מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(4)	(2)	(3)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(1)	(3)	(2)	(4)	(3)	(3)	(4)	(2)	(2)

שאלה	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
תשובה	(3)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(2)	(2)	(2)	(3)

שאלה	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
תשובה	(2)	(4)	(3)	(2)	(2)	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)

שאלה	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
תשובה	(2)	(2)	(4)	(4)	(1)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)

הסברים

.1 **השאלה**: נתון: $x^3 < 0$
$x^3 < x$
מה התחום המדויק שבו חייב x להימצא?

פתרון: נתון כי $x^3 < 0$. כאשר מעלים מספר חיובי בחזקה כל שהיא התוצאה היא חיובית, ומכאן ש-x הוא בהכרח מספר שלילי.
נתון כי $x^3 < x$, כלומר כאשר מעלים את x בחזקת 3 ערכו קָטֵן.
נציב דוגמה על מנת לבדוק האם x הוא שבר שלילי או מספר הקטן מ-(1-).
כאשר נציב $x = -\frac{1}{2}$, נקבל כי כאשר מעלים אותו בחזקת 3, ערכו שווה ל-$\left(-\frac{1}{8}\right)$,
מכיוון ש-$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{8}$, הרי ש-x בהכרח אינו שבר שלילי, ומכאן שמצאנו כי x הוא מספר הקטן מ-(1-).

תשובה (4).

2. **השאלה**: נתון: a, b ו-c הם מספרים חיוביים.

$$a = 4b$$

$$a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{b}{c} = ?$$

פתרון: נשאלנו מה היחס בין המשתנים b ו-c, ולפיכך עלינו לחלץ משתנים אלו מתוך המשוואות הנתונות:

נתון כי $a = 4b$. נחלק ב-4 את שני האגפים, ונקבל: $b = \frac{a}{4}$.

נתון כי $a = \frac{c}{2}$. נכפול ב-2 את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $2a = c$.

כעת נציב $b = \frac{a}{4}$ ו- $c = 2a$ בביטוי המבוקש, ונקבל:

$$\frac{b}{c} = \frac{\frac{a}{4}}{2a} = \frac{\cancel{a}^{1}}{4} \cdot \frac{1}{2\cancel{a}_{1}} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

תשובה (4).

---

3. נתון: x הוא מספר שלם, שעבורו מתקיים $x^2 < x^3 < 9$

$$x = ?$$

פתרון: נציב את התשובות המוצעות.

<u>תשובה (1)</u>: 1. נציב באי-השוויון, ונקבל: $1^2 < 1^3 < 9$ ⇦ $1 < 1 < 9$, מכיוון שקיבלנו אי-שוויון שאינו נכון (1 אינו קטן מ-1), זו אינה תשובה נכונה.

<u>תשובה (2)</u>: 2. נציב באי-השוויון, ונקבל: $2^2 < 2^3 < 9$ ⇦ $4 < 8 < 9$, מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

4. **השאלה**: נתון: $2 < 2^{\frac{1}{x}}$

מהו התחום של x?

פתרון: נציב מספרים מהתחומים שבתשובות המוצעות.

<u>תשובה (1)</u>: $1 < x$. נציב לדוגמה כי $x = 2$, ונקבל: $2 < 2^{\frac{1}{2}}$ ⇦ $2 < \sqrt{2}$, מכיוון ש-2 אינו קטן מ- $\sqrt{2}$, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < x < 1$. נציב לדוגמה כי $x = \frac{1}{2}$, ונקבל: $2 < 2^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}$ ⇦ $2 < 2^2$. מכיוון שקיבלנו אי-שוויון נכון, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.5 **השאלה**: נתון: $\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}}{x} = x$ $(0 < x)$

$x = ?$

פתרון: על מנת לפשט את המשוואה נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $\frac{9\cdot 3\cdot x}{x^2} = x^2$.

$\frac{27x}{x^2} = x^2 \Leftarrow \frac{27}{x} = x^2$ נכפול את שני האגפים ב-x, ונקבל: $27 = x^3 \Leftarrow 3 = x$.

תשובה (3).

.6 **השאלה**: $x\cdot y = 15$ $(x \neq -y)$

$x^2 + y^2 = 34$

$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

ראשית נפתח את הסוגריים בעזרת נוסחת הכפל המקוצר:

$$\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}.$$

כעת נציב את נתוני השאלה בביטוי שקיבלנו: $\frac{1}{16} = \frac{4}{64} = \frac{34-30}{34+30} = \frac{34-2\cdot 15}{34+2\cdot 15} = \frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy}$

<u>דרך ב'</u>: מכיוון שתוצאות המשוואות הנתונות הם מספרים שלמים, נחפש מספרים שלמים המקיימים אותן.

על פי המשוואה הראשונה: $x\cdot y = 15$. משוואה זו מתקיימת אם $x = 3$ ו-$y = 5$.

על פי המשוואה השנייה: $x^2 + y^2 = 34$. משוואה זו מתקיימת אף היא כאשר $x = 3$ ו-$y = 5$

$(3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34)$.

נציב כי $x = 3$ ו-$y = 5$ בביטוי שנתבקשנו לחשב את ערכו, ונקבל:

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{(3-5)^2}{(3+5)^2} = \frac{(-2)^2}{8^2} = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{8\cdot\cancel{8}_{\,2}} = \frac{1}{8\cdot 2} = \frac{1}{16}$$

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: $x \cdot y = 24$

$(x+y)^2 = 100$

$(x-y)^2 = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

ראשית נפתח את הסוגריים בביטוי המבוקש בעזרת נוסחת הכפל המקוצר: $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

נתון מה גודלה של המכפלה xy, ומכאן שעל מנת למצוא את ערכו המספרי של הביטוי עלינו לחלץ מתוך הנתונים את גודל הביטוי $x^2 + y^2$.

$(x+y)^2 = 100$, כלומר: $x^2 + y^2 + 2xy = 100$. מכיוון שעל פי הנתון: $x \cdot y = 24$, הרי ש:

$x^2 + y^2 + 2 \cdot 24 = 100 \Leftarrow x^2 + y^2 + 48 = 100 \Leftarrow x^2 + y^2 = 52$.

כעת נציב נתון זה בביטוי אשר את גודלו עלינו למצוא: $x^2 + y^2 - 2xy = 52 - 2 \cdot 24 = 52 - 48 = 4$.

<u>דרך ב'</u>: מכיוון שתוצאות המשוואות הנתונות הם מספרים שלמים, נחפש מספרים שלמים המקיימים אותן.
על פי המשוואה הראשונה: $x \cdot y = 24$. ישנם מספר צמדים של מספרים שלמים המקיימים נתון זה:

2 ו-12 ; 3 ו-8 ו-4 ו-6.

מבין שלושת הזוגות שמצאנו, יש רק זוג מספרים אחד אשר מקיים גם את הנתון $(x+y)^2 = 100$, הזוג 4 ו-6.

נציב כי $x = 4$ ו- $y = 6$ בביטוי המבוקש, ונקבל: $(x-y)^2 = (4-6)^2 = (-2)^2 = 4$.

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: נתון: x, y ו-z מספרים חיוביים.

$x \cdot z = 9$

$x^4 \cdot y^4 \cdot z^3 = x \cdot y^4 \cdot z^2$

$x = ?$

פתרון: על פי המשוואה השנייה: $x^4 \cdot y^4 \cdot z^3 = x \cdot y^4 \cdot z^2$.

נחלק את שני האגפים ב- $x \cdot y^4 \cdot z^2$, ונקבל: $x^3 \cdot z = 1$.

מכיוון שעלינו למצוא מה ערכו של x, הרי שעלינו להיפטר מ-z.

נחלץ את z מהמשוואה הנתונה: $x \cdot z = 9 \Leftarrow z = \frac{9}{x}$

כעת נציב כי $z = \frac{9}{x}$ במשוואה השנייה, ונקבל: $x^3 \cdot z = 1 \Leftarrow x^3 \cdot \frac{9}{x} = 1 \Leftarrow 9x^2 = 1$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-9, ונקבל: $x^2 = \frac{1}{9} \Leftarrow x = \pm\frac{1}{3}$.

מכיוון שנתון כי x חיובי, הרי ש-x שווה ל- $\frac{1}{3}$.

תשובה (2).

---

9. **השאלה**: נתון: $a < b < c$

$a + c < b$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית.
נחפש מספרים אשר מקיימים את אי-השוויונים הנתונים. לדוגמה $a = -2$; $b = 1$ ו- $c = 2$.
כעת נבדוק את התשובות המוצעות.

תשובה (1): $0 < a \cdot b \cdot c$. מכיוון שמצאנו a שלילי ו-b ו-c חיוביים המקיימים את אי-השוויון, הרי שמכפלת a, b ו-c היא שלילית, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $0 < c$. מצאנו כי אי-השוויון מתקיים כאשר c חיובי, ולפיכך תשובה זו אינה נפסלת בשלב זה.

<u>תשובה (3)</u>: $a < 0$. מצאנו כי אי-השוויון מתקיים גם כאשר a שלילי, ולכן תשובה זו אינה נפסלת בשלב זה.

<u>תשובה (4)</u>: $c < a - b$. נציב את הערכים שמצאנו כי הם מקיימים את הנתונים, ונקבל: $2 < -2 - 1$ ⇦ $2 < -3$. מכיוון ש-2 אינו קטן מ-(-3) ניתן לפסול תשובה זו.

על מנת להכריע בין תשובות (2) ו-(3), נחפש דוגמה נוספת המקיימת את אי-השוויון, למשל $a = -2$; $b = -1$ ו- $c = 0$. בשלב זה ניתן לפסול גם את תשובה (2), ומכאן שתשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: נתבונן באי-השוויונים הנתונים. על פי הנתון הראשון $b < c$, נחסר c משני האגפים, ונקבל: $b - c < 0$.
לפי הנתון השני: $a + c < b$. נחסר c משני האגפים, ונקבל: $a < b - c$.
מכיוון שמצאנו כי $b - c < 0$, הרי ש-a קטן מביטוי שהוא שלילי $(b - c)$, ולפיכך ניתן לקבוע כי a הוא בהכרח מספר שלילי.

תשובה (3).

---

10. **השאלה:** נתון: $b < a$; $c < a$; $d < b$
איזה מאי-השוויונים הבאים נכון **בהכרח**?

פתרון: מכיוון שנתון כי a גדול מ-b ומ-c וכי b גדול מ-d, הרי ש-a הוא בהכרח המספר הגדול ביותר מבין כל המספרים הנתונים, ומכאן שבהכרח תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

11. **השאלה**: $2y - x = 3z$ $(y \neq 0)$

$z = x + y$

$\frac{x}{y} = ?$

פתרון: עלינו למצוא את היחס בין x ל-y, ולכן עלינו 'להיפטר' מ-z.
על פי המשוואה השנייה ערכו של z שווה ל-$(x + y)$.
נציב את ערכו של z במשוואה הראשונה, ונקבל: $2y - x = 3 \cdot (x + y)$ ⇦ $2y - x = 3x + 3y$
נחסר 2y ונחבר x לשני האגפים, ונקבל: $-y = 4x$
נכפול את שני האגפים ב-(-1), ונקבל: $-4x = y$.

מכיוון ש- $-4x = y$, הרי שהביטוי $\frac{x}{y}$ שווה ל- $-\frac{1}{4}$ $\left(\frac{x}{y} = \frac{x}{-4x} =\right)$.

תשובה (3).

12. **השאלה**: נתון: $\sqrt{x} = x^2$ $(0 < x)$

$x = ?$

פתרון: **דרך א'**: הגיון אלגברי

בשאלה זו מתואר מספר (x) שהשורש שלו שווה לריבועו. בדרך כלל, שורש וחזקה הן פעולות הפוכות, כלומר אחת מהן מגדילה והשנייה מקטינה. במצב זה לא ייתכן כי שתי הפעולות יתנו תוצאות זהות. מכאן שעלינו לחפש מצב מיוחד בו השורש והחזקה נותנים תוצאות זהות. ישנם שני מספרים המובילים למצב שכזה: 0 ו-1. מכיוון שנתון כי x חיובי, לא ייתכן שערכו הוא 0, ולכן הוא בוודאות שווה ל-1.

דרך ב': אלגברה

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $x = x^4$. נתון כי x חיובי ולפיכך נחלק את שני האגפים ב-x, ונקבל: $1 = x^3$. נוציא שורש שלישי משני האגפים, ונקבל: $1 = x$.

תשובה (1).

---

13. **השאלה**: נתון: $(2x - y)\cdot(y + 3x) = 0$

מה מהבאים **יכול** להיות ערכו של x?

פתרון: בשאלה זו נתונה מכפלה השווה ל-0. תוצאת מכפלה שווה ל-0 רק אם לפחות אחד מגורמי המכפלה שווה ל-0. כלומר, על מנת לפתור את המשוואה, יש להשוות את כל אחד מגורמי המכפלה ל-0, ולפתור. נעשה זאת כעת:

$2x - y = 0 \Rightarrow 2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$.

מכיוון שפתרון אפשרי זה הוא אינו אחד מהפתרונות המוצעים בתשובות, נשווה כעת את הגורם השני במכפלה ל-0.

$y + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -y \Rightarrow x = -\frac{y}{3}$.

תשובה (3).

---

14. **השאלה**: A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות שונות בין 1 ל-9.

נתון:

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\ \ C9 \\ \hline 400 \end{array}$$

$A + B - C = ?$

פתרון: נתחיל מחיבור ספרות האחדות:

נתון כי מחיבור ספרת האחדות C והספרה 9 מתקבלת ספרת האחדות 0.

נתון כי A, B ו-C הן אותיות המייצגות ספרות שונות בין 1 ל-9, כלומר מספרים חד-ספרתיים.

לא יתכן כי תוצאת החיבור של מספר חד ספרתי (C) ו-9 היא 0, ומכאן שההסבר היחיד הוא כי C ועוד 9 שווה ל- 10. אם תוצאת החיבור של C ו-9 היא 10, הרי ש-C שווה ל-1.

עלינו 'להעביר' את ספרת העשרות "1" לטור של ספרת העשרות.

נעבור לחיבור ספרות העשרות:

לא יתכן שתוצאת החיבור של הספרות 1, C ו-B שווה ל-0, ומכאן שתוצאת החיבור של 1, C ו-B שווים ל-10.

מכיוון שמצאנו כי C שווה ל-1, הרי ש-B שווה ל-8. נעביר את ספרת המאות "1" לטור של ספרות המאות.

חיבור ספרות המאות:

1 ועוד A שווה ל-4, ומכאן ש-A שווה ל-3.

לסיכום: $A + B - C = 3 + 8 - 1 = 10$

תשובה (2).

.15 **השאלה**: נתון: $ax + by = ay + bx$ $(a \neq b)$

$x - y = ?$

פתרון: על מנת לפשט תרגילים שבהם יש חיבור וחיסור עלינו לחפש להוציא גורם משותף.
מכיוון שאין גורם משותף שניתן להוציאו באף אחד מן האגפים, נחסר by ו- bx משני האגפים, ונקבל:
$ax - bx = ay - by$.
כעת ניתן להוציא x כגורם משותף באגף שמאלי של המשוואה ואת y כגורם משותף באגף ימים של המשוואה, ונקבל: $x(a - b) = y(a - b)$
מכיוון ש-a שונה מ-b הרי שהביטוי $(a - b)$ אינו שווה ל-0, ולפיכך נחלק כל אחד מן האגפים ב-$(a - b)$,
ונקבל: $x = y$. מצאנו כי x שווה ל-y, ומכאן ש- $x - y$ שווה ל-0.

תשובה (4).

.16 **השאלה**: $C = \frac{A + B}{4}$

$A + B + C = 30$

$C = ?$

פתרון: על מנת למצוא את C עלינו 'להיפטר' מהמשתנים $A + B$.
נתון כי $C = \frac{A + B}{4}$, נכפול את שני האגפים ב-4, ונקבל: $4C = A + B$.
נציב את הביטוי שחילצנו במשוואה $A + B + C = 30$, ונקבל: $4C + C = 30$ ⇦ $5C = 30$.
נחלק את שני האגפים ב-5, ונקבל: $C = 6$.

תשובה (3).

.17 **השאלה**: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$

$x = ?$

פתרון: נפשט את המשוואה על ידי כפל ב-20 של שני אגפי המשוואה, ונקבל: $10x + 5x - 4x = 20$ ⇦
$11x = 20$. כעת נחלק את שני האגפים ב-11, ונקבל: $x = \frac{20}{11}$ ⇦ $x = 1\frac{9}{11}$.

תשובה (3).

.18 **השאלה**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d \neq 0)$

איזה מהשוויונות הבאים נכון בהכרח?

פתרון: נכפול בביטוי $b \cdot d$ את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $a \cdot d = c \cdot b$.
ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(3).

נחלק את שני האגפים ב- $a \cdot c$, ונקבל: $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

תשובה (4).

---

19. **השאלה**: $\frac{5}{x} - 2 = \frac{7}{x}$ $\quad (x \neq 0)$

$x = ?$

פתרון: על מנת 'להיפטר' מהמכנים, נכפול ב-x את שני אגפי המשוואה, ונקבל: $5 - 2x = 7$.

נחסר 5 משני האגפים, ונקבל: $-2x = 2$

נחלק את שני האגפים ב-(2-), ונקבל: $x = -1$.

תשובה (2).

---

20. **השאלה**: $(3-3x)^2 = 9$ $\quad (x \neq 0)$

$x = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: אלגברה

אמנם אנו מכירים את נוסחת הכפל המקוצר, אולם אין צורך לפתוח את צד שמאל של המשוואה, שכן קל ופשוט הרבה יותר להוציא שורש לשני האגפים. כאשר מוציאים שורש ריבועי לשני האגפים יש למשוואה שני פתרונות: פיתרון חיובי ופתרון שלילי, כלומר: $3 - 3x = \pm 3$.

כאשר $3 - 3x = 3$, הרי ש: $-3x = 0$ ומכאן ש: $x = 0$. מכיוון שעל פי נתוני השאלה $x \neq 0$ ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(3).

$3 - 3x = -3 \Leftarrow -3x = -6 \Leftarrow x = 2$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת תשובות

מכיוון שהמשוואה שלפנינו היא משוואה פשוטה יחסית והתשובות הן מספרים עגולים, נציב את התשובות ונבדוק איזו תשובה מקיימת את המשוואה הנתונה.

<u>תשובה (1)</u>: 1. נציב $x = 1$ במשוואה הנתונה, ונקבל כי: $(3 - 3 \cdot 1)^2 = 9 \Leftarrow (3-3)^2 = 9 \Leftarrow 0^2 = 9$.

מכיוון שקיבלנו משוואה שאינה נכונה, הרי שתשובה זו אינה נכונה.

<u>תשובה (2)</u>: 2. נציב $x = 2$ במשוואה הנתונה, ונקבל כי: $(3 - 3 \cdot 2)^2 = 9 \Leftarrow (3-6)^2 = 9 \Leftarrow (-3)^2 = 9$.

מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

21. **השאלה**: $\frac{3x+1}{2} - \frac{x+3}{3} = 3$

$x = ?$

פתרון: נכפול את שני אגפי המשוואה ב-6 על מנת 'להיפטר' מהמכנים.

$3 \cdot (3x+1) - 2 \cdot (x+3) = 18$

$9x + 3 - 2x - 6 = 18 \Leftarrow 7x - 3 = 18 \Leftarrow 7x = 21 \Leftarrow x = 3$.

תשובה (3).

---

22. **השאלה**: $(x+2)^3 = 27$

מה ערכו של x?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: אלגברה
לא למדנו נוסחה לפתיחת ביטוי בחזקת 3, ולכן נוציא שורש שלישי לשני אגפי המשוואה
(שימו לב: כאשר מוציאים שורש שלישי לשני האגפים יש למשוואה פתרון אחד בלבד):
$x+2=3 \Leftarrow x=1$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: 1. נציב $x=1$ במשוואה הנתונה, ונקבל כי: $(1+2)^3 = 27 \Leftarrow 3^3 = 27$.
מכיוון שקיבלנו משוואה נכונה, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

23. **השאלה**: $x \cdot y = m \cdot n \quad (x, y, m, n \neq 0)$
איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

פתרון: נבדוק איזו מהתשובות המוצעות שקולה למשוואה הנתונה:

<u>תשובה (1)</u>: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$. נכפול ב- $y \cdot n$ את שני האגפים, ונקבל: $x \cdot n = y \cdot m$. תשובה (1) נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{m \cdot x}{n} = y$. נכפול ב-n את שני האגפים, ונקבל: $m \cdot x = y \cdot n$. תשובה (2) נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{y \cdot n}{x} = \frac{m \cdot n^2}{x^2}$. נכפול ב- x^2 את שני האגפים, ונקבל: $m \cdot n^2 = y \cdot n \cdot x$. נחלק ב-n את שני האגפים, ונקבל: $m \cdot n = y \cdot x$. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

24. **השאלה**: $a + 3b + 2c = 2a + 2b + c \quad (x, y, m, n \neq 0)$
מכאן נובע **בהכרח** ש-

פתרון: נחסר $a + 2b + c$ משני האגפים, ונקבל:
$b + c = a$

תשובה (3).

---

25. **השאלה**: x ו-y הם מספרים המקיימים $\frac{x}{y} < 0$ $(x \neq y)$

איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה בהכרח?

פתרון: מכיוון שתוצאת החילוק של x ב-y קטנה מ-0, הרי ש-x ו-y הם בהכרח שני מספרים שוני סימן: אחד מהם חיובי והאחר שלילי.

תשובה (1): $x \cdot y < 0$. מכפלת שני מספרים שוני סימן היא בהכרח שלילית. לאור נתוני השאלה, הטענה בתשובה זו בהכרח נכונה, ולכן תשובה זו אינה נכונה.

תשובה (2): $x + y < 0$. יתכן כי תוצאת החיבור של שני מספרים שוני סימן תהיה חיובית ויתכן כי היא תהיה שלילית.
לדוגמה: כאשר נחבר את המספר החיובי 5 עם המספר השלילי (3-), נקבל תוצאה שהיא חיובית 2. אולם כאשר נחבר את אותו מספר חיובי (5) עם המספר השלילי (10-) תתקבל התוצאה שלילית שהיא (5-).
לסיכום: הטענה בתשובה זו **אינה** בהכרח נכונה, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (3): $0 < (-x) \cdot y$. ניתן לפשט את הטענה שבתשובה זו באופן הבא: $0 < (-1) \cdot x \cdot y$.
מצאנו כי x ו-y הם מספרים שוני סימן, ומכאן שמכפלת x ב-y היא בהכרח מספר שלילי.
כאשר כופלים מספר שלילי ב-(1-) תתקבל בהכרח תוצאה הגדולה מ-0.

תשובה (4): $\frac{y - x}{x - y} = -1$. כפי שכבר למדנו בשלב מוקדם יותר בקורס, תוצאת החילוק של שני תרגילי חיסור "הפוכים" שווה תמיד ל-(1-).

תשובה (2).

---

26. **השאלה**: $-(6 - 2x) \cdot \frac{3}{4} = x - 2$

$x = ?$

פתרון: נכפול ב-4 את שני אגפי המשוואה על מנת 'להיפטר' מהמכנה, ונקבל: $-3 \cdot (6 - 2x) = 4 \cdot (x - 2)$

נפתח את הסוגריים, ונקבל: $-18 + 6x = 4x - 8$
נחסר 4x משני האגפים ונחבר 18 לשני האגפים, ונקבל: $2x = 10$ ⇦ $x = 5$.

תשובה (2).

---

27. **השאלה**: $\frac{4y + 5}{x + y} = 4$ $(x + y \neq 0)$

$x = ?$

פתרון: על מנת 'להיפטר' מהמכנה נכפול את שני האגפים ב-$(x + y)$, ונקבל:
$4y + 5 = 4 \cdot (x + y)$ ⇦ $4y + 5 = 4x + 4y$.
נחסר 4y משני האגפים, ונקבל: $5 = 4x$.
נחלק ב-4 את שני האגפים, ונקבל: $\frac{5}{4} = x$ ⇦ $1\frac{1}{4} = x$.

תשובה (2).

---

28. **השאלה**: a, b, c ו- d מספרים שונים מ-0.

$$\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}$$

$$4b=3c$$

$$d=?$$

פתרון: על מנת 'להיפטר' מהמכנים נכפול את שני האגפים ב- $a\cdot b\cdot c\cdot d$, ונקבל: $2\cdot c\cdot d=a\cdot b$.

מכיוון שמבקשים למצוא את d במונחים של a, עלינו להיפטר מהמשתנים b ו-c.

מכיוון שנתון כי: $4b=3c$ נחלק ב-4 את שני האגפים ונקבל: $b=\frac{3c}{4}$.

נציב את הביטוי שקיבלנו במשוואה, ונקבל: $2\cdot c\cdot d=a\cdot\frac{3c}{4}$.

נכפול ב-4 את שני האגפים, ונקבל: $8\cdot c\cdot d=a\cdot 3\cdot c$.

נחלק את שני האגפים ב-c, ונקבל: $8d=3a$ $\Leftarrow$ $d=\frac{3a}{8}$.

תשובה (2).

---

29. **השאלה**: $(x+y)^2=(x-y)^2$

$$x\cdot y=?$$

פתרון: נפתח את הסוגריים באמצעות נוסחת הכפל המקוצר: $x^2+y^2+2xy=x^2+y^2-2xy$.

נחסר x^2 ו- y^2 משני האגפים, ונקבל: $2xy=-2xy$.

נחבר $2xy$ לשני האגפים ונקבל: $4xy=0$. נחלק את שני האגפים ב-4, ונקבל: $x\cdot y=0$.

תשובה (2).

---

30. **השאלה**: $2a=5b$ $\quad(b\neq 0)$

$$\frac{a}{3b}=?$$

פתרון: על פי הנתון $2a=5b$. על מנת לחלץ מתוך המשוואה הנתונה את ערכו של a, נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $a=\frac{5b}{2}$.

נציב נתון זה בביטוי שאת ערכו עלינו למצוא, ונקבל: $\frac{5}{6}$ $\left(\frac{a}{3b}=\frac{\frac{5b}{2}}{3b}=\frac{5b}{2}\cdot\frac{1}{3b}=\frac{5\cancel{b}^1}{6\cancel{b}_1}\right)$.

תשובה (3).

---

31. **השאלה**: $x \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{x}$

$x = ?$

פתרון: על מנת להיפטר מסימן השורש נעלה בריבוע את שני האגפים, ונקבל:
$x^2 \cdot 8 \cdot 2 = x \Leftarrow 16x^2 = x$.

נחלק את שני האגפים ב-16x, ונקבל: $x = \frac{1}{16}$.

תשובה (2).

---

32. **השאלה**: $x = y - 3$

$2y - x = x + 6$

$x = ?$

פתרון: מכיוון שעלינו למצוא את ערכו של x, נחלץ את y מהמשוואה הראשונה ונציב את הביטוי שנקבל במשוואה השנייה.

$x = y - 3$ ומכאן ש: $x + 3 = y$.

$2y - x = x + 6$ נציב במקום y את הביטוי שחילצנו מהמשוואה הראשונה, ונקבל: $2 \cdot (x + 3) - x = x + 6$

נפתח סוגריים, ונקבל: $2x + 6 - x = x + 6 \Leftarrow x + 6 = x + 6$

נחסר x משני האגפים, ונקבל: $6 = 6$.

כאשר מקבלים משוואה מסוג זה (פסוק אמת), הרי שבהכרח כל x מקיים את המשוואה.

תשובה (4).

---

33. **השאלה**: $(x + y)^2 - z^2 = \frac{8}{9}(x + y)^2$ $\qquad (0 < x, y, z)$

$z = ?$

פתרון: ראשית נבודד את z באחד האגפים: $(x + y)^2 - \frac{8}{9}(x + y)^2 = z^2$.

קיבלנו כי: $\frac{1}{9}(x + y)^2 = z^2$.

על מנת לקבל את ערכו של z נוציא שורש ריבועי משני האגפים, ונקבל: $\frac{1}{3}(x + y) = z$.

תשובה (3).

---

34. **השאלה**: $a = b - 2$

$a - 2 = 3(b - 4)$

$a = ?$

פתרון: מכיוון שעלינו למצוא את ערכו של a, 'ניפטר' מ-b על ידי חילוצו מהמשוואה הראשונה והצבתו במשוואה השנייה: $a = b - 2 \Leftarrow a + 2 = b$

נציב את הביטוי המשוואה השנייה, ונקבל: $a - 2 = 3(a + 2 - 4)$

$a - 2 = 3(a - 2) \Leftarrow a - 2 = 3a - 6 \Leftarrow 4 = 2a \Leftarrow 2 = a$

תשובה (2).

.35 **השאלה**: $\frac{xy+2}{xy^2} = \frac{2x+y}{2yx}$ $(0 < x, y)$

$y = ?$

פתרון: ראשית ניפטר מהמכנים על ידי הכפלת שני אגפי המשוואה ב- $2xy^2$.

קיבלנו: $2(xy+2) = y(2x+y)$

$2xy + 4 = 2xy + y^2$

נחסר $2xy$ משני האגפים, ונקבל: $4 = y^2$ ⇦ $\pm 2 = y$.

מכיוון שעל פי נתוני השאלה y חיובי, הרי ש: $y = 2$.

תשובה (2).

.36 **השאלה**: $a^2b - a^2b^2 = ab$ $(1 < a, b)$

$b = ?$

פתרון: נחלק את שני אגפי המשוואה ב- ab, ונקבל: $a - ab = 1$.

על מנת לבודד את b באחד האגפים נחבר ab ונחסר 1 משני האגפים, ונקבל: $a - 1 = ab$

נחלק את שני האגפים ב-a, ונקבל: $b = \frac{a-1}{a}$.

תשובה (2).

.37 **השאלה**: הוגדרה פעולה חדשה $ כך שעבור כל שני מספרים חיוביים a ו-b מתקיים: $5a\$2b = 2a\$5b$.
איזו מהאפשרויות הבאות יכולה להיות הגדרת הפעולה $x\$y$?

פתרון: עלינו למצוא מהי הפעולה המתמטית אשר יכולה להחליף את פעולת ה-$. ניתן להציב את התשובות ולבדוק האם המשוואה הנוצרת כתוצאה מהפעולה המתמטית שבתשובה נכונה בהכרח עבור כל a ו- b חיוביים.

<u>תשובה (1)</u>: $x + y$. על פי תשובה זו ניתן להחליף את הסימן $ בפעולת החיבור. כלומר $5a + 2b = 2a + 5b$.
מכיוון שטענה זו אינה נכונה בהכרח עבור כל שני מספרים חיוביים a ו-b, הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: x^y. על פי תשובה זו: $5a^{2b} = 2a^{5b}$. טענה זו אינה נכונה בהכרח עבור כל שני מספרים חיוביים a ו-b, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $x \cdot y$. על פי תשובה זו: $5a \cdot 2b = 2a \cdot 5b$. מכיוון שכל אחד מהביטויים בשני אגפי משוואה זו שווה ל- $10ab$, הרי שמשוואה זו נכונה עבור כל a ו-b. מכיוון שמצאנו את התשובה הנכונה אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

תשובה (3).

---

38. **השאלה**: נתון: $x^4 < x^3$

איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

פתרון: $x^4 < x^3$. x^4 הוא מספר בחזקה זוגית, ומכאן שהביטוי x^4 הוא בהכרח שווה או גדול מ-0.
מכיוון ש- x^3 גדול מביטוי שמצאנו כי הוא גדול או שווה ל-0, הרי שניתן להסיק כי x^3 הוא בהכרח ביטוי חיובי. אם x^3 הוא ביטוי חיובי
מכיוון ש-x חיובי, ניתן לחלק את שני אגפי אי-השוויון בביטוי החיובי x^3, ולקבל כי: $x < 1$.

<u>שימו לב:</u> ניתן לפתור את השאלה גם באמצעות הצבת מספר מכל אחד מן התחומים המוצעים בתשובות ובדיקה מי מהמספרים מקיים את אי-השוויון הנתון בשאלה.

תשובה (2).

---

39. **השאלה**: נתון: $x < -1$

$$x + y = 0$$

$$z = x + 1$$

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

פתרון: נתון כי $x + y = 0$, ומכאן ש-x ו-y הם בהכרח מספרים נגדיים, כלומר שני מספרים שמרחקם מ-0 שווה. נתון כי $x < -1$, ומכאן ש-y הוא בהכרח מספר חיובי **הגדול** מ-1.
על פי הנתון השלישי: $z = x + 1$. נתון כי x הוא מספר שלילי הקטן מ-(1-), ומכאן ש-z אשר גדול מ-x ב-1 אף הוא בהכרח מספר שלילי.
מצאנו כי y הוא מספר חיובי וכי z ו-x הם מספרים שליליים, כאשר z גדול מ-x, ומכאן: $x < z < y$.

תשובה (4).

---

40. **השאלה**: נתון: $10 < x \cdot y$

$$0 < x < 5$$

איזה מאי-השוויונים הבאים נכון **בהכרח**?

פתרון: על פי הנתון x הוא בין 0 ל-5. מכיוון שכל התשובות מתייחסות ל-y, ננסה להציב את הערכים הקיצוניים של x ולבדוק למה שווה y במצבים אלו.
אם x שווה ל-0, אין y שיגרום למכפלה $x \cdot y$ להיות גדולה מ-10, לפיכך נעבור לבדוק את הקצה השני של הטווח: אם x יהיה שווה ל-5, הרי שעל מנת שתוצאת המכפלה של x ב-y תהיה גדולה מ-10, על y בהכרח להיות גדול מ-2.

תשובה (2).

.41 **השאלה**: נתון: $x < \frac{1}{x}$

$-2x < x$

איזה מאי-השוויונים הבאים נכון **בהכרח**?

פתרון: נתון: $-2x < x$. נחבר $2x$ לשני האגפים, ונקבל: $0 < 3x$ ⇦ $0 < x$.

עלינו למצוא x חיובי המקיים את אי השוויון: $x < \frac{1}{x}$.

אי שוויון זה מתקיים רק כאשר x הוא שבר חיובי.

<u>שימו לב</u>: ניתן לפתור את השאלה גם באמצעות הצבת מספר מכל אחד מן התחומים המוצעים בתשובות ובדיקה מי מהמספרים מקיים את אי-השוויון הנתון בשאלה.

תשובה (2).

.42 **השאלה**: נתון: x, y ו-z מספרים שונים זה מזה. $x + y + z = 0$

איזו מהטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

פתרון: סכום שלושת המספרים שווה ל-0 ונתון כי שלושתם שונים זה מזה.
אם שלושת המספרים יהיו חיוביים סכום שלושת המספרים יהיה בהכרח חיובי.
אם שלושת המספרים יהיו שליליים סכום שלושת המספרים יהיה בהכרח שלילי.
מכאן בהכרח חלק מן המספרים חיוביים וחלקם שליליים.

תשובה (2).

.43 **השאלה**: נתון: $2x + y = 0$ $(x, y \neq 0)$

איזו מהקביעות הבאות נכונה בוודאות?

פתרון: כפי שלמדנו, כאשר נתון כי סכומם של שני מספרים השונים מ-0 שווה ל-0, ניתן להסיק כי מספרים אלו הם מספרים נגדיים, כלומר y ו-$2x$ הם שוני סימן, ומכאן שגם y ו-x הם שוני סימן.

<u>שימו לב</u>: ניתן גם לעשות פישוט אלגברי למשוואה הנתונה ולהפחית y משני האגפים על מנת לקבל $2x = -y$ משוואה שעל פיה ניתן להסיק כי $2x$ ו-y הם שני מספרים שמרחקם מ-0 שווה וסימניהם הפוכים (חיובי ושלילי, כאשר לא ידוע מי מהם חיובי ומי שלילי).

תשובה (4).

---

44. **השאלה**: $a + b = 0$ $(a , b \neq 0)$

מה מהבאים **אינו** מתחייב?

פתרון: כפי שלמדנו, כאשר נתון כי סכומם של שני מספרים השונים מ-0 שווה ל-0, ניתן להסיק כי מספרים אלו הם מספרים נגדיים.

תשובה (1): $a = -b$. אם נפחית b משני אגפי המשוואה הנתונה, נקבל כי משוואה זו בהכרח נכונה.

תשובה (2): $a^2 = b^2$. מרחקם מ-0 של שני מספרים נגדיים שווה. כאשר נעלה שני מספרים כאלו בריבוע תהיה התוצאה בהכרח שווה.

תשובה (3): $\frac{a}{b} = -1$. מספרים נגדיים הם מספרים אשר מרחקם מ-0 שווה והם בעלי סימנים הפוכים. כאשר נחלק שני מספרים נגדיים זה בזה תתקבל בהכרח התוצאה 1-.

תשובה (4): $a^2 + b^2 = 0$. משוואה זו בהכרח אינה נכונה.
על פי נתוני השאלה, a ו-b הם שני מספרים השונים מ-0. כאשר נעלה כל אחד מהם בריבוע נקבל בהכרח מספר חיובי. סכומם של שני מספרים חיוביים הוא בהכרח חיובי, כלומר שונה מ-0.

תשובה (4).

---

45. **השאלה**: האותיות A, B ו-C מייצגות כל אחת ספרה שונה בין 1 ל-9.

נתון:

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\quad 8 \\ \hline C6 \end{array}$$

$B + C = ?$

פתרון: נבדוק מיהם המספרים אשר מקיימים את המשוואה הנתונה.
המספר הדו-ספרתי היחיד שכאשר נכפול אותו ב-8 נקבל מספר **דו-ספרתי** אשר ספרת האחדות שלו היא 6 הוא 12, ומכאן שמצאנו כי $AB = 12$. תוצאת המכפלה של 12 ב-8 שווה ל-96.
ומכאן ש: $C = 9$.
אם B שווה ל-2 ו-C שווה ל-9, הרי שסכומם שווה ל-11 $(B + C = 2 + 9 =)$.

תשובה (1).

---

46. **השאלה**: נתון: $2 - x^2 = y^2 + 2$

איזו מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

פתרון: נחסר 2 משני אגפי המשוואה, ונקבל: $-x^2 = y^2$. נוסיף x^2 לשני האגפים, ונקבל: $0 = x^2 + y^2$.
כאשר מעלים מספר כלשהו בריבוע מקבלים בהכרח תוצאה השווה או הגדולה מ-0. מכיוון שסכומם של הביטויים x^2 ו- y^2 שווה ל-0, הרי שבהכרח x ו-y שווים ל-0.

תשובה (2).

---

47. **השאלה**: כמה פתרונות קיימים למשוואה: $x^3 = x^4$?

פתרון: עלינו למצוא מספר (x) שבחזקה שלישית וחזקה רביעית נותן את אותה תוצאה. ישנם רק שני מספרים כאלו: 0 ו-1, שבכל חזקה אינם משתנים ולכן נותנים תוצאה זהה.

תשובה (2).

---

48. **השאלה**: נתון: $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, $|a| \neq |b|$.
איזו מהטענות הבאות נובעת **בהכרח** מהנתונים?

פתרון: נפשט את המשוואה הנתונה. ראשית נפתח סוגריים, על פי נוסחת הכפל המקוצר השנייה, ונקבל:
$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - b^2$. נחסר a^2 משני האגפים, ונקבל: $-2ab + b^2 = -b^2$.
נחבר $2ab$ ו- b^2 לשני האגפים, ונקבל: $2b^2 = 2ab$. נחלק ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $b^2 = ab$.
מכיוון שלא ידוע אם b שווה או שונה מ-0, לא ניתן לחלק בו, ולכן לא ניתן להמשיך ולפשט את המשוואה.
לכן נעצור ונחשוב באלו מצבים תתקיים המשוואה:
<u>מצב ראשון</u>: a שווה ל-b, ולכן בשני האגפים יש b כפול עצמו. מצב זה לא ייתכן, שכן נתון כי $|a| \neq |b|$.
<u>מצב שני</u>: b שווה ל-0. במצב זה שני האגפים שווים עבור כל a.
מכיוון שהמצב הראשון אינו אפשרי, הרי שהמצב השני נכון בהכרח.

תשובה (2).

---

49. **השאלה**: האותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות בין 1 ל-9.
נתון: $AB \times 6 = 7B$

$A + B = ?$

פתרון: במשוואה מתואר מספר דו-ספרתי (AB) שכאשר כופלים אותו ב-6 מקבלים מספר דו-ספרתי אשר ספרת העשרות שלו היא 7. ישנם שני מספרים אשר עשויים לקיים נתון זה: 12 ו-13.
המספר 13 אינו יכול להתאים שכן תוצאת המכפלה של 13 ב-6 היא 78, ומכיוון שעל פי הנתון ספרת האחדות של התוצאה שווה לספרת האחדות של המספר הדו ספרתי AB.
כאשר AB שווה ל-12 תוצאת המכפלה 12 ב-6 היא 72, ומכאן שהמספר הדו-ספרתי AB הוא 12, ספרת העשרות A שווה 1 ו-B שווה 2, ולכן $A + B = 3$.

תשובה (3).

---

50. **השאלה**: נתון: $x^y = 1$ $(0 < x, y)$
$x \cdot y = ?$

פתרון: נתונה חזקה השווה ל-1. תוצאת חזקה יכולה להיות שווה ל-1 בשלושה מקרים:
<u>מקרה ראשון</u>: המעריך שווה ל-0. מצב זה לא ייתכן שכן נתון ש-y גדול מ-0.
<u>מקרה שני</u>: הבסיס שווה ל-1.
<u>מקרה שלישי</u>: הבסיס שווה ל-(-1) והמעריך זוגי. מצב זה לא ייתכן שכן נתון ש-x חיובי.
מכיוון ששניים מהמקרים אינם אפשריים, הרי שהמקרה הנותר הוא שנכון בהכרח. כלומר x שווה ל-1, ולכן $x \cdot y = 1 \cdot y = y$.

תשובה (3).
