מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(3)	(4)	(1)	(4)	(1)	(4)	(3)	(4)	(1)

הסברים

1. **השאלה**: נתון: $a^3 < a^2 < 9$.

איזה מהמספרים הבאים יכול להיות ערכו של a?

פתרון: נציב כל אחת מהתשובות המוצעות באי-השוויון הנתון.

<u>תשובה (1)</u>: 2-. $(-2)^3 < (-2)^2 < 9 \;\Leftarrow\; -8 < 4 < 9$. מכיוון שתשובה זו מקיימת את אי השוויון, זו התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (1).

---

2. **השאלה**: $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right) = ?$

פתרון: נפשט את הביטוי הנתון באמצעות פישוט כל אחד מן הביטויים שבסוגריים:

$$\frac{1}{3} \leftarrow \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{{}_{1}\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{{}_{1}\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \leftarrow \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

תשובה (3).

---

3. **השאלה**: נתון: $a < b < 0$

איזה מהביטויים הבאים הוא **הקטן** ביותר?

פתרון: ראשית נבדוק את 'סימנן' של התשובות המוצעות.
תשובות (2) ו-(4) הן שליליות ותשובות (1) ו-(3) חיוביות. מכיוון שנתבקשנו למצוא את הביטוי הקטן ביותר, הרי שניתן לפסול את התשובות החיוביות, כלומר תשובות (1) ו-(3). עלינו למצוא מי מבין המספרים השליליים $\frac{1}{a}$ ו- $\frac{1}{b}$ קטן יותר.

על מנת למצוא מי מהביטויים קטן יותר נציב $a = -2$ ו- $b = -1$, ונקבל כי: $\frac{1}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{-1} = -1$. קיבלנו כי הביטוי הקטן יותר הוא $\frac{1}{b}$.

תשובה (4).

---

4. **השאלה** : A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות <u>שונות</u> בין 0 ל-9.

$A - C = 2$

$ABC - CBA = ?$

פתרון : בשאלות מסוג זה דרך הפתרון הקלה ביותר היא דרך הצבת דוגמה מספרית.

נציב כי $A = 4$; $B = 3$; $C = 2$

$ABC - CBA = 432 - 234 = 198$

תשובה (1).

---

5. **השאלה** : נתון : $0 < x < y < z < 1$

ערכו של איזה מהביטויים הבאים הוא **הגדול** ביותר?

<u>דרך א'</u> : הצבת דוגמה מספרית.

שאלות אשר בהן אנו נשאלים ערכו של מי מהביטויים הוא הגדול ביותר, ניתנות לפתרון בקלות באמצעות הצבת דוגמה מספרית. נציב כי : $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{3}$ ו- $z = \frac{1}{2}$.

<u>תשובה (1)</u> : $x + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}$.

<u>תשובה (2)</u> : $y + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}$.

<u>תשובה (3)</u> : $z + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$.

<u>תשובה (4)</u> : $z + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$.

מצאנו כי ערכה של תשובה (4) הוא הגדול ביותר.

פתרון : **<u>דרך ב'</u>** : הבנה אלגברית.

הביטויים המוצעים בתשובות דומים זה לזה. כל הביטויים מורכבים משני מחוברים.

המחובר האחד הוא שבר הקטן מ-1, והאחר מספר הגדול מ-1.

א. מבין כל השברים המחוברים הקטנים מ-1. על פי נתוני השאלה, השבר הגדול ביותר הוא z.

ב. לגבי המחוברים הגדולים מ-1. כולם מופיעים כשבר אשר המונה שלו הוא 1 והמכנה שלו הוא שבר.

מכיוון שכאשר שברים הם בעלי מונים שווים, הרי שהשבר בעל המכנה הקטן ביותר הוא בעל הערך הגדול ביותר, הרי שמכול המחוברים הגדולים מ-1, הביטוי $\frac{1}{x}$ הוא הביטוי הגדול ביותר.

תשובה (4) מורכבת מחיבור בין שני הביטויים הגדולים ביותר ולכן היא בעלת הערך הגדול ביותר.

תשובה (4).

---

6. **השאלה:** נתון: $0 < a^3 - b^3$
$0 < a$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בוודאות**?

פתרון: הבנה אלגברית
על פי הנתון $0 < a^3 - b^3$. נוסיף b^3 לשני האגפים, ונקבל כי: $b^3 < a^3$. חזקה אי-זוגית אינה משנה סימן, ומכיוון שנתון כי a הוא מספר חיובי, הרי ש- a^3 אך הוא ביטוי חיובי. b יכול להיות מספר חיובי כלשהו אשר קטן בחזקה שלישית מ- a^3 ומכאן שהוא קטן מ-a או מספר שלילי, אולם בכל מקרה $b < a$.

תשובה (1).

---

7. **השאלה**: הפעולה \$ מוגדרת בעבור כל שני מספרים באופן הבא: $a\$b = a + b$.
הפעולה @ מוגדרת בעבור כל שני מספרים באופן הבא: $a @ b = a \cdot b$.

בעבור איזה מזוגות המספרים הבאים **לא** יכולה להתקיים המשוואה $a\$b = a @ b$?

פתרון: נציב את זוגות המספרים המוצעים בתשובות בפעולות המומצאות הנתונות, ונבדוק במי מהן המשוואה לא יכולה להתקיים, כלומר, לאיזו מהמשוואות שנוצרו אין פתרון.

<u>תשובה (1)</u>: -1,x. $-1\$x = -1 @ x$ ⇦ $-1 + x = -1 \cdot x$ ⇦ $-1 + x = -x$. נחסר x משני האגפים, ונקבל: $-1 = -2x$, נחלק ב-(-2), ונקבל: $\frac{1}{2} = x$. מכיוון שמצאנו כי קיים ערך של x המקיים את המשוואה, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: 2,x. $2\$x = 2 @ x$ ⇦ $2 + x = 2 \cdot x$. נחסר x משני האגפים, ונקבל: $2 = x$. מכיוון שמצאנו כי קיים ערך של x המקיים את המשוואה, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: 0,x. $0\$x = 0 @ x$ ⇦ $0 + x = 0 \cdot x$ ⇦ $x = 0$. מכיוון שמצאנו כי קיים ערך של x המקיים את המשוואה, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (4)</u>: 1,x. $1\$x = 1 @ x$ ⇦ $1 + x = 1 \cdot x$ ⇦ $1 + x = x$, נחסר x משני האגפים, ונקבל: $1 = 0$. מכיוון שאין כל ערך המקיים את המשוואה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: נתון: $32^{x+8} = 4^{3x+5}$
$x = ?$

פתרון: בנתון מופיעה משוואה שבה הנעלם x נמצא **במעריך** החזקה. במצבים כאלה עלינו להגיע לבסיס זהה בשני צדי המשוואה. במקרה הזה ניתן לראות כי הבסיס המשותף של 4 ו-32 הוא 2. נבטא את שני האגפים באמצעות בסיס זה: $32^{x+8} = 4^{3x+5}$ ⇦ $\left(2^5\right)^{x+8} = \left(2^2\right)^{3x+5}$. נזכור שכאשר יש חזקה על חזקה ניתן להכפיל את המעריכים: $2^{5(x+8)} = 2^{2(3x+5)}$. כאשר שני האגפים בעלי בסיס זהה, ניתן להסיק כי בהכרח המעריכים בשני צדי המשוואה שווים זה לזה, ומכאן שניתן לכתוב את המשוואה: $5(x+8) = 2(3x+5)$.
נפתח סוגריים ונקבל: $5x + 40 = 6x + 10$. נחסר 5x ו-10 משני האגפים, ונקבל: $30 = x$.

תשובה (3).

.9 **השאלה**: x הוא מספר שלם וחיובי.

מה מהבאים נכון **בהכרח** לגבי ערכו של הביטוי $x(3+x)(2-x)$?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית
x הוא מספר שלם וחיובי. אם נציב כי x שווה ל-1, נקבל מכפלה של שלושה גורמים חיוביים ומכאן שערכו של הביטוי חיובי, ותשובות (2) ו-(3) נפסלות.
אם נציב כי x שווה ל-2, נקבל כי ערכו של אחד הגורמים במכפלה שווה ל-0, ומכאן שערכו של הביטוי שווה אף הוא ל-0. פסלנו את תשובה (1), ומכאן שהתשובה הנכונה היא (4).

תשובה (4).

.10 **השאלה**: $\left(a^3\right)^y = a^{y+z}$ $\quad (1<a,y,z)$

$\sqrt[z]{a^y} = ?$

פתרון: על מנת לפתור משוואה בחזקות יש 'להביא' את שני אגפי המשוואה למצב שבו הבסיסים זהים.

על פי החוק $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$ ולפיכך ניתן לפשט את הנתון: $\left(a^3\right)^y \leftarrow a^{3y}$.

קיבלנו: $a^{3y} = a^{y+z}$. כאשר הבסיסים זהים ניתן להשוות את המעריכים, כלומר: $3y = y+z \Leftarrow 2y = z$.

$\sqrt[z]{a^y} = a^{\frac{y}{z}} = a^{\frac{y}{2y}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

תשובה (1).
