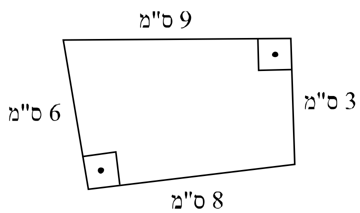
מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**שאלה**
(4)	(3)	(3)	(2)	(3)	(3)	(3)	(2)	(1)	(3)	**תשובה**

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	**שאלה**
(1)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(4)	(2)	(1)	**תשובה**

הסברים

.1 **השאלה**: מה שטחו של המרובע שבסרטוט (בסמ״ר)?



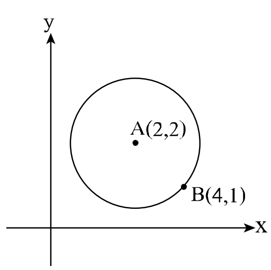
פתרון: בסרטוט מתואר מרובע בעל שתי זוויות ישרות. עלינו למצוא את שטח המרובע. מכיוון שלא ידוע מה סוג המרובע שבסרטוט, לא ידוע באיזו נוסחה יש להשתמש בכדי לחשב את שטחו, לפיכך נחלק אותו לצורות שידוע כיצד לחשב את שטחן. נחלק את המרובע לשני משולשים ישרי-זווית באמצעות אלכסון. שטח משולש ישר-זווית מחושב על פי מכפלת הניצבים חלקי 2, לפיכך שטח המשולש העליון הוא: $\frac{9\cdot 3}{2}=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}$.

שטח המשולש התחתון הוא: $\frac{\cancel{6}^{3}\cdot 8}{\cancel{2}_{1}}=\frac{24}{1}=24$.

שטחו של המרובע שווה לסכום שטחי המשולשים: $13\frac{1}{2}+24=37\frac{1}{2}$.

תשובה (3).

.2 **השאלה**: במערכת הצירים שלפניכם מעגל שמרכזו בנקודה A.



הנקודה B נמצאת על היקף המעגל.
על פי נתוני הסרטוט,

מה **שטח** המעגל?

פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את שטח המעגל שבסרטוט. שטח מעגל מחושב על פי הרדיוס $(\pi\cdot r^2)$, לכן נחשב את אורך רדיוס המעגל. רדיוס הוא המרחק בין מרכז המעגל לבין כל נקודה על ההיקף. מרכז המעגל שלפנינו נמצא בנקודה A(2,2) והנקודה B(4,1) נמצאת על היקפו. נחשב את המרחק בין שתי הנקודות. מרחק אלכסוני במערכת צירים הוא למעשה יתר במשולש בו הניצבים הם ההפרש בין ערכי ה-X של קצוות האלכסון $(4-2=2)$ וההפרש בין ערכי ה-Y של קצוות האלכסון $(2-1=1)$. נחשב את אורך האלכסון באמצעות משפט פיתגורס: $1^2+2^2=AB^2 \Leftarrow 1+4=AB^2 \Leftarrow 5=AB^2 \Leftarrow \sqrt{5}=AB$.

זהו רדיוס המעגל. כעת ניתן לחשב את שטחו על פי הנוסחה לחישוב שטח מעגל:

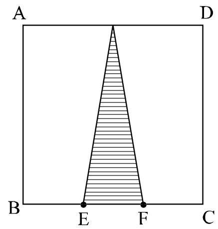
$$\pi\cdot r^2=\pi\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=\pi\cdot 5=5\pi$$

תשובה (1).

.3 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ריבוע ABCD.

נתון: $BE = EF = FC$.

אם שטח המשולש האפור הוא 4 סמ"ר,
מה שטחו של הריבוע (בסמ"ר)?

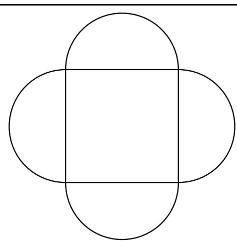


פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את שטח הריבוע. שטח הריבוע מחושב על פי צלעו (צלע בריבוע), לכן נחשב את אורך צלע הריבוע (נסמן אותה ב-x). נתוני השאלה מתייחסים לשטח המשולש האפור. אורך צלע המשולש שווה לשליש מצלע הריבוע (שכן $BE = EF = FC$) וגובהו שווה לצלע הריבוע. שטח משולש שווה למחצית מכפלת הצלע בגובה. לפיכך, שטח המשולש האפור הוא: $\frac{\frac{x}{3}\cdot x}{2} = \frac{x^2}{6}$. על-פי הנתונים, שטח זה שווה ל-4 סמ"ר: $\frac{x^2}{6} = 4 \Leftarrow x^2 = 24$. שימו לב: ניתן לעצור בשלב זה, שכן x^2 שווה לשטח הריבוע אותו צריך למצוא.

תשובה (2).

.4 **השאלה**: על כל אחת מצלעותיו של ריבוע, ששטחו 4 סמ"ר,
נבנה חצי מעגל, כמתואר בסרטוט.

מה שטח הצורה שהתקבלה (בסמ"ר)?



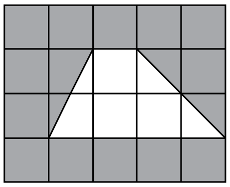
פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את שטח הצורה שהתקבלה המורכבת מריבוע וארבע חצאי מעגלים. שטח הריבוע נתון (4 סמ"ר). לפיכך, בכדי למצוא את שטח הצורה, עלינו למצוא את שטח חצאי המעגלים. שטח מעגל מחושב על פי הרדיוס $\left(\pi\cdot r^2\right)$, לכן בכדי לענות על השאלה עלינו לחשב את אורך רדיוס המעגל. קוטר חצאי המעגל שווה לצלע הריבוע. שטח הריבוע שווה ל-4 סמ"ר ולכן אורך צלעו 2 ס"מ. זהו קוטר המעגל. רדיוס המעגל שווה למחצית הקוטר, כלומר ל-1 ס"מ. כעת נחשב את שטחו של כל חצי מעגל:
$\frac{\pi\cdot r^2}{2} = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

שטח הצורה שווה לסכום שטחי הריבוע וארבעת חצאי המעגל: $4 + {}^{2}\cancel{4}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}_{1}} = 4 + 2\pi$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מלבן שחולק ל-20 ריבועים שאורך צלעם 1 ס״מ.



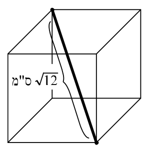
מה גודל השטח המושחר (בסמ״ר)?

פתרון: בשאלה זו עלינו לקבוע מה גודל השטח המושחר. שטח זה מורכב משטחם של ריבועים קטנים. נספור כמה ריבועים שכאלה מרכיבים את השטח המבוקש. השטח המושחר מורכב מ-13 ריבועים שלמים, 2 חצאי ריבועים ועוד שני חלקי ריבוע שמשלימים יחד לריבוע שלם. כלומר, השטח המושחר שווה לסכום שטחם של 15 ריבועים. מכיוון שאורך צלעו של כל ריבוע הוא 1 ס״מ, שטחו של כל ריבוע הוא $1^2 = 1$, וסכום שטחם של 15 ריבועים הוא: $15 \cdot 1 = 15$.

תשובה (3).

---

6. **השאלה**: מה נפח הקובייה שבסרטוט (בסמ״ק)?



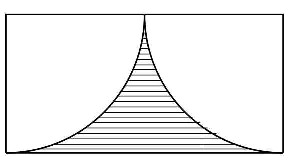
תשובה: בשאלה זו נתונה קובייה שאורך אלכסונה $\sqrt{12}$ ס״מ. עלינו למצוא את נפח הקובייה. נפח קובייה מחושב על-פי אורך הצלע (צלע בשלישית). לפיכך נחשב קודם כל את אורך צלע הקובייה (נסמן אותה באות x). האלכסון שבסרטוט הוא למעשה יתר במשולש שבו הניצבים הם גובה הקובייה ואלכסון בסיס הקובייה. גובה הקובייה שווה ל-x. אלכסון הבסיס הוא יתר במשולש בו הניצבים שווים ל-x, ולכן אורכו $x\sqrt{2}$.
על-פי משפט פיתגורס: $x^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{12}\right)^2$. נפתח סוגריים, ונקבל: $x^2 + 2x^2 = 12$. נכנס איברים, ונקבל: $3x^2 = 12$. נחלק ב-3 את שני האגפים, ונקבל: $x^2 = 4$. נוציא שורש משני האגפים, ונקבל: $x = 2$.

כעת כשמצאנו את צלע הקובייה, ניתן לחשב את נפחה: $x^3 = 2^3 = 8$.

תשובה (3).

---

7. **השאלה**: במלבן שלפניכם חסומים שני רבעים של מעגל שרדיוסו 1 ס״מ.



מה גודל השטח המושחר (בסמ״ר)?

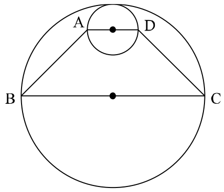
פתרון: השטח המושחר שבסרטוט הוא ההפרש בין שטח המלבן לשטחי רבעי המעגל. נחשב כל אחד מהם בנפרד ואז נחסר ביניהם.

שטח המלבן שווה לאורך כפול הרוחב. מכיוון שהנתון היחיד מתייחס לרדיוס המעגל, נמצא את הקשר בין צלעות המלבן לרדיוס המעגל. רוחב המלבן שווה לרדיוס המעגל (1 ס״מ) ואורך המלבן שווה לשני רדיוסים (2 ס״מ). מכאן ששטחו של המלבן שווה ל-2 סמ״ר $(2 \cdot 1 =)$.

שטח מעגל שרדיוסו 1 הוא $\left(\pi \cdot 1^2 =\right) \pi$. לכן שטחו של רבע מעגל שכזה הוא $\frac{\pi}{4}$.

השטח המושחר שווה לשטח המלבן פחות שטחי שני רביעי המעגל: $2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$.

תשובה (2).



8. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל קטן שרדיוסו r ס״מ הנמצא בתוך מעגל גדול שרדיוסו R ס״מ ומשיק לו. הנקודות המודגשות הן מרכזי המעגלים.

קוטר המעגל הקטן וקוטר המעגל הגדול הם בסיסיו של טרפז שווה שוקיים ABCD.

מה שטח הטרפז (בסמ״ר)?

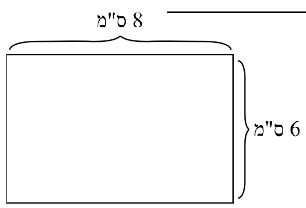
פתרון: בשאלה זו עלינו לחשב את שטח הטרפז. שטח טרפז שווה לסכום הבסיסים כפול הגובה חלקי 2. הבסיסים הם קטרים במעגלים שבסרטוט (2R ו-2r). נחשב את גובה הטרפז. נחבר את מרכזי המעגלים (זהו גובה הטרפז) ונסרטט רדיוס ממרכז המעגל הקטן אל נקודת ההשקה בין המעגלים.

כעת ניתן לראות שגובה הטרפז שווה לרדיוס המעגל הגדול (ממרכז המעגל הגדול עד נקודת ההשקה) פחות רדיוס המעגל הקטן (ממרכז המעגל הקטן עד לנקודת ההשקה). כלומר, הגובה שווה ל-$(R-r)$.

כעת נחשב את שטח הטרפז על פי הנוסחה:

$$\frac{(2R+2r)\cdot(R-r)}{2}=\frac{2R^2-2Rr+2Rr-2r^2}{2}=\frac{2R^2-2r^2}{2}=\frac{2\left(R^2-r^2\right)}{2}=R^2-r^2.$$

תשובה (3).

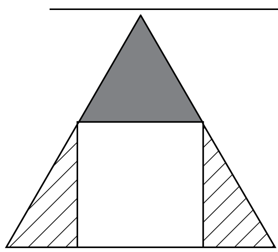


9. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם דף נייר בצורת מלבן שרוחבו 6 ס״מ ואורכו 8 ס״מ.

מה שטחו **המקסימלי** (בסמ״ר) של מעגל שניתן לסרטט על דף נייר זה?

פתרון: בשאלה זו עלינו לקבוע מה שטחו המקסימלי של מעגל שניתן לסרטט על דף מלבני שאורך צלעותיו 6 ס״מ ו-8 ס״מ. החלק הרחב ביותר במעגל הוא הקוטר. לכן, המעגל המקסימלי הוא מעגל שקוטר שווה לצלע המלבן. שימו לב: אם קוטר המעגל יהיה שווה לאורך הריבוע (8 ס״מ), המעגל ׳יבצבץ׳ החוצה, שכן אין מספיק מקום בצלע השנייה לקוטר של 8 ס״מ. לפיכך, המעגל המקסימלי הוא המעגל שקוטרו שווה לאורך הצלע הקטנה של המלבן (6 ס״מ). אם קוטר המעגל הוא 6 ס״מ, רדיוסו הוא 3 ס״מ, ולכן שטחו: $\pi\cdot 3^2=9\pi$.

תשובה (3).



10. **השאלה**: ריבוע ששטחו 3 סמ״ר חסום במשולש שווה צלעות, כמתואר בסרטוט.

$$\frac{\text{השטח השחור}}{\text{סכום השטחים המפוספסים}}=?$$

פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את היחס בין שטח המשולש השחור לסכום שטחי המשולשים המפוספסים, כאשר הנתון היחידי מתייחס לשטח הריבוע. לכל אחד מהמשולשים המבוקשים צלע השווה לצלעו של הריבוע. אם שטח הריבוע הוא 3 סמ״ר, אורך צלעו הוא $\sqrt{3}$ ס״מ. כעת נחשב את שטחו של כל אחד מהמשולשים:

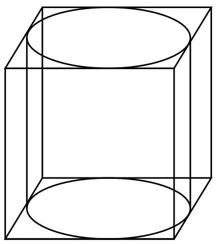
המשולש השחור הוא משולש שווה-צלעות (שכן הוא דומה למשולש הגדול). שטח משולש שווה-צלעות שאורך צלעו $\sqrt{3}$ הוא: $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

המשולשים המפוספסים הם משולשי זהב (שכן אחת מזוויותיהן היא זווית במשולש שווה-צלעות, וזווית אחרת משלימה את זווית הריבוע ל-180°). אורך הניצב בגדול הוא $\sqrt{3}$, ולכן אורך הניצב הקטן הוא 1 $\left(=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. שטח כל משולש: $\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}$. ולכן סכום שטחי המשולשים: $\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\sqrt{3}$.

נציב בביטוי המבוקש, ונקבל: $\frac{\text{השטח השחור}}{\text{סכום השטחים המפוספסים}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$.

תשובה (4).

.11 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם גליל החסום בקוביה שאורך מקצועה x ס"מ.



מה ההפרש בין נפח הקוביה לנפח הגליל (בסמ"ק)?

פתרון: בשאלה זו נתון גליל החסום בקובייה שאורך מקצועה x ס"מ, ועלינו למצוא את ההפרש בין נפח הקובייה ונפח הגליל. נחשב כל אחד מהם בנפרד ואז נחסר ביניהם.

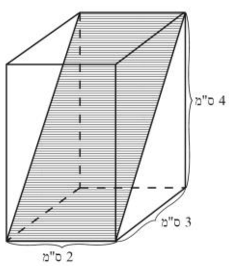
נפח קובייה שאורך מקצועה x ס"מ הוא: x^3.

נפח גליל שווה לשטח בסיסו כפול הגובה. גובה הגליל שווה לגובה הקובייה (x ס"מ). בסיס הגליל חסום בבסיס הקובייה, ולכן קוטר בסיס הגליל שווה לאורך צלע הקובייה, ולכן רדיוסו שווה למחצית צלע הקובייה $\left(\frac{x}{2}\right)$. כעת נחשב את נפח הגליל על-פי הנוסחה: $\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot x = \pi \cdot \frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{\pi \cdot x^3}{4}$.

ההפרש בין נפח הקובייה לנפח הגליל הוא: $x^3 - \frac{\pi \cdot x^3}{4} = x^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

תשובה (1).

.12 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם תיבה.



על פי נתונים אלה ונתוני הסרטוט,

מהו שטח המלבן הכהה (בסמ"ר)?

פתרון: המלבן הכהה הוא מלבן שאחת מצלעותיו היא מקצוע בקובייה, השווה ל- 2 ס"מ, וצלעו השנייה היא אלכסון על פאת הקובייה. נתמקד בפאה זו: האלכסון הוא למעשה היתר במשולש ישר זווית שניצביו הם 3 ו- 4, ועל פי השלשה הפיתגורית $3:4:5$ ניתן לדעת כי אורך היתר הוא 5 ס"מ.

כעת עלינו לחשב את שטח המלבן שצלעותיו 2 ס"מ ו- 5 ס"מ. שטח מלבן שווה פשוט למכפלת שתי צלעות סמוכות, כלומר ל- 10 ס"מ $(2 \cdot 5 =)$.

תשובה (2).

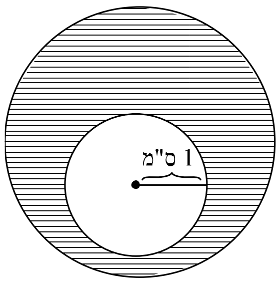
.13 **השאלה**: שטחו של מחומש משוכלל, שאורך צלעו 2 ס"מ, הוא a סמ"ר.

מה שטחו (בסמ"ר) של מחומש משוכלל שאורך צלעו 4 ס"מ?

פתרון: בשאלה זו נתונים שני מחומשים משוכללים, האחד בעל צלע באורך 2 ס"מ והשני בעל צלע באורך 4 ס"מ. שטחו של המחומש הראשון נתון ועלינו למצוא את שטח המחומש השני. מחומשים משוכללים הם צורות דומות. יחס השטחים בין שתי צורות דומות שווה ליחס אורכי הצלעות בריבוע. כלומר, אם צלע המחומש השני גדולה פי 2 מצלע המחומש הראשון, הרי ששטח המחומש השני גדול פי 4 $(2^2 =)$ משטח המחומש הראשון. שטח המחומש הראשון הוא a, ולכן שטח המחומש השני הוא 4a $(4 \cdot a =)$.

תשובה (4).

.14 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שרדיוסו 1 ס״מ
הנמצא בתוך שטחו של מעגל שרדיוסו 2 ס״מ.



פי כמה גדול השטח הכהה מהשטח הלבן?

פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את היחס בין השטח הכהה לשטח הלבן. נחשב את גודלו של כל אחד מהשטחים ואז נמצא את היחס ביניהם.
השטח הלבן הוא שטחו של מעגל שרדיוסו 1 ס״מ. נחשב את שטחו על-פי הנוסחה לחישוב שטח מעגל: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

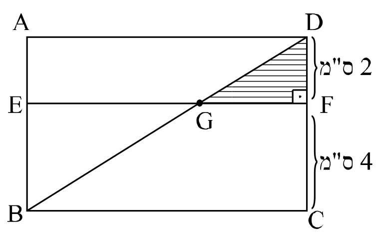
השטח הכהה שווה לשטח המעגל הגדול פחות שטח המעגל הקטן. רדיוס המעגל הגדול הוא 2 ס״מ, נחשב את שטחו על-פי הנוסחה לחישוב שטח מעגל: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$. את שטח המעגל הקטן חישבנו בשלב הקודם (π). נחסר ביניהם ונקבל את גודל השטח הכהה: $4\pi - \pi = 3\pi$.

השטח הכהה (3π) גדול מהשטח הלבן (π) פי 3.

שימו לב: מעגלים הם צורות דומות. מכיוון שרדיוס המעגל הגדול גדול פי 2 מרדיוס המעגל הקטן, שטח המעגל הגדול גדול פי 2^2, כלומר פי 4 משטח המעגל הקטן. השטח הכהה שווה להפרש בין שטח המעגל הגדול לשטח המעגל הקטן, ולכן הוא גדול פי 3 $(4 - 1 =)$ משטח המעגל הקטן.

תשובה (3).

.15 **השאלה**: ABCD הוא מלבן, EF||AD.
שטח משולש DGF הוא $\frac{4}{3}$ סמ״ר.



על פי נתונים אלו ונתוני הסרטוט,
מה **שטחו** של מלבן ABCD (בסמ״ר)?

פתרון: בשאלה זו עלינו לחשב שטח של מלבן. רוחב המלבן הוא 6 ס״מ $(CD = 2 + 4 =)$, בכדי לחשב את שטח המלבן עלינו למצוא את אורכו (BC). נתון שטח משולש DGF, כמו כן נתון כי EF מקביל לצלעות המלבן, כך שנוצר מצב דמיון מוכר בו משולש DGF דומה למשולש BCD, ניעזר בדמיון בכדי למצוא את אורך המלבן. הצלע DF שאורכה 2 ס״מ מתאימה לצלע DC שאורכה 6 ס״מ (מכיוון שהן מול זוויות שוות בשני משולשים דומים). כלומר, כל צלע במשולש הגדול גדולה פי 3 מהצלע המתאימה במשולש הקטן. הצלע BC במשולש הגדול מתאימה לצלע GF במשולש הקטן (מכיוון שהן מול אותה זווית). נחשב את אורכה של הצלע GF, נכפול את התוצאה פי 3, ונקבל את אורכה של הצלע BC.

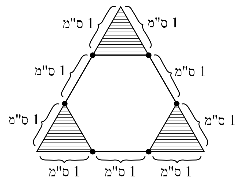
שטח משולש DGF שווה למכפלת ניצביו חלקי 2: $\frac{GF \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{2}_1} = \frac{4}{3} \Leftarrow GF = \frac{4}{3}$.

נכפול את GF ב-3, ונקבל את גודלה של BC: $\frac{4}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{3}^1 = 4$.

שטח המלבן שווה לאורכו כפול רוחבו: $BC \cdot CD = 4 \cdot 6 = 24$

תשובה (3).

.16 **השאלה**: על פי נתוני הסרטוט שלפניכם,

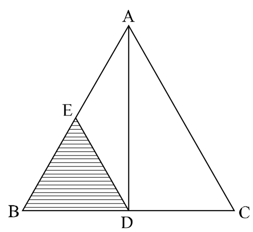


מה היחס בין השטח השחור לשטח הלבן?

פתרון: בסרטוט מתואר משולש שווה צלעות גדול (שאורך צלעו 3 ס״מ) שבתוכו משולשים שווי צלעות קטנים (שאורך צלעם 1 ס״מ). עלינו לקבוע מה היחס בין השטח השחור לשטח הלבן. השטח השחור מורכב מ-3 משולשים קטנים. נבדוק מכמה משולשים קטנים מורכב השטח הלבן. אם נחבר זו לזו את הנקודות המחלקות את צלעות המשולש לשלושה חלקים שווים (הנקודות המודגשות), נקבל משולשים חופפים (שווי-צלעות בעלי צלע של 1 ס״מ). השטח הלבן מורכב מ-6 משולשים כאלו. מכיוון שכל המשולשים חופפים, היחס בין השטח השחור לשטח הלבן הוא 3:6. נצמצם, ונקבל: 1:2.

תשובה (2).

.17 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש ABC ששטחו 28 סמ״ר.



AD תיכון לצלע BC $(BD = DC)$.

$BE = AE$.

מה גודל השטח המושחר (בסמ״ר)?

פתרון: בשאלה זו עלינו למצוא את גודל השטח המושחר המתקבל מחלוקת משולש ששטחו 28 סמ״ר באמצעות שני ישרים. התיכון AD מחלק את משולש ABC לשני משולשים בעלי צלע זהה $(BD = DC)$ וגובה שווה (הישר היוצא מקודקוד A ומאונך לצלע BC הוא הגובה המשותף לשני המשולשים). לכן למשולשים ABD ו-ADC יש שטח שווה, שטח כל אחד מהם שווה למחצית שטח משולש ABC – 14 סמ״ר $\left(= \frac{28}{2}\right)$.

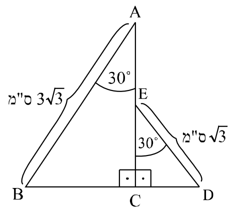
הישר DE מחלק את משולש ABD לשני משולשים בעלי צלע זהה $(AE = BE)$ וגובה שווה (הישר היוצא מקודקוד D ומאונך לצלע AB הוא הגובה המשותף לשני המשולשים). לכן למשולשים AED ו-BED יש שטח שווה, שטח כל אחד מהם שווה למחצית שטח משולש ABD – 7 סמ״ר $\left(= \frac{14}{2}\right)$.

מכאן שגודל השטח המושחר שווה ל-7 סמ״ר.

תשובה (2).

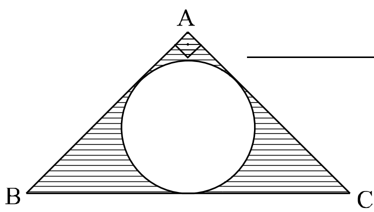
.18 **השאלה**: על פי נתוני הסרטוט שלפניכם,

פי כמה גדול שטח משולש ABC משטח משולש CDE?



פתרון: בסרטוט מתוארים שני משולשים בעלי זוויות זהות. ונתון היתר של כל משולש. עלינו לקבוע מה היחס בין שטחי המשולשים. משולשים בעלי זוויות זהות דומים זה לזה. יחס השטחים של צורות דומות שווה ליחס אורכי הצלעות בריבוע. היתר במשולש הקטן הוא $\sqrt{3}$, והיתר במשולש הגדול הוא $3\sqrt{3}$. כלומר, צלע במשולש הגדול גדולה פי 3 מהצלע המתאימה במשולש הקטן. יחס השטחים שווה ליחס הצלעות בריבוע. כלומר, שטח המשולש הגדול גדול פי 9 $\left(=3^2\right)$ משטח המשולש הקטן.

תשובה (1).



.19 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שרדיוסו 1 ס״מ החסום במשולש ישר זוית ושווה שוקיים $\left(AB = AC\right)$.

מה גודל השטח הכהה (בסמ״ר)?

פתרון: בסרטוט מתואר מעגל החסום במשולש ומשיק לו ב-3 נקודות. עלינו למצוא את גודל השטח הכהה, כלומר את ההפרש בין שטח המשולש לשטח המעגל. נחשב את שטחו של כלאחד מהם.

רדיוס המעגל נתון (1 ס״מ), נחשב את שטח המעגל באמצעות הנוסחה: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

בכדי למצוא את שטח המשולש, עלינו למצוא את אורך ניצביו או את היתר שלו והגובה ליתר. מכיוון שהנתון היחיד בשאלה הוא רדיוס המעגל, נמצא את הקשר בין צלע המשולש לרדיוס המעגל. נעביר רדיוסים ממרכז המעגל לשלוש נקודות ההשקה, כל אחד מהרדיוסים הללו יוצר זווית ישרה (90^{o}) עם צלע המשולש, כך שבחלק העליון של הסרטוט נוצר ריבוע שכל אחת מצלעותיו שווה לרדיוס – 1 ס״מ. אם נעביר את הגובה ליתר במשולש נגלה שהוא שווה לרדיוס המעגל (1 ס״מ) ועוד אלכסון הריבוע הקטן. אם אורך צלע הריבוע 1, אורך אלכסונו $\sqrt{2}$. כלומר, גובה המשולש שווה ל- $\left(1+\sqrt{2}\right)$. זוויות B ו-C שוות 45^{o} (שכן המשולש ישר זווית ושווה שוקיים), לכן גם שני המשולשים שנוצרו כשהעברנו את הגובה הם ישרי זווית ושווי שוקיים. מכאן שאורך יתר המשולש BC שווה לפעמיים $\left(1+\sqrt{2}\right)$, כלומר ל-$\left(2+2\sqrt{2}\right)$.

כעת ניתן לחשב את שטח המשולש:

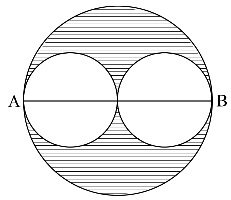
$$\frac{\left(2+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4\sqrt{2}+4}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$$

נחסר משטח המשולש את שטח המעגל, ונקבל את גודל השטח המושחר: $3+2\sqrt{2}-\pi$.

תשובה (3).

---

20. **השאלה**: בתוך מעגל שקוטרו AB חסומים שני מעגלים חופפים,
כך שמרכזם מונח על הישר AB.



$\frac{\text{השטח השחור}}{\text{השטח הלבן}} = ?$

פתרון: בסרטוט מעגל גדול שעל קוטרו נבנו שני מעגלים קטנים וחופפים. עלינו לקבוע מה היחס בין השטח השחור לשטח הלבן. נחשב כל שטח בנפרד ואז נמצא את היחס ביניהם. לצורך כך נסמן את רדיוס המעגלים הקטנים ב-r:

השטח הלבן: שטח כל מעגל קטן הוא $\pi \cdot r^2$. ולכן סכום שטחי המעגלים הקטנים הוא: $2 \cdot \pi \cdot r^2$.

השטח השחור: השטח השחור הוא ההפרש בין שטח המעגל הגדול לשטחי המעגלים הקטנים. רדיוס המעגל הגדול שווה לפעמיים רדיוס המעגל הקטן, ולכן שטח המעגל הגדול הוא: $\pi \cdot (2r)^2 = \pi \cdot 4r^2$. נחסר ממנו את שטחי המעגלים הקטנים, שמצאנו בשלב הקודם, ונקבל את גודל השטח השחור:
$\pi \cdot 4r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 4\pi r^2 - 2\pi r^2 = 2\pi r^2$.

נציב בביטוי המבוקש, ונקבל: $\frac{\text{השטח השחור}}{\text{השטח הלבן}} = \frac{2\pi r^2}{2\pi r^2} = 1$.

שימו לב: כל המעגלים דומים זה לזה. קוטר מעגל קטן פי 2 מקוטר המעגל הגדול ולכן שטח המעגל הקטן קטן פי 4 משטח המעגל הגדול. כלומר, שטח כל מעגל קטן שווה לרבע משטח המעגל הגדול, ולכן יחד שטחם שווה לחצי (שני רבעים) משטח המעגל הגדול. אם המעגלים הלבנים מהווים חצי משטח המעגל, השטח השחור הוא החצי השני. לכן, השטח השחור שווה לשטח הלבן.

תשובה (1).