + 3a^2 \quad \text{תשובה (1)}$$

תשובה (2): $(2a^2 + a) \cdot (2a^2 + 1) = 4a^4 + 2a^2 + 2a^3 + a$. מכיוון שתשובה זו זהה לביטוי המקורי, זו התשובה הנכונה.

$$(2a^3 + 2a) \cdot (a + 1) = 2a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a \quad \text{תשובה (3)}$$

$$(2a^2 + a) \cdot (a^2 + 2) = 2a^4 + 4a^2 + a^3 + 2a \quad \text{תשובה (4)}$$

תשובה (2).

5. השאלה: a, x ו- y הם שלושה מספרים שלמים וחיוביים.

נתון: $x < a < y$

איזה מהטענות הבאות נכונה **בוודאות**?

פתרון:

תשובה (1): $x^a < a^y$. מכיוון שגם הבסיס a גדול מהבסיס x וגם החזקה y גדולה מהחזקה a , הרי שאי-השוויון בהכרח נכון.

תשובה (1).

6. השאלה: הפעולה \$ הוגדרה בעבור כל x באופן הבא: $\$x = \frac{5}{3} \cdot x$

$$\$(\$27) = ?$$

פתרון: ראשית נבצע את הפעולה שבתוך הסוגריים ואז נבצע על התוצאה את פעולת ה-\$.

$$\$27 = \frac{5}{3} \cdot 27 = 45$$

$$\$45 = \frac{5}{3} \cdot 45 = 75$$

$$\$75 = \frac{5}{3} \cdot 75 = 125$$

תשובה (4).

7. **השאלה:** נתונה סדרת מספרים בה האיבר הראשון הוא $\frac{1}{3}$ וכל מספר בסדרה שווה למכפלת האיבר הקודם

$$\text{ב-} \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots : \frac{1}{3}$$

מהו האיבר ה-100 בסדרה?

פתרון: מכיוון שמבקשים כי נמצא את האיבר ה-100, ברור שעלינו למצוא חוקיות כלשהי שתאפשר לדעת מיהו איבר זה.

$$\begin{aligned} \text{האיבר השני של הסדרה הוא: } \frac{1}{9}, \text{ שניתן גם לרשום אותו כ- } \frac{1}{3^2}. \\ \text{האיבר השלישי של הסדרה הוא: } \frac{1}{27}, \text{ אשר ניתן לרשום אותו גם כ- } \frac{1}{3^3}. \\ \text{מכאן שהאיבר ה-100 של הסדרה הוא } \frac{1}{3^{100}}. \end{aligned}$$

תשובה (1).

8. **השאלה:** לכל מספר חיובי ושלם A הוגדרה הפעולה \$ כך: $\$(A) = \frac{1}{A+1}$

$$\frac{\$(1) \cdot \$(2)}{\$(3) \cdot \$(4)} = ?$$

פתרון: נפשט את הביטוי באמצעות הפעולה המומצאת הנתונה:

$$\frac{\$(1) \cdot \$(2)}{\$(3) \cdot \$(4)} = \frac{\frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{2+1}}{\frac{1}{3+1} \cdot \frac{1}{4+1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{1} = \frac{10}{3}$$

תשובה (1).

9. **השאלה:** מה ספרת האחדות של הביטוי 2^{20} ?

פתרון: דרך א' מכיוון שאיננו יודעים מהי תוצאת התרגיל 2^{20} , עלינו לפרק את הביטוי למספרים קטנים ו'מופכים' יותר. $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10}$.

כעת, מכיוון שאיננו מכירים את תוצאת התרגיל 2^{10} , עלינו להמשיך ולפרק ביטוי זה. $2^{10} = 2^5 \cdot 2^5$.

2^5 שווה ל-32, ומכאן שתוצאת המספר 2^{10} שווה למכפלת 32 ב-32. מכיוון שעלינו למצוא רק את תוצאת האחדות מספיק אם נגיע למסקנה שספרת האחדות שווה בהכרח למכפלת ספרת האחדות של שני המספרים, כלומר שווה ל-4 ($2 \cdot 2 = 4$).

מצאנו כי ספרת האחדות של 2^{10} היא 4, מכיוון ש- $2^{10} = 2^{10} \cdot 2^{10}$, הרי שספרת האחדות של 2^{20} היא תוצאת המכפלה של ספרת האחדות של שני המספרים, כלומר שווה ל-6 ($4 \cdot 4 = 6$).

דרך ב' :

כמובן שלא סביר שנידרש לחשב מפורשות את הביטוי המבוקש, ולכן נשאל את עצמנו איך מתנהגת הספרה 2 כאשר מעלים אותה בחזקה –

$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32 \quad 2^6 = 64$$

ניתן לראות כי ספרת האחדות חוזרת על עצמה בתבנית מחזורית שחוזרת על עצמה כל 4 איברים: $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$. מכאן נזהה כי בכל פעם שמעלים את הספרה 2 בחזקה שהיא כפולה שלמה של 4 $(2^4, 2^8, 2^{12}, \dots)$ ספרת האחדות היא תמיד 6. לכן גם ספרת האחדות של הביטוי 2^{20} היא 6.

תשובה (1).

10. השאלה: איזה מן הביטויים הבאים הוא מספר קבוע, שאינו תלוי ב- k ($k \neq 0$) ?

פתרון: על מנת למצוא איזה מהביטויים אינו תלוי בערכו של k , יש למצוא מיהו הביטוי שכאשר נפשט אותו נקבל ערך מספרי קבוע.

תשובה (1): $(k+2)^2 - (k^2 + 4)$. נפשט את הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר, ונקבל:

$k^2 + 4 + 4k - k^2 - 4 = 4k$. מכיוון שקיבלנו כי כאשר מפשטים את הביטוי מקבלים כי ערכו הוא $4k$, הרי שערכו של הביטוי תלוי ב- k .

תשובה (2): $\frac{k^2 + k}{2k}$. נפשט את הביטוי באמצעות פירוק המונה, ונקבל: $\frac{k^2 + k}{2k} = \frac{k^2}{2k} + \frac{k}{2k} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$.

מכיוון שערך הביטוי שקיבלנו תלוי בערכו של k זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): $\frac{k(5-k)}{5k}$. נצמצם את המונה והמכנה ב- k , ונקבל: $\frac{5-k}{5}$. ערך הביטוי שקיבלנו תלוי בערכו של k , ולפיכך זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (4): $\frac{(k+1)(k-1) - (k+1)^2}{k+1}$. ניתן לפשט את הביטוי באמצעות פתיחת סוגריים (או באמצעות

הוצאת גורם משותף $(k+1)$), ונקבל:

$$\frac{k^2 - 1 - (k^2 + 1 + 2k)}{k+1} = \frac{k^2 - 1 - k^2 - 1 - 2k}{k+1} = \frac{-2 - 2k}{k+1} = \frac{-2 \cdot (k+1)}{k+1} = -2$$

קיבלנו ביטוי אשר ערכו מספרי, כלומר אינו תלוי בערכו של k , זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).