

מפתח תשובות נכונות

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(3)	(4)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	תשובה

הסברים

1. השאלה: a, b, c הם שלושה מספרים שהממוצע של כל זוג מתוכם הוא 5. כמה מתוך שלושת המספרים בהכרח שווים ל-5?

פתרון: מכיוון שנתון כי הממוצע של כל זוג מספרים מבין המספרים a, b ו-c שווה ל-5, ניתן באמצעות

$$\text{שימוש בנוסחת הממוצע לקבוע כי: } \frac{a+b}{2} = 5 ; \frac{a+c}{2} = 5 \text{ ו- } \frac{b+c}{2} = 5$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב-2, ונחסר b על מנת לחלץ מהמשוואה את a, ונקבל: $a = 10 - b$.

נכפול את המשוואה השנייה ב-2, ונציב את הנתון שחילצנו מהמשוואה הראשונה, ונקבל:

$$10 - b + c = 10 \text{ . נחסר } 10 \text{ ונחבר } b \text{ לשני האגפים, ונקבל כי } b = c$$

נכפול את המשוואה השלישית ב-2, ונציב את הנתון כי $b = c$ במשוואה זו, ונקבל כי $2c = 10$.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל כי: $c = 5$.

מכיוון שמצאנו כי $b = c$, הרי שגם $b = 5$, ומכיוון שמצאנו כי $a = 10 - b$, הרי שגם a שווה ל-5.

$$(a = 10 - b = 10 - 5 = 5)$$

תשובה (3).

2. השאלה: לאורך היו x גולות $(1 < x)$, ולנורית היו יותר גולות מלאורך.

נורית העבירה לאורך אחת מהגולות שלה.

נסמן ב-A את מספר הגולות הממוצע של אורך ונורית לפני ההעברה.

נסמן ב-B את מספר הגולות הממוצע של אורך ונורית אחרי ההעברה.

איזו מהטענות הבאות נכונה בוודאות?

פתרון: דרך א': אלגברה

על מנת למצוא את היחס בין המספר הממוצע של הגולות לפני העברת הגולות בין נורית לאורך - A,

לממוצע מספר הגולות לאחר ההעברה - B, נסמן את מספר הגולות של נורית ב-y.

$$\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$$

מכיוון שלפני ההעברה לנורית y גולות ולאורך x גולות, הרי שממוצע מספר הגולות של אורך ונורית שווה

$$\text{ל- } \frac{x+y}{2}$$

לאחר שנורית העבירה לאורך גולה אחת, נותרו ברשותה $y - 1$ גולות, ובידי אורך ישנן $x + 1$ גולות.

ממוצע מספר הגולות שבידי אורך ונורית לאחר שנורית העבירה לאורך אחת מהגולות שלה הוא $\frac{x+y}{2}$

$$\left(\frac{y-1+x+1}{2} = \right)$$

מצאנו כי ממוצע מספר הגולות לפני ולאחר ההעברה שווה.

דרך ב': היגיון

ממוצע שווה לסכום כל האיברים חלקי מספר האיברים. מכיוון שבהעברת הגולה בין נורית לאורך לא

משתנה מספרן הכולל של הגולות הנמצא ברשות שניה גם יחד ולא מספר האיברים, הרי שהממוצע אינו

משתנה.

תשובה (3).

3. **השאלה:** ממוצע הגבהים של יפה ושייקה גדול ב-7 ס"מ מגובהה של יפה.

גובהו של שייקה _____ מגובהה של יפה.

פתרון: נשתמש בנוסחת הממוצע.

$$\text{ממוצע} = \frac{\text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}}, \text{ ומכאן שאנו יכולים לבנות את המשוואה הבאה: } 7 + \text{יפה} = \frac{\text{יפה} + \text{שייקה}}{2}.$$

נכפול ב-2 את שני האגפים, ונחסר את יפה משניהם, ונקבל: $14 + \text{יפה} = \text{שייקה}$.
מצאנו כי גובהו של שייקה גדול ב-14 ס"מ מגובהה של יפה.

תשובה (2).

4. **השאלה:** אם ממוצע של 3 מספרים שלמים וחיוביים השונים זה מזה הוא 12,

מה מהבאים **לא** יכול להיות ערכו של אחד המספרים?

$$\text{פתרון: על פי נוסחת הממוצע: } \text{ממוצע} = \frac{\text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$$

מכאן שאם ידוע הממוצע ומספר האיברים ניתן לחשב את סכום כל האיברים.

נתון כי ישנם 3 איברים אשר ממוצעם הוא 12, ומכאן שסכום כל האיברים הוא $(3 \cdot 12) = 36$.

כעת נבדוק את התשובות המוצעות.

תשובה (1): 28. אם אחד האיברים הוא 28, הרי שסכום שני האיברים האחרים הוא $(36 - 28) = 8$.
יתכן שאחד האיברים הוא 1 והשני 7, מכיוון שמצאנו 3 איברים חיוביים ושונים זה מזה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): 31. אם אחד האיברים הוא 31, הרי שסכום שני האיברים האחרים הוא $(36 - 31) = 5$.
יתכן שאחד האיברים הוא 1 והשני 4, מכיוון שמצאנו 3 איברים חיוביים ושונים זה מזה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): 33. אם אחד האיברים הוא 33, הרי שסכום שני האיברים האחרים הוא $(36 - 33) = 3$.
יתכן שאחד האיברים הוא 1 והאחר 2. מכיוון שמצאנו 3 איברים חיוביים ושונים זה מזה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): 34. אם אחד האיברים הוא 34, הרי שסכום שני האיברים האחרים הוא $(36 - 34) = 2$.
אין שני איברים חיוביים השונים זה מזה אשר סכומם שווה ל-2, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

5. **השאלה:** במכולת נמכרים ארבעה מוצרים: חלב, לחם, גבינה וחבילת פסטה.

ידוע כי סכום המחירים של חלב, לחם וגבינה גדול פי 4 ממחיר חבילת פסטה.
איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: נתון כי סכום המחירים של חלב, לחם וגבינה גדול פי 4 ממחיר חבילת פסטה, ומכאן ש:
 $4 \cdot \text{פסטה} = \text{חלב} + \text{לחם} + \text{גבינה}$.

$$\text{ממוצע המחירים של ארבעת המוצרים הוא: } \frac{\text{פסטה} + \text{גבינה} + \text{לחם} + \text{חלב}}{4}$$

מכיוון ש: $4 \cdot \text{פסטה} = \text{חלב} + \text{לחם} + \text{גבינה}$, הרי שניתן להציב נתון זה בנוסחת הממוצע ולקבל כי מחירם

$$\text{הממוצע של ארבעת המוצרים הוא: } \frac{5 \cdot \text{פסטה}}{4} \left(= \frac{\text{פסטה} + \text{פסטה} + \text{פסטה} + \text{פסטה} + \text{פסטה}}{4} = \frac{\text{פסטה} + \text{לחם} + \text{גבינה} + \text{חלב}}{4} \right)$$

כלומר, מצאנו כי מחירם הממוצע של 4 המוצרים בהכרח גדול ממחירה של הפסטה.

תשובה (3).

שימו לב: לא ניתן להשוות בין מחירם הממוצע של 4 המוצרים למחיר יתר המוצרים ולכן תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות.

6. **השאלה:** עבור כל n שלם וחיובי הוגדרה הפעולה הבאה: $\$(n) = \frac{1+2+3+\dots+n}{n}$.

$$\$(37) = ?$$

פתרון:

נתבקשנו למצוא את ערכו של $\$(37)$ שהוא ביטוי המורכב ממספר רב של איברים. ננסה להבין באמצעות הצבת דוגמה מספרית את הרעיון המתמטי. נציב לדוגמה כי n שווה ל-2.

$$\left(\frac{1+2}{2} = \right) 1.5 \text{ שווה ל-} \$ (2) \text{ , מקבלים כי } n = 2 \text{ בפעולת ה-} \$ \text{ , מקבלים כי } \$ (2) \text{ שווה ל-} 1.5.$$

נציב לדוגמה כי n שווה ל-3.

$$\left(\frac{1+2+3}{3} = \right) 2 \text{ שווה ל-} \$ (3) \text{ , מקבלים כי } n = 3 \text{ בפעולת ה-} \$ \text{ , מקבלים כי } \$ (3) \text{ שווה ל-} 2.$$

למעשה פעולת ה- $\$$ היא פעולה המחשבת את הממוצע של n .

כפי שלמדנו, הממוצע של סדרת מספרים עוקבים שווה תמיד ל- $\frac{\text{איבר ראשון} + \text{איבר אחרון}}{2}$, ומכאן

$$\text{שכאשר } n = 37 \text{ ניתן למצוא כי } \$ (37) \text{ שווה ל-} 19 \text{ .} \left(\frac{1+37}{2} = \right)$$

תשובה (2).

7. **השאלה:** במפעל מסוים, השכר החודשי הממוצע של כל העובדים הוא x . לקראת השנה החדשה הוחלט להעלות את שכרם של מחצית מן העובדים ב-50%.

מה יהיה השכר החודשי הממוצע של כל עובדי המפעל אחרי ההעלאה?

פתרון: לשם הנוחות נניח כי במפעל 2 עובדים בלבד וכי כל אחד מהם מרוויח משכורת של 1,000 שקלים לחודש. כלומר x שווה ל-1,000 שקלים.

אם הוחלט להעלות את שכרם של מחצית מן העובדים ב-50%, הרי שמשכורתו של אחד מן הפועלים הועלתה ב-500 שקלים (50% מ-1,000 הם 500) וכעת משכורתו היא 1,500 שקלים.

$$\left(\frac{1,500 + 1,000}{2} = \right) \text{ משכורתם הממוצעת של שני הפועלים כעת היא } 1,250 \text{ שקלים .}$$

$$\left(\frac{1,250}{1,000} = \right) \text{ אם } x \text{ שווה ל-} 1,000 \text{ , הרי ש-} 1,250 \text{ שקלים הם } 1.25x$$

תשובה (2).

8.

השאלה: בכיתה ה יש 15 ילדים.

במבחן שנערך בכיתה היה הציון הממוצע 65.

ציונם הממוצע של הבנים במבחן היה 60 וציון הממוצע של הבנות במבחן היה 75.

כמה בנות בכיתה ה'?

פתרון: דרך א': אלגברה

ידוע כי בכיתה ה יש 15 ילדים. אם נסמן את מספר הבנות ב- x , הרי שמספר הבנים שווה ל- $(15 - x)$.

$$\frac{\text{ממוצע} = \text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}} = 65 \text{ , ומכאן ש: } \frac{x \cdot 75 + (15 - x) \cdot 60}{15}$$

נכפול את שני האגפים ב-15, נפתח את הסוגריים באגף שמאל, ונקבל:

$$65 \cdot 15 = 75x + 15 \cdot 60 - 60x \quad \text{נחסר את הביטוי } 60x \text{ משני האגפים, ונקבל:}$$

$$60 \cdot 15 = 15x - 60 \quad \text{נחלק ב-15 את שני האגפים, ונקבל: } x = 65 - 60 = 5$$

דרך ב': הצבת תשובות

כאשר מחשבים ממוצע בין שתי קבוצות השוות בגודלן, הממוצע בכללי יהיה בדיוק באמצע. מכיוון

שממוצע הבנים במבחן היה 60, וממוצע הבנות היה 75, וממוצע הכיתה הכללי הוא 65, ניתן

להסיק שמספר הבנים גדול ממספר הבנות או מספר הבנות קטן ממספר הבנים שהרי אחרת היה

ממוצע הכיתה נוטה יותר לכיוונן. מכאן שניתן לבדוק את תשובה (4) בלבד.

נחשב מה ממוצע הציונים של הכיתה כאשר ישנן 5 בנות שציוןן 75, ו-10 בנים שציונם 60.

$$\text{במקרה כזה הממוצע הוא אכן } 65 \left(= \frac{75 + 120}{3} = \frac{15 \cdot (75 + 2 \cdot 60)}{15 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 75 + 10 \cdot 60}{15} \right) \text{ , ומכאן}$$

שזה אכן מספר הבנות בכיתה.

תשובה (4).

9.

השאלה: ממוצע של 6 מספרים השונים זה מזה הוא x .

מה המספר הקטן ביותר של איברים אשר ערכם קטן מ- x ?

פתרון: דרך א': הבנת מושג הממוצע

ממוצע גדול מהאיבר הקטן ביותר וקטן מהאיבר הגדול ביותר, אלא במקרה שכל האיברים

שווים ואז הממוצע שווה לכל האיברים.

יתכן שיש איבר אחד בלבד הקטן מ- x ואילו כל יתר האיברים גדולים או שווים ל- x .

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נניח כי ישנם 6 איברים אשר אחד מהם שווה ל-0, וחמשת האחרים שווים ל-6.

$$\text{במקרה כזה סכום כל האיברים הוא } 30 (= 5 \cdot 6) \text{ , וממוצע ששת האיברים הוא } 5 \left(= \frac{30}{6} \right)$$

ישנו איבר אחד בלבד הקטן מן הממוצע – 0, ואילו כל השאר גדולים ממנו.

תשובה (1).

10. השאלה: כדי להגדיל ממוצע ציונים של 5 תלמידים ב-2 נקודות ניתן -

פתרון: מכיוון שאין בשאלה כל נתון מספרי, ניתן להציב דוגמה מספרית. לשם הנוחות נניח שממוצע הציונים של 5 התלמידים הוא 0, כלומר ציונו של כל אחד וואחד מהם הוא 0.

כעת נבדוק את התשובות המוצעות.

תשובה (1): להוסיף לציונם של שניים מהתלמידים נקודה אחת.

אם נוסיף לציונם של שניים מהתלמידים נקודה אחת, הרי שסכום הציונים של כל הילדים יהיה $2(0 + 0 + 0 + 1 + 1) = 2$, וציונם הממוצע $\frac{2}{5}$.

תשובה (2): להוסיף לציונם של שניים מהתלמידים 5 נקודות.

אם נוסיף לציונם של שניים מהתלמידים 5 נקודות, הרי שסכום הציונים של כל הילדים יהיה 10

$$, (0 + 0 + 0 + 5 + 5 =) \left(\frac{10}{5} =\right) 2$$

כלומר גדול ב-2 נקודות מציונם הממוצע ההתחלתי. זו תשובה נכונה אולם בגלל שעל פי תשובה (4) גם תשובה (3) נכונה, עלינו להמשיך ולבדוק גם תשובה זו.

תשובה (3): להוסיף לציונו של כל אחד מהתלמידים 2 נקודות.

אם נוסיף לציונו של כל אחד מן התלמידים 2 נקודות, הרי שסכום הציונים של כל הילדים יהיה

$$10(2 + 2 + 2 + 2 + 2 =), \text{ וציונם הממוצע של כל חמשת הילדים יהיה } 2 \left(\frac{10}{5} =\right)$$

מצאנו כי גם תשובה (3) נכונה ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (4).

תשובה (4).

11. השאלה: הציון של שגית גבוה ב-40% מהציון הממוצע של שגית ורן.

הציון של חן שווה ל-___ מהציון של שגית.

פתרון: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין נתונים מספריים בשאלה, נציב כי ציון הממוצע של שגית ורן הוא 10.

נתון כי הציון של שגית גבוה ב-40% מהציון הממוצע של שגית ורן.

10% מ-10 שווים ל-1, ומכאן ש-40% מ-10 שווים ל-4, ולפיכך אם ממוצע הציונים של שגית ורן הוא

10, הרי שציונה של שגית הוא 14.

הממוצע = מספר האיברים \times סכום כל האיברים.

אם ציון הממוצע של שגית ורן הוא 10, הרי שסכום הציונים שלהן הוא 20

$$(20 = 2 \cdot 10 = \text{מספר האיברים} \times \text{סכום כל האיברים}).$$

אם ציונה של שגית הוא 14, הרי שציונה של חן הוא $6(20 - 14 =)$.

(הערה: דרך נוספת למציאת ציונה של חן היא על ידי הקביעה כי אם ציונה של שגית גבוה ב-4 נקודות מהממוצע, שהוא 10, הרי שבהכרח ציונה של שגית נמוך ב-4 נקודות מן הממוצע, ומכאן שהו אשווה ל-6 נקודות).

מצאנו כי הציון של חן הוא 6 וכי הציון של שגית הוא 14, ומכאן ש הציון של חן שווה ל- $\frac{3}{7}$ מהציון של

$$\text{שגית} \left(\frac{6}{14} =\right)$$

תשובה (3).