מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(4)	(4)	(3)	(3)	(3)	(4)	(3)	(4)	(2)

הסברים

1. **השאלה**: x ו-y הם מספרים שלמים. $y < x$.

$x + y = 17$

פתרון: מכיוון שזוהי שאלה של מספרים שלמים אשר נתון כי סכומם 17 ונתון היחס ביניהם יש מספר קטן של זוגות המקיימים את תנאי השאלה. נבדוק מיהם זוגות המספרים (y,x) המקיימים תנאים אלו:
0,17 ; 1,16 ; 2,15 ; 3,14 ; 4,13 ; 5,12 ; 6,11 ; 7,10 ; 8,9.
מצאנו כי y הוא בין 0 ל-8 וכי x הוא בין 9 ל-17.

תשובה (1).

---

2. **השאלה**: לכל שני מספרים a ו- b הוגדרה הפעולה $ כך: $\$(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{2}$

$\frac{\$(2,2) + \$(3,3)}{2} = ?$

פתרון: נפשט את הביטוי לפי הגדרת הפעולה. ראשית נמצא מה ערכו של הביטוי $\$(2,2)$:

$$\$(2,2) = \frac{2^2 + 2^2}{2} = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

כעת נחשב את ערכו של הביטוי $\$(3,3)$: $\$(3,3) = \frac{3^2 + 3^2}{2} = \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$

כעת נציב את ערך הביטויים שקיבלנו בביטוי המקורי, ונקבל: $\frac{\$(2,2) + \$(3,3)}{2} \leftarrow \frac{4+9}{2} \leftarrow \frac{13}{2} \leftarrow 6\frac{1}{2}$.

תשובה (4).

.3 נתון: $x, y \neq 0$

איזה מהביטויים הבאים שווה **תמיד** ל-3?

פתרון:

ביטוי אשר ערכו שווה תמיד ל-3 הוא ביטוי אשר ערכו אינו תלוי בערכם של x ו-y. נפשט כל אחת מן התשובות, ונבדוק במי מהן המשתנים x ו-y מצטמצמים, וערכה שווה תמיד ל-3.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{3x-3y}{x^2-y^2}$. נוציא 3 כגורם משותף במונה, ו׳נתרגם, את המכנה באמצעות נוסחת הכפל המקוצר השלישית, ונקבל: $\frac{3x-3y}{x^2-y^2} \Leftarrow \frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}$. נצמצם את המונה והמכנה ב-$(x-y)$, ונקבל: $\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)} \Leftarrow \frac{3}{(x+y)}$. מכיוון שערך התשובה תלוי בערכם של x ו-y, זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{6(2x-y^2)}{2(y^2-2x)}$. נצמצם את המונה והמכנה ב-2, ונקבל: $\frac{3(2x-y^2)}{(y^2-2x)}$. מכיוון שבמונה ובמכנה יש שני ביטויים שהם מספרים נגדיים, הרי שצמצומם נותן (1-), נצמצם את שני הביטויים ונקבל כי ערך הביטוי הוא (3-). מכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{6(x-3y)}{x-y}$. לא ניתן לבצע כל פעולת צמצום על הביטוי ולפיכך זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{9x+(3y)^2}{3(x+y^2)}$. הביטוי שבמונה שווה ל- $9x+9y^2$, נוציא גורם משותף 9, ונקבל: $\frac{9x+(3y)^2}{3(x+y^2)} \Leftarrow \frac{9(x+y^2)}{3(x+y^2)}$, נצמצם את המונה והמכנה ב-$3(x+y^2)$, ונקבל כי ערך הביטוי הוא 3.

תשובה (4).

שימו לב: ניתן לפתור את השאלה על ידי הצבת ערכים מספרים של x ו-y שונים ובדיקת ערכן של התשובות, כאשר בכל שלב פוסלים מי מהתשובות אשר ערכה המספרי שונה מ-3.

.4 **השאלה**: נתון: $2 = x \cdot (x+2) + (x-1)^2$

$x = ?$

פתרון: נפשט את הביטוי בצד ימין של המשוואה, ונקבל:

$2 = x^2 + 2x + x^2 + 1 - 2x \Leftarrow 2 = 2x^2 + 1$.

נחסר 1 משני האגפים, ונקבל: $1 = 2x^2$

נחלק ב-2, ונקבל: $\frac{1}{2} = x^2$ נוציא שורש משני האגפים, ונקבל: $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = x$

תשובה (3).

---

5. **השאלה:** $\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{4}{2x}+\frac{1}{x}} = ?$ $\quad (x \neq 0)$

פתרון: <u>**דרך א'**</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי $x = 2$ בביטוי, ונקבל: $\frac{4}{3} \leftarrow 2\cdot\frac{2}{3} \leftarrow \frac{2}{\frac{3}{2}} \leftarrow \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{4}{2\cdot 2}+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{4}{2x}+\frac{1}{x}}$

נציב בתשובות $x = 2$ ונקבל כי תשובות (1),(2) ו-(4) נפסלות.

<u>**דרך ב'**</u>: פישוט אלגברי

על מנת לפשט את הביטוי הנתון, נפשט ראשית את המונה ואז את המכנה, ולאחר מכן נתייחס למונה ולמכנה יחדיו.

מונה השבר: $\frac{4}{x} \leftarrow \frac{1+3}{x} \leftarrow \frac{1}{x}+\frac{3}{x}$

מכנה השבר: $\frac{6}{2x} \leftarrow \frac{4+2}{2x} \leftarrow \frac{4}{2x}+\frac{2}{2x} \leftarrow \frac{4}{2x}+\frac{1}{x}$

כעת נחלק את הביטוי שקיבלנו כתוצאה מפישוט המונה בביטוי שנתקבל מפישוט המכנה. כזכור, חלוקה בשבר היא כפל בהופכי של אותו שבר: $\frac{4}{3} \leftarrow \frac{2\cdot 2}{3} \leftarrow \frac{{}^{2}\cancel{4}}{{}_{1}\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{2x}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \leftarrow \frac{\frac{4}{x}}{\frac{6}{2x}}$

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: $a^3 \cdot a^{3y} = \frac{1}{a^{\left(x^2-5y-3\right)}}$ $\quad (1 < a \;\; ; \;\; y \neq 0)$

$x = ?$

פתרון: מכיוון שמדובר במשוואה עם חזקות ברצוננו להגיע למצב של בסיסים שווים על מנת שנוכל להשוות מעריכים.

על פי החוק $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ומכאן ש: $a^3 \cdot a^{3y} = a^{3+3y}$.

על פי חוק החזקה השלילית $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ומכאן ש: $\frac{1}{a^{\left(x^2-5y-3\right)}} \Leftarrow a^{-\left(x^2-5y-3\right)} \Leftarrow a^{-x^2+5y+3}$.

קיבלנו כי: $a^{3+3y} = a^{-x^2+5y+3}$, ומכאן שניתן להשוות את החזקות: $3+3y = -x^2+5y+3$.

נחסר 3 ו-3y משני האגפים, ונקבל: $0 = -x^2+2y$.

נחבר x^2 לשני האגפים, ונקבל: $x^2 = 2y$, נוציא שורש משני האגפים: $x = \sqrt{2y}$.

תשובה (3).

---

7. **השאלה**: נתון: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}=1$ $(x\,,\,y\neq -1)$

$y=?$

פתרון: נכפול את שני האגפים ב-$(x+1)(y+1)$, ונקבל:

$x(y+1)+y(x+1)=(x+1)(y+1)$

$xy+x+xy+y=xy+x+y+1$

נחסר $xy+x+y$ משני האגפים, ונקבל: $xy=1$

נחלק את שני האגפים ב-x, ונקבל: $y=\frac{1}{x}$

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: $4^A\cdot 5^A\cdot 6^A=\sqrt{120}$

$A=?$

פתרון: על מנת לפתור משוואה בחזקות יש להביא את שני אגפי המשוואה למצב שבו הבסיסים זהים. על פי חוק החזקות: $a^m\cdot b^m=(a\cdot b)^m$ ולכן: $(4\cdot 5\cdot 6)^A=120^{\frac{1}{2}}$ ⇦ $120^A=120^{\frac{1}{2}}$, כאשר הבסיסים זהים ניתן להשוות את המעריכים, ומכאן ש: $A=\frac{1}{2}$.

תשובה (3).

---

9. **השאלה**: נתון: y הוא מספר שלם. $0<x,y$

$x^y=x^{-y}$

הביטוי $x\cdot y$ בהכרח שווה ל-

פתרון: כאשר הבסיסים שווים ניתן להשוות את החזקות, כלומר: $y=-y$, נחבר y לשני האגפים, ונקבל כי $2y=0$ ⇦ $y=0$.

קיבלנו כי המשוואה מתקיימת כאשר $y=0$, אולם מכיוון שעל פי הנתון ערכו של y גדול מ-0, לא יתכן שזה הפתרון למשוואה ולכן עלינו למצוא 'הסבר' אחר לשוויון בין שני האגפים.

כאשר הבסיס (x) שווה ל-0 או ל-1 בהכרח השוויון מתקיים. מכיוון שעל פי הנתון x שונה מ-0, הרי שבהכרח $x=1$, ומכאן ש: $x\cdot y=1\cdot y=y$.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: $3^a \cdot 7^a = \sqrt[3]{21^2}$

$a = ?$

פתרון: על מנת לפתור משוואה בחזקות יש להביא את שני אגפי המשוואה למצב שבו הבסיסים זהים.

$$21^a = 21^{\frac{2}{3}} \Leftarrow (3 \cdot 7)^a = 21^{\frac{2}{3}} \Leftarrow 3^a \cdot 7^a = \sqrt[3]{21^2}$$

כאשר הבסיסים זהים ניתן להשוות את המעריכים, כלומר: $a = \frac{2}{3}$.

תשובה (2).