

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(4)	(2)	(2)	(2)	(2)	(4)	(1)	(2)	(4)	(3)	תשובה

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	שאלה
(4)	(3)	(1)	(4)	(4)	(3)	(2)	(3)	(4)	(3)	תשובה

25	24	23	22	21	שאלה
(2)	(2)	(1)	(2)	(4)	תשובה

הסברים

1. השאלה: כמה מספרים אי-זוגיים שאינם ראשוניים יש בין 30 ל-40:
פתרון: יש בסך הכול 5 מספרים אי-זוגיים בין 30 ל-40: 31, 33, 35, 37 ו-39.
 מכיוון ש-31 ו-37 הם ראשוניים, הרי שבסך הכול ישנם 3 מספרים אי-זוגיים שאינם ראשוניים בין 30 ל-40: 33, 35 ו-39.
תשובה (3).

2. השאלה: לכל מספר x הוגדרה הפעולה \$, כך ש- x שווה למספר הראשוני הקטן ביותר השווה או הגדול מ- x .
 $a=11$. כמה ערכים שלמים וחיוביים שונים יכול a לקבל?
פתרון: מכיוון שעל פי הגדרתה, הפעולה \$ למעשה 'מעגלת' כלפי מעלה למספר הראשוני הקרוב ביותר, עלינו לחפש מיהם המספרים השווים או הקטנים מ-11, אשר המספר הראשוני הקטן ביותר השווה או הגדול מהם, הוא 11.
 מספרים אלו הם: 8, 9, 10, 11.
 אין מספרים נוספים, מכיוון ש-7 הוא מספר ראשוני בעצמו, וכאשר 'נפעיל' עליו את פעולת ה-\$ התוצאה תהא המספר הראשוני הקטן ביותר השווה או הגדול ממנו, כלומר 7 עצמו.
תשובה (4).

3. השאלה: נתון: p הוא מספר ראשוני הגדול מ-2.
 $x = p + 2$
 איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח –
פתרון: כל מספר ראשוני הגדול מ-2 הוא בהכרח מספר אי-זוגי. נתון כי $x = p + 2$.
 כלומר x עצמו הוא תוצאת החיבור של מספר אי-זוגי (p) והמספר הזוגי 2.
 כאשר מחברים או מחסרים שני מספרים שונים (זוגי ואי-זוגי) התוצאה היא בהכרח אי-זוגית, מכאן ש- x הוא מספר אי-זוגי.
הערה: ישנם מספרים ראשוניים אשר כאשר נוסף להם 2, נקבל מספר ראשוני אחר. לדוגמה כאשר מוסיפים ל-11 עוד 2 מקבלים 13. אולם לא כל מספר ראשוני אשר מוסיפים לו 2 יתן בהכרח מספר ראשוני. לדוגמה אם p שווה ל-7, כאשר נוסף לו 2 נקבל 9, שהוא מספר אי-זוגי שאינו ראשוני.
תשובה (2).

4. **השאלה:** a הוא מספר ראשוני, x הוא מספר זוגי

$$x = a^3$$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

פתרון: נתון כי x הוא זוגי. על מנת שהמשוואה תתקיים גם הביטוי a^3 חייב להיות זוגי. על מנת שהביטוי a^3 יהיה זוגי, על הבסיס a להיות מספר זוגי. נתון כי a הוא ראשוני. המספר הראשוני היחיד שהוא ראשוני זוגי הוא 2, ומכאן ש- a הוא 2. נתון כי $x = a^3$, ולפיכך מצאנו כי $x = 8$ ($x = 2^3$). נעבור על התשובות ונמצא שהתשובה הנכונה היא תשובה (1).

תשובה (1).

5. **השאלה:** מספר "מעייף" הוא מספר ראשוני אשר סכום כל המספרים הראשוניים הקטנים ממנו הוא מספר ראשוני. איזה מהמספרים הבאים הוא מספר "מעייף"?

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): 13. המספרים הראשוניים הקטנים מ-13 הם 2, 3, 5, 7 ו-11. סכומם של כל המספרים הראשוניים הללו הוא: 28. ומכאן ש-13 אינו מספר "מעייף".

תשובה (2): 7. המספרים הראשוניים הקטנים מ-7 הם 2, 3 ו-5. סכומם של המספרים הראשוניים הללו הוא: 10, ומכאן ש-7 אינו מספר "מעייף".

תשובה (3): 6. המספרים הראשוניים הקטנים מ-6 הם 2, 3 ו-5. סכומם של המספרים הראשוניים הללו הוא: 10, ומכאן ש-6 אינו מספר "מעייף".

תשובה (4): 5. המספרים הראשוניים הקטנים מ-5 הם 2 ו-3. סכומם של המספרים הראשוניים הללו הוא: 5. מצאנו כי 5 הוא מספר "מעייף".

תשובה (4).

6. **השאלה:** x ו- y הם מספרים חיוביים ועוקבים.

$$z = x^2 + y^2$$

z בהכרח -

פתרון: מכיוון ש- x ו- y הם מספרים עוקבים הרי שבהכרח אחד מהם הוא מספר זוגי ואחד מהם הוא מספר אי-זוגי. העלאה בחזקה (שלמה וחיובית) אינה משפיעה על התוצאה מבחינת זוגיות. מכאן שתוצאת העלאת מספר זוגי בכל חזקה (שלמה וחיובית) היא זוגית ותוצאת העלאת מספר אי-זוגי בכל חזקה (שלמה וחיובית) היא אי-זוגית. z הוא סכום של מספר זוגי ומספר אי-זוגי, ומכאן שבהכרח z הוא אי-זוגי.

תשובה (2).

7. **השאלה:** a, b ו-c מספרים שלמים ועוקבים, $a < b < c$.

$$a + b - c = ?$$

פתרון: מכיוון שהמשתנה המופיע בתשובות הוא b, 'נמיר' את כל יתר המשתנים בביטוי המבוקש ל-b.
מכיוון שמדובר במספרים עוקבים, הרי ש: $a = b - 1$; $c = b + 1$

$$\Leftrightarrow (b - 1) + b - (b + 1) \Leftrightarrow a + b - c \text{ , ונקבל: } \Leftrightarrow b - 2$$

תשובה (2).

8. **השאלה:** P ו-Q מספרים ראשוניים. איזו מהטענות הבאות בהכרח אינה נכונה?

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): $P - Q = 4$. כל המספרים הראשוניים, למעט 2, הם אי-זוגיים. ניתן למצוא שני מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 4. לדוגמה: 3 ו-7. תשובה זו אפשרית.

תשובה (2): $P = 3 \cdot Q$. המיוחד במספרים ראשוניים הוא כי לא ניתן לפרקם למכפלה של גורמים למעט המספר עצמו כפול 1, ולפיכך אין מספר ראשוני שווה למכפלת מספר ראשוני אחר ב-3. מכיוון שמצאנו את התשובה הנכונה, אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (2).

9. **השאלה:** P הוא מספר ראשוני דו-ספרתי. מה לא יכולה להיות ספרת האחדות של P?

פתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): 1. 11 הוא מספר ראשוני ודו-ספרתי אשר ספרת האחדות שלו שווה ל-1.

תשובה (2): 2. לא נוכל למצוא מספר ראשוני ודו-ספרתי אשר ספרת האחדות שלו שווה ל-2, שכן מספר כזה יהיה בהכרח זוגי ולכן יתחלק, בנוסף לעצמו ול-1, גם ב-2. מצאנו את התשובה הנכונה, ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (2).

10. **השאלה:** a, b ו-c הם מספרים חיוביים ועוקבים, $a < b < c < d$.

$$(b + c) - (a + d) = ?$$

פתרון: מכיוון שכל התשובות מספריות 'נמיר' את כל המשתנים לאחד המשתנים, למשל ל-a: $b = a + 1$;
 $d = a + 3$; $c = a + 2$ ונציב בביטוי: $(b + c) - (a + d) \Leftrightarrow (a + 1 + a + 2) - (a + a + 3) \Leftrightarrow 0$

$$0 \Leftrightarrow (2a + 3) - (2a + 3)$$

תשובה (4).

11. השאלה: A, B, ו-C הן אותיות המייצגות ספרות עוקבות בין 0 ל-9,

$$C < B < A \text{ ש-כך.}$$

כמה ערכים שונים יכולה לקבל ספרת האחדות של המספר התלת-ספרתי ABC?

פתרון: נבדוק מיהם המספרים התלת-ספרתיים האפשריים על פי נתוני השאלה.

המספרים הללו הם: 210, 321, 432, 543, 654, 765, 876, 987.

בסך הכול 8 מספרים. שלכל אחד מהם ספרת אחדות שונה.

תשובה (3).

12. השאלה: A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות ראשוניות שונות בין 0 ל-9.

AB הוא מספר דו-ספרתי המתחלק ללא שארית ב-6.

$$A = ?$$

פתרון: חוקי אלגברה + בדיקת תשובות

ראשית נתון לגבי AB כי הוא מספר המתחלק ב-6. מספר המתחלק ב-6, מתחלק בהכרח ב-3 וב-2.

סכום ספרותיו של מספר המתחלק ב-3, מתחלק ב-3.

מספר המתחלק ב-2 הוא בהכרח זוגי, ומכאן שספרת האחדות היא בהכרח זוגית.

על פי הנתון A ו-B הן ספרות ראשוניות שונות. ספרת הזוגית הראשונית היחידה היא 2. מצאנו ש-B

בהכרח שווה ל-2 וכי A שונה מ-2, כלומר תשובה (2) יכולה להיפסל כבר כעת. כעת נבדוק את התשובות

המוצעות:

תשובה (1): 5. אם ספרת העשרות של המספר היא 5, הרי שהמספר AB הוא 52. סכום ספרותיו של המספר 52 הוא $(5 + 2) = 7$, כלומר המספר לא מתחלק ב-3, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): 3. אם ספרת העשרות של המספר היא 3, הרי שהמספר AB הוא 32. סכום ספרותיו של המספר 32 הוא $(3 + 2) = 5$, כלומר המספר אינו מתחלק ב-3, ולכן ניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): 7. אם ספרת העשרות של המספר היא 7, הרי שהמספר AB הוא 72. סכום ספרותיו של המספר 72 הוא $(7 + 2) = 9$, כלומר המספר מתחלק ב-3, וב-2. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

13. **השאלה:** נתון: a, b ו- c הם מספרים עוקבים וחיוביים, $a < b < c$.

$$a + b + c = 27$$

$$a \cdot b \cdot c = ?$$

פתרון: מכיוון שנתון כי מדובר במספרים עוקבים, נפתור ראשית את המשוואה ונמצא מי המספרים המקיימים אותה באמצעות 'המרת' כל המשתנים למשתנה אחד, למשל ל- a : $b = a + 1$; $c = a + 2$
 כעת נציב את הערכים במשוואה, ונקבל: $a + b + c = 27 \Leftrightarrow a + a + 1 + a + 2 = 27 \Leftrightarrow 3a + 3 = 27$
 נחסר 3 משני האגפים, ונקבל: $3a = 24$
 נחלק ב-3 את שני האגפים, ונקבל: $a = 8$
 מצאנו כי a שווה ל-8, ומכאן ש- b הוא 9 ו- c שווה ל-10.
 נציב ערכים אלו בביטוי שנתבקשנו למצוא, ונקבל: $a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 9 \cdot 10 \Leftrightarrow 720$.

תשובה (3).

הערה: ממוצע של סדרת מספרים עוקבים הוא ה'איבר האמצעי'.

אם סכום 3 איברים עוקבים שווה ל-27, הרי שהממוצע שלהם שווה ל-9 $\left(\frac{27}{3} = 9\right)$, ומכאן ש- b שווה ל-9, a הקטן ממנו ב-1, שווה ל-8, ו- c שווה ל-10.

14. **השאלה:** P מספר ראשוני הגדול מ-2. איזה מהביטויים הבאים הוא בוודאות זוגי?

פתרון: עוד בטרם נבדוק את התשובות המוצעות, נזכור כי מספר ראשוני הגדול מ-2 הוא בהכרח אי-זוגי. וכי חזקות (שלמות וחיוביות) אינן משפיעות על הזוגיות של מספר.

תשובה (1): P^2 . P הוא מספר אי-זוגי. כאשר מעלים מספר אי-זוגי בכל חזקה שלמה וחיובית, למשל בחזקת 2, התוצאה שתתקבל תהיה אף היא אי-זוגית.

תשובה (2): $(P + 1)^P$. P הוא מספר אי-זוגי. ומכאן ש- $(P + 1)$ הוא מספר זוגי. מספר זוגי בכל חזקה (שלמה וחיובית) הוא זוגי. מצאנו את התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (2).

15. **השאלה:** a ו- b הם מספרים עוקבים.

$$C = \frac{a \cdot b}{2}$$

C הוא בוודאות -

פתרון: **דרך א':** הצבת דוגמה מספרית

נציב כי a שווה ל-1, ו- b שווה ל-2. במקרה זה $C = 1$ $\left(C = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\right)$.

תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות.

דרך ב': הבנה אלגברית

מכיוון שעל פי הנתון a ו- b הם מספרים עוקבים הרי שבוודאות אחד מהם זוגי והאחר אי-זוגי. מכפלת a ב- b היא בהכרח זוגית ולפיכך תתחלק ב-2 ללא שארית. מכאן ש- C הוא בוודאות מספר שלם.

תשובה (3).

16. השאלה: a, b ו- c הם מספרים שלמים ועוקבים ; $a < b < c$.

$$a + b + 2c = ?$$

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית + בדיקת תשובות

נציב למשל a -שווה ל-1, b שווה ל-2 ו- c שווה ל-3, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא $a + b + 2c$ ⇔ $1 + 2 + 2 \cdot 3$.9

כעת נציב $b = 2$ בכל אחת מהתשובות, ונפסול כל תשובה שערכה שונה מ-9. תשובות (1), (2), ו-(3) נפסלות.

דרך ב': הבנה אלגברית

מכיוון שכל התשובות עושות שימוש אך ורק במשתנה b 'נמיר' את כל המשתנים בביטוי ל- b : $a = b - 1$;

$$c = b + 1, \text{ ונקבל: } a + b + 2c \Leftrightarrow b - 1 + b + 2(b + 1) \Leftrightarrow 2b - 1 + 2b + 2 \Leftrightarrow 4b + 1$$

תשובה (4).

17. השאלה: p ו- q הם מספרים ראשוניים.

$$p - q = 5$$

איזו מהטענות הבאות נכונה?

פתרון: הבנה אלגברית + מציאת דוגמה מספרית

ניתן לחפש מיהם שני המספרים הראשוניים המקיימים את הנתון, אולם רצוי לזכור כי: כל המספרים הראשוניים, מלבד 2, הם אי-זוגיים. מכאן שההפרש בין כל שני מספרים ראשוניים הגדולים מ-2 הוא הפרש בין שני מספרים אי-זוגיים, ולכן הוא בהכרח מספר זוגי. נתון כי ההפרש בין p ו- q , שהם שני מספרים ראשוניים, הוא 5, כלומר הפרש שהוא אי-זוגי, ומכאן שאחד מהמספרים הוא זוגי והאחר אי-זוגי. המספר הראשוני היחיד הזוגי הוא 2, ומכאן שהמספרים היחידים האפשריים על מנת לקיים משוואה זו הם $q = 2$ ו- $p = 7$.

תשובה (4).

18. השאלה: נתונים p ו- q שני מספרים ראשוניים $2 < p < q$. מה מהבאים נכון בהכרח?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב שני מספרים המקיימים את הנתונים, ראשונים הגדולים מ-2, למשל p שווה ל-3 ו- q שווה ל-5, תשובות (2), (3) ו-(4) נפסלות.

דרך ב': הבנה אלגברית

מכיוון ש- p ו- q מספרים ראשוניים הגדולים מ-2 הם בהכרח מספרים אי-זוגיים.

נבדוק את התשובות המוצעות:

תשובה (1): $p + q$ הוא מספר זוגי. סכום של שני מספרים אי-זוגיים הוא בהכרח זוגי.

מצאנו תשובה נכונה ולכן אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (1).

19. השאלה: x ו- y מספרים עוקבים.

$$x + y + m = 10$$

m הוא בוודאות-

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נתון כי x ו- y הם מספרים עוקבים. נציב למשל כי x הוא 1 ו- y הוא 2, ונקבל: $1 + 2 + m = 10$

$$3 + m = 10 \Leftrightarrow m = 7$$

מצאנו כי במקרה כזה כי ערכו של m הוא 7, ומכאן שתשובה (4) בלבד נפסלת.

כעת נציב דוגמה אחרת, למשל כי x שווה ל-5 ו- y שווה ל-6, ונקבל: $5 + 6 + m = 10 \Leftrightarrow 11 + m = 10$

$m = -1$. מצאנו כי במקרה כזה כי ערכו של m הוא -1, ומכאן שתשובות (1) ו-(2) נפסלות.

דרך ב': הבנה אלגברית

x ו- y הם מספרים עוקבים, ומכאן שבהכרח אחד מהם הוא מספר זוגי והאחר מספר אי-זוגי. סכומם של שני

מספרים שונים (זוגי ואי-זוגי) הוא בהכרח מספר אי-זוגי.

נתון כי תוצאת חיבור m לסכומם של x ו- y , שהוא כאמור ביטוי אי-זוגי, היא 10, כלומר מספר זוגי.

מכאן ש- m בהכרח הוא מספר אי-זוגי.

תשובה (3).

20. השאלה: אלוון רשם במחברתו 7 מספרים עוקבים. כמה מספרים ראשוניים, לכל היותר, רשם אלוון?

פתרון: כל המספרים הראשוניים, למעט 2, הם אי-זוגיים. על מנת ש-7 המספרים העוקבים שירשום אלוון

יכללו את המספר המקסימלי של המספרים הראשוניים מומלץ להתחיל ב-2.

7 מספרים עוקבים מ-2 ואילך הם: 2, 3, 4, 5, 6, 7 ו-8.

4 מהמספרים שרשם אלוון המספרים הראשוניים הם: 2, 3, 5 ו-7.

תשובה (4).

21. השאלה: בקבוצה A נמצאים כל המספרים הראשוניים הגדולים מ-10 וקטנים מ-25.

בקבוצה B נמצאים כל המספרים הראשוניים הגדולים מ-12 וקטנים מ-30.

בקבוצה C נמצאים כל המספרים הנמצאים גם בקבוצה A וגם בקבוצה B.

כמה מספרים נמצאים בקבוצה C?

פתרון: קבוצה A כוללת את המספרים: 11, 13, 17, 19 ו-23.

קבוצה B כוללת את המספרים: 13, 17, 19, 23 ו-29.

קבוצה C כוללת את המספרים הנמצאים בשתי הקבוצות, כלומר 4 מספרים (13, 17, 19 ו-23).

תשובה (4).

22. השאלה: x, y ו- z הם שלושה מספרים עוקבים שסכומם הוא 30 ($z < y < x$).

$$\frac{x+z}{y} = ?$$

פתרון: נתון כי x, y ו- z הם שלושה מספרים עוקבים שסכומם הוא 30 , כלומר $x + y + z = 30$ ($z < y < x$).

. נמיר את כל המשתנים למשתנה אחד על מנת למצוא את ערכם של המשתנים. $y = z + 1$; $x = z + 2$.

נציב ערכים אלו במשוואה, ונקבל: $x + y + z = 30 \Leftrightarrow z + z + 1 + z + 2 = 30 \Leftrightarrow 3z + 3 = 30$

$$\Leftrightarrow 3z = 27 \Leftrightarrow z = 9$$

מצאנו כי z שווה ל-9, ומכאן ש- y שווה ל-10 ו- x שווה ל-11.

נציב ערכים אלו בביטוי עליו נשאלנו, ונקבל: $\frac{x+z}{y} = \frac{11+9}{10} = \frac{20}{10} = 2$.

תשובה (2).

הערה: ממוצע של סדרת מספרים עוקבים הוא האיבר האמצעי.

אם סכום 3 איברים עוקבים שווה ל-30, הרי שהממוצע שלהם שווה ל-10 ($\frac{30}{3} = 10$), ומכאן ש- y שווה ל-10,

z הקטן ממנו ב-1, שווה ל-9, ו- x שווה ל-11.

23. השאלה: x הוא סכומם של שלושה מספרים חיוביים ועוקבים.

אהרון: " x הוא כפולה של 3."

יצחק: " x הוא כפולה של 4."

נחום: " x הוא כפולה של 6."

מי מהשלושה צודק?

פתרון: בכדי לבדוק מי מהשלושה צודק, נסמן את שלושת המספרים העוקבים ב- $a, a+1$ ו- $a+2$ (על פי

ההפרשים הקבועים בין מספרים עוקבים), ונחשב את ערכו של x :

$$x = a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$$

בכדי לדעת במה x מתחלק (כלומר של איזה מספרים הוא כפולה), נהפוך את הביטוי שקיבלנו למכפלה על-

ידי הוצאת גורם משותף מחוץ לסוגריים: $x = 3a + 3 = 3(a + 1)$.

על פי המכפלה שקיבלנו x הוא כפולה של 3. כלומר, רק אהרון צודק.

שימו לב: ניתן להגיע לתשובה הנכונה בקלות באמצעות הצבת שלושה מספרים עוקבים ופסילת תשובות

בעזרתם.

תשובה (1).

24. השאלה: x הוא מספר שלם השונה מ-0.

איזו מהקביעות הבאות נכונה בהכרח לגבי ערכו של הביטוי $x^2 + (x + 1)^2$?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב למשל כי x שווה ל-3, ונקבל כי הביטוי שווה ל-25. תשובות (1), (3) ו-(4) נפסלות.

דרך ב': הבנה אלגברית

התשובות מכוונות אותנו לגלות את תכונות הביטוי המבוקש: ראשוני, זוגי וכו'. לצורך כך נפשט את הביטוי. ראשית נפתח סוגריים על פי נוסחאות הכפל המקוצר, ונקבל: $x^2 + x^2 + 2x + 1$. נכנס איברים, ונקבל: $2x^2 + 2x + 1$. לא ניתן להמשיך ולפשט ולכן נציב דוגמה מספרית או נבדוק את התשובות.

תשובה (1): הוא מספר ראשוני. נציב כי x שווה ל-3 ונמצא כי הביטוי שווה מכיוון שאיננו יודעים את ערכו של x , לא ניתן לקבוע אם הביטוי ראשוני או לא. התשובה נפסלת.

תשובה (2): הוא מספר אי-זוגי. אמנם איננו יודעים את ערכו של x , אך מכיוון ש- x שלם, ניתן לומר בוודאות שהאיברים $2x^2$ ו- $2x$ הם זוגיים (מכפלה של 2 במספר שלם כלשהו תמיד זוגית). סכום של שני מספרים זוגיים הוא זוגי. כאשר נוסיף לסכום זה 1, נקבל בהכרח מספר אי-זוגי. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

25. השאלה: a ו- b הם מספרים שליליים ועוקבים.

הביטוי $(a + b)$ בהכרח -

פתרון: נתבונן בתשובות:

תשובה (1): חיובי. סכום של שני מספרים שליליים הוא שלילי, ולכן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): אי-זוגי. סכומם של שני מספרים עוקבים הוא תמיד אי-זוגי, שכן אחד מהמספרים בהכרח זוגי והשני מספר אי-זוגי. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).