

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(4)	(1)	(2)	(2)	(1)	(3)	(2)	(4)	(3)	(2)	תשובה

הטברים

1. **השאלה:** הפעולה \$ מוגדרת בעבור כל שלושה מספרים באופן הבא:  $(x, y, z) = x^y \cdot (z - x)$

$(a, b, a) = ?$

**פתרון:** על פי הגדרת הפעולה  $(a, b, a) = a^b \cdot (a - a)$

$(a, b, a) = 0$  , ומכיוון שתוצאת כל מכפלה אשר אחד מגורמיה שווה ל-0 הוא 0, הרי ש:  $(a, b, a) = 0$

**תשובה (2).**

2. **השאלה:** נתון:  $0 < a < 1$

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול ביותר**?

**פתרון:** ככל שמעלים שבר בחזקה גדולה יותר כך ערכו קטן יותר, כלומר על מנת למצוא את השבר בעל הערך הגדול ביותר עלינו למצוא את התשובה שבה החזקה הקטנה ביותר.  
בתשובות (3) ו-(4), מוציאים שורש ל-a, נבדוק מה החזקה בכל אחת מהן.

**תשובה (3):**  $\sqrt{a}$ . נפשט את הביטוי בעזרת החוק:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ , ונקבל:  $\sqrt{a} \leftarrow \sqrt[2]{a^1} \leftarrow \sqrt{a} \leftarrow a^{\frac{1}{2}}$

**תשובה (4):**  $\sqrt{a^3}$ . נפשט שוב בעזרת חוק השורשים, ונקבל:  $\sqrt{a^3} \leftarrow \sqrt[2]{a^3} \leftarrow \sqrt{a^3} \leftarrow a^{\frac{3}{2}}$

מכיוון שהחזקה הקטנה ביותר היא החזקה שתשובה (3), הרי שזו התשובה בעלת הערך הגדול ביותר.

**תשובה (3).**

3. **השאלה:**  $(a \neq 1) \quad 1 - a - \frac{1}{1-a} = ?$

**פתרון:** דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב כי  $a = 2$ , ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 0

$$0 \leftarrow -1 - (-1) \leftarrow 1 - 2 - \frac{1}{1-2} \leftarrow 1 - a - \frac{1}{1-a}$$

נציב ערך זה בתשובות ונמצא כי ערכן של תשובות (1), (2) ו-(3) שונה, ולכן הן נפסלות.

**דרך ב':** פישוט אלגברי

נפשט את הביטוי באמצעות חיבור הביטויים על ידי מכנה משותף:

$$\frac{a(a-2)}{1-a} \leftarrow \frac{a^2-2a}{1-a} \leftarrow \frac{1+a^2-2a-1}{1-a} = \leftarrow \frac{(1-a)^2}{1-a} - \frac{1}{1-a} \leftarrow 1-a - \frac{1}{1-a}$$

אין תשובה הזזה לביטוי שקיבלנו, ולפיכך נבחן את התשובות ונמצא כי אם נוציא גורם משותף (-1) מן המונה והמכנה של הביטוי שקיבלנו נקבל ביטוי הזזה לביטוי שבתשובה (4):

$$\frac{a(a-2)}{1-a} = \frac{-a(-a+2)}{-1(-1+a)} = \frac{-a(2-a)}{-(a-1)} = \frac{a(2-a)}{a-1}$$

**תשובה (4).**

**4. השאלה:**  $\frac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = ?$

**פתרון:** מכיוון שכמעט כל התשובות הנתונות מתייחסות ל-x בחזקה כלשהי, נתרגם את השורשים לחזקות

באמצעות החוק:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ , ונפשט את הביטוי באמצעות חוקי חזקות.

$$x^3 \leftarrow x^{3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{x^{3\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \leftarrow \frac{x^{2+\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \leftarrow \frac{x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

**תשובה (2).**

**5. השאלה:** לכל מספר טבעי n הוגדרה הפעולה הבאה:  $\$(n) = x^{n+1}$

$$\$(\$(2)) = ?$$

**פתרון:** נבצע את פעולת ה-\$ על הביטוי הנתון וראשית נתחיל בביטוי שבתוך הסוגריים הפנימיים.

שימו לב שהפעולה מוגדרת כך שבאופן שהמספר הנמצא בסוגריים בתוספת 1 מהווה חזקה של x.

$$\$(2) = x^{2+1} = x^3$$

כעת נבצע את פעולת ה-\$ על הביטוי שקיבלנו:  $\$(x^3) = x^{x^3+1}$ .

**תשובה (3).**

**6.** **השאלה:** לכל  $n$  שלם וגדול מ-0 הוגדרה הפעולה # באופן הבא:  $\#(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .  
 $k$  הוא מספר שלם וגדול מ-1.

מה ניתן לומר בוודאות על הביטוי  $\frac{\#(k) - 1}{\#(k - 1)}$  ?

**פתרון: דרך א':** הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי  $k = 3$ .

$$\frac{\#(k) - 1}{\#(k - 1)} = \frac{\#(3) - 1}{\#(2)} = \frac{1 + 2 + 3 - 1}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

תשובות (2) ו-(3) נפסלות.

על מנת לפסול את תשובה (4) יש להציב מספרים נוספים או לנסות ולהבין מבחינה אלגברית מדוע ערכו של הביטוי גדול מ-1.

**דרך ב':** אלגברה

על פי הגדרת הפעולה #, יש לחבר את כל המספרים השלמים מ-1 ועד למספר עצמו.

$$\#(k) - 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 = 2 + 3 + \dots + k$$

$$\#(k - 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)$$

המונה הוא סכום של כל המספרים השלמים מ-2 ועד  $k$ .

המכנה הוא סכום של כל המספרים מ-1 ועד  $(k - 1)$ .

על מנת לקבוע האם ערכו של הביטוי גדול, קטן או שווה ל-1, עלינו לקבוע מי גדול יותר – המונה או המכנה.

סכום המספרים במונה בהכרח גדול מסכום המספרים במכנה, מכיוון שהמספר אשר נמצא במכנה ואינו

נמצא במונה הוא 1 ואילו המספר שנמצא במונה ואינו נמצא במכנה הוא  $k$ .

מכיוון שעל פי הנתון  $k$  גדול מ-1, הרי שבהכרח הביטוי שבמונה גדול מהביטוי שבמכנה.

**תשובה (1).**

**7.** **השאלה:**  $\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 - \frac{x^2+y^2}{x^2} = ?$  ( $x \neq 0$ )

**פתרון:** נפשט את הביטוי באמצעות פתיחת סוגריים של האיבר הראשון, ונקבל:  $\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 - \frac{x^2+y^2}{x^2}$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2} - \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

מכיוון שלשני האיברים יש מכנה זהה, ניתן לחבר את המונים, נקבל:

$$\frac{2xy}{x^2} \leftarrow \frac{x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2}{x^2} \leftarrow \frac{x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + y^2)}{x^2}$$

$$\frac{2y}{x} \leftarrow \frac{2xy}{x^2}$$

נצמצם ב- $x$  את המונה והמכנה, ונקבל

**תשובה (2).**

8. השאלה: נתון:  $0 < x, y, z, w$

$$a = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

**פתרון:** מבט בתשובות ילמד אותנו שעלינו לקבוע כיצד שינוי בכל אחד מהנעלמים ישפיע על גודלו של  $a$ . נתבונן בתשובות:

**תשובה (1):** כאשר מקטינים את ערכו של  $x$ , מקטינים את המונה של השבר  $\frac{x}{y}$ . הקטנת המונה גורמת לשבר

כולו לקטון. מכאן שהמונה של  $a$  קטן, ולכן  $a$  גם כן קטן. תשובה (1) נפסלת.

**תשובה (2):** כאשר מגדילים את ערכו של  $y$ , מגדילים את המכנה של השבר  $\frac{x}{y}$ . הגדלת המכנה גורמת לשבר

כולו לקטון. מכאן שהמונה של  $a$  קטן, ולכן  $a$  גם כן קטן. זו התשובה הנכונה.

**תשובה (2).**

9. השאלה:  $?$   $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = ?$

**פתרון:** בחיבור/חיסור יש לחפש גורם משותף.

על מנת להוציא גורם משותף נפרק את  $\sqrt{15}$  ל-  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$ , ונקבל:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \leftarrow \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \leftarrow \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

נצמצם את הביטוי שבמונה ובמכנה ב-  $\sqrt{3}$ , ונקבל:  $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} \leftarrow \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$

**תשובה (1).**

10. השאלה:  $?$   $(21^2 - 21) - (20^2 - 20) = ?$

**פתרון:** הביטוי המבוקש מורכב משני ביטויים. בכל אחד מהם ניתן להוציא גורם משותף. נעשה זאת בכל אחד מהביטויים בנפרד על מנת לפשט את הביטוי.

$$21 \cdot 20 \leftarrow 21 \cdot (21 - 1) \leftarrow 21^2 - 21$$

$$20 \cdot 19 \leftarrow 20 \cdot (20 - 1) \leftarrow 20^2 - 20$$

כעת 'נרכיב' מחדש את הביטוי:  $(21^2 - 21) - (20^2 - 20) \leftarrow 21 \cdot 20 - 20 \cdot 19$

גם מהביטוי שקיבלנו ניתן להוציא גורם משותף, את המספר 20:

$$40 \leftarrow 20 \cdot 2 \leftarrow 20 \cdot (21 - 19) \leftarrow 21 \cdot 20 - 20 \cdot 19$$

**תשובה (4).**