מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(3)	(4)	(1)	(1)	(2)	(1)	(4)	(4)	(3)

הסברים

1. **השאלה**: נתון: $x^2 < y$

$y < x^3$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: $1 < x$. נציב למשל כי $x = 2$ באי-השוויון $x^2 < y$, ונקבל כי $4 < y$.

כעת נציב כי $x = 2$ באי-השוויון השני, ונמצא כי y קטן מ- x^3 השווה ל-8 $\left(x^3 = 2^3 =\right)$.

מצאנו כי y הוא מספר שלם הקטן מ-8 והגדול מ-4, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < x < 1$.

נציב למשל כי $x = \frac{1}{2}$ באי-השוויון $x^2 < y$, ונקבל כי $\frac{1}{4} < y$.

נציב כי $x = \frac{1}{2}$ באי-השוויון השני, ונמצא כי y קטן מ- x^3 השווה ל- $\frac{1}{8}$ $\left(x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 =\right)$.

מצאנו כי y צריך להיות גדול מ- $\frac{1}{4}$ וקטן מ- $\frac{1}{8}$, מצב שלא יתכן, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $-1 < x < 0$.

נציב למשל כי $x = -\frac{1}{2}$ באי-השוויון $x^2 < y$, ונקבל כי $\frac{1}{4} < y$.

נציב כי $x = -\frac{1}{2}$ באי-השוויון השני, ונמצא כי y קטן מ- x^3 השווה ל- $-\frac{1}{8}$ $\left(x^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =\right)$.

מצאנו כי y צריך להיות גדול מ- $\frac{1}{4}$ וקטן מ- $-\frac{1}{8}$, מצב שלא יתכן, ולכן התשובה נפסלת.

באותו אופן נמצא כי גם תשובה (4) לא תיתכן, מכיוון ש-x בחזקת 2 הוא חיובי, ו- x^3 הוא מספר שלילי. לא יתכן כי y יהיה גדול ממספר חיובי וקטן ממספר שלילי, ולכן גם תשובה זו נפסלת, ומכאן שהתשובה היחידה שיכולה לקיים את הנתון היא כאשר מדובר ב-x הגדול מ-1.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

על פי הנתון הראשון $x^2 < y$. מכיוון ש-y גדול ממספר בריבוע, הרי שהוא בהכרח מספר חיובי. ו

על פי הנתון השני $y < x^3$. מכיוון ש- x^3 גדול מ-y אשר מצאנו כי הוא חיובי, הרי שגם x^3 בהכרח חיובי.

מכיוון שחזקה שלישית 'משמרת' את הסימן, הרי שמכאן ניתן להסיק שגם x חיובי. כעת עלינו לקבוע אם x הוא שבר חיובי או מספר גדול מ-1.

אם נשלב את שני הנתונים (באמצעות y המופיע בשניהם) עולה ש: $x^2 < y < x^3$.

כלומר: $x^2 < x^3$. מכיוון ששבר חיובי קטן ככל שמעלים אותו בחזקה גדולה יותר, x לא יכול להיות שבר, ומכאן שהוא מספר הגדול מ-1.

תשובה (1).

---

2. **השאלה**: איזה מהביטויים הבאים הוא אי-זוגי?

פתרון: נפשט כל אחת מהתשובות המוצעות על ידי פירוק הבסיסים למספרים ראשוניים .
עלינו למצוא תשובה שאחרי צמצומה לא ישארו בה כלל גורמים זוגיים.

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{5^2 \cdot 2^3}{10}$. אם נפרק את המכנה, נקבל: $\frac{5^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 5}$. נצמצם 5 ו-2 מהמונה ומהמכנה, ונקבל: $5 \cdot 2^2$.
כאשר יש במכפלה גורם זוגי כלשהו, תוצאת המכפלה בהכרח זוגית.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{2^3 \cdot 5^4}{25}$. מכיוון שלאחר צמצום המכנה (25) עם המונה נקבל גורמים זוגיים במכפלה $\left(2^3 \cdot 5^2\right)$,
ניתן להסיק כי הביטוי שיתקבל יהיה בהכרח זוגי.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{3^2 \cdot 5^4}{15}$. בביטוי המתואר בתשובה זו אין כלל גורמים זוגיים ולכן לאחר צמצום המכנה ניוותר עם גורמים אי-זוגיים בלבד במכפלה. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

.3 **השאלה**: הפעולה $ מוגדרת עבור כל מספר שונה מ-2 באופן הבא: $\$(a) = a \cdot (a-2)$.
כמה ערכים שונים של x מקיימים את המשוואה: $\$(x) = \$(x-2)$?
פתרון: נפשט כל אחד מאגפי המשוואה הנתונה לפי הגדרת פעולת ה-$:
<u>אגף שמאל</u>: $\$(x) = x \cdot (x-2)$
<u>אגף ימין</u>: $\$(x-2) = (x-2) \cdot (x-4)$
קיבלנו כי: $x \cdot (x-2) = (x-2) \cdot (x-4)$
מכיוון שנתון כי x שונה מ-2, ניתן לחלק את שני האגפים בביטוי $(x-2)$, אשר בהכרח שונה מ-0, נקבל:
$x = x - 4$
נחסר x משני האגפים, ונקבל $0 = -4$.
זו משוואה שהיא 'פסוק שקר'. אין אף x המקיים משוואה זו.
תשובה (4).

.4 **השאלה**: סכומם של x מספרים שלמים, חיוביים <u>**ושונים**</u> זה מזה הוא 25.

מה מהבאים **לא** יכול להיות ערכו של x?

פתרון: על מנת למצוא מה לא יכול להיות x, נמצא מהו ה-x המינימלי ומהו ה-x המקסימלי.
<u>מינימום</u>: מספר המספרים החיוביים והשונים אשר סכומם הוא 25 יכול להיות 2, למשל 12 ו-13.
<u>מקסימום</u>: על מנת למצוא את מספר המספרים החיוביים והשונים המקסימלי, נחבר את המספרים החיוביים הקטנים ביותר: 1, 2 וכו' סכומם של 1, 2, 3, 4 ו-5 הוא 15 $(1+2+3+4+5=)$. מכיוון שאם נחבר למספרים אלו כל מספר שהוא הקטן מ-10 נצטרך 'להשלים' ל-25 באמצעות אחד המספרים ה'קטנים' שכבר עשינו בהם שימוש, הרי שניתן להוסיף ל-5 מספרים אלו את 10 בלבד. המספר המקסימלי של המחוברים השונים הוא 6, ומכאן שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

תשובה (1).

.5 **השאלה:** n הוא מספר שלם וגדול מ-1.

איזו מהטענות הבאות נכונה לגבי הביטוי $\frac{n}{n+1}$?

פתרון: מכיוון שכל התשובות מתייחסות לערך הביטוי כאשר n גדל, נבדוק באמצעות הצבת דוגמה מספרית כיצד משתנה ערך הביטוי ככל שמגדילים את n.
כאשר $n = 2$, ערך הביטוי שווה ל- $\frac{2}{3}$ $\left(=\frac{2}{2+1}\right)$.
כאשר $n = 3$, ערך הביטוי שווה ל- $\frac{3}{4}$ $\left(=\frac{3}{3+1}\right)$.
כאשר $n = 4$, ערך הביטוי שווה ל- $\frac{4}{5}$ $\left(=\frac{4}{4+1}\right)$.

מכיוון ש- $\frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, הרי שניתן לקבוע כי ערך הביטוי הולך וגדֵל ככל ש-n גדֵל.

תשובה (1).

---

6. **השאלה**: a, b ו-c מספרים שלמים.

$c = 21a + 30b$

איזה מהמספרים הבאים **יכול** להיות ערכו של c?

פתרון: נפשט את המשוואה הנתונה על ידי הוצאת גורם משותף.

$c = 3 \cdot (7a + 10b) \Leftarrow c = 21a + 30b$

מכיוון ש-c הוא כפולה של 3, נבדוק כיצד ניתן להגיע לתשובה היחידה המהווה כפולה של 3, תשובה (3).
אם נציב כי $a = -1$ ו- $b = 1$, נקבל כי $c = 9$.

תשובה (2).

---

7. **השאלה**: $\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}}}\right)^4 = ?$

פתרון: על מנת לפשט את הביטוי נפרק את חזקת 4 באופן הבא: $\left(\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}}}\right)^2\right)^2$.

מכיוון ששורש ריבועי וחזקה ריבועית הן פעולות נגדיות המבטלות זו את זו, הרי שניתן לפשט את הביטוי ל: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2$.

כעת ניתן לפשט את הביטוי על ידי פתיחת הסוגרים באמצעות נוסחת הכפל המקוצר או על ידי חיבור שני הביטויים שבסוגריים באמצעות מכנה משותף: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{\sqrt{24}}\right)^2$.

נפתח את הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר הראשונה:

$$\frac{11 + 2\sqrt{24}}{24} \leftarrow \frac{8 + 3 + 2\sqrt{8}\sqrt{3}}{24} \leftarrow \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{\sqrt{24}}\right)^2$$

הביטוי שקיבלנו ניתן לפישוט באמצעות פירוק $\sqrt{24}$ למכפלה $2\sqrt{6} \leftarrow \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \leftarrow \sqrt{4 \cdot 6} \leftarrow \sqrt{24}$

נציב את הערך שקיבלנו בביטוי: $\frac{11 + 4\sqrt{6}}{24} \leftarrow \frac{11 + 2 \cdot 2\sqrt{6}}{24} \leftarrow \frac{11 + 2\sqrt{24}}{24}$.

תשובה (1).

---

8. **השאלה**: נתון: $(x+2)^2=(y-2)^2$ $(0<x,y)$

$x-y=?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

כפי שלמדנו לכל משוואה ריבועית יש שני פתרונות: $x+2=y-2$ וכן: $x+2=-(y-2)$.

א) $x+2=y-2$ נחסר y ו-2 משני האגפים, ונקבל: $x-y=-4$.

ב) $x+2=-(y-2)$ ⇦ $x+2=-y+2$. מכיוון שלא ניתן לחלץ ממשוואה זו את הביטוי $x-y$, הרי שהפתרון היחיד למשוואה הוא: $x-y=-4$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב שני מספרים חיוביים המקיימים את המשוואה הנתונה. למשל $x=1$ ו- $y=5$.

הביטוי $(x-y)$ שווה ל- -4 $(x-y=1-5=)$, ומכאן שניתן לפסול את תשובות (1), (2) ו-(3).

תשובה (4).

---

9. **השאלה**: x הוא מספר שלם וחיובי.

נתון: $2^x-2^{x+1}=-2^x+2^{x+1}$

כמה ערכי x **שונים** מקיימים את המשוואה?

פתרון: על מנת לפתור משוואה בחזקות יש להביא את שני אגפי המשוואה למצב שבו הבסיסים זהים.

כאשר הבסיסים זהים ניתן להשוות את המעריכים. נחבר 2^x ו- 2^{x+1} לשני האגפים של המשוואה, ונקבל:

$2^x+2^x=2^{x+1}+2^{x+1}$ ⇦ $2\cdot 2^x=2\cdot 2^{x+1}$ ⇦ $2^1\cdot 2^x=2^1\cdot 2^{x+1}$ ⇦ $2^{x+1}=2^{x+1+1}$

על מנת שהמשוואה: $2^{x+1}=2^{x+2}$ תתקיים, המעריכים צריכים להיות שווים, כלומר $x+1$ צריך להיות שווה ל- $x+2$. מכיוון שלמשוואה: $x+1=x+2$ אין כל פתרון, הרי שאין פתרון גם למשוואה המקורית.

תשובה (4).

---

10. **השאלה**: הפעולה \$ מוגדרת בעבור כל מספר חיובי באופן הבא: סכום הספרות של $x = \$(x)$.

לדוגמה, $\$(15)=6$, מכיוון שסכום הספרות של המספר 15 הוא $(1+5)$, כלומר 6.

$\$(10a+10b)=?$

פתרון: כפל של מספר מסוים ב-10 על אף שהוא מגדיל את ערכו, אינו משנה את סכום ספרותיו, שכן הספרה המתווספת למספר היא 0, ומכאן שסכום הספרות של 10a ו-10b יחדיו שווה לסכום הספרות של a ו-b.

תשובה (3).

שימו לב: ניתן לפתור את השאלה באמצעות הצבת דוגמה מספרית.

נציב כי $a=1$ וכי $b=2$.

$\$(10a+10b)=\$(10\cdot 1+10\cdot 2)=\$(10+20)=\$(30)=3+0=3$

כאשר נציב את המספרים שבחרנו בתשובות נפסול את תשובות (1), (2) ו-(4).
