מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(4)	(1)	(1)	(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(3)	(2)	(1)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

1. **השאלה**: נתון: $3x + 5y = 11$

$6x + 8y = 20$

$x = ?$

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות

אנו נשאלים על ערכו של x ולפנינו תשובות מספריות. לכן ניתן להציב את המספרים שבתשובות המוצעות. נציב את ערכו של x באחת מהמשוואות ובעזרתו נמצא את ערכו של y. לאחר מכן, עלינו לבדוק שהערכים של x ו-y, אותו מצאנו, מתאימים למשוואה השנייה. התשובה הנכונה תהיה זו שבה ערכי x ו-y זהים בשתי המשוואות.

<u>תשובה (1)</u>: 1.5. תשובה זו אינה נוחה לבדיקה, שכן הצבה של 1.5 במקום x תגרור עבודה עם שברים. לכן, נעדיף לבדוק תשובות שלמות.

<u>תשובה (2)</u>: 2. נציב כי $x = 2$ במשוואה הראשונה, ונקבל:

$3x + 5y = 11 \Leftarrow 3\cdot 2 + 5y = 11 \Leftarrow 6 + 5y = 11$.

נחסר 6 משני צדי המשוואה, ונקבל: $6 + 5y = 11 \Leftarrow 5y = 5$.

נחלק ב-5 את שני צדי המשוואה, ונקבל: $5y = 5 \Leftarrow y = 1$.

כעת נציב כי $x = 2$ ו- $y = 1$ במשוואה השנייה, ונקבל:

$6x + 8y = 20 \Leftarrow 6\cdot 2 + 8\cdot 1 = 20 \Leftarrow 12 + 8 = 20 \Leftarrow 20 = 20$.

המשוואה שהתקבלה נכונה, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: פישוט אלגברי

ראשית, תוכלו לראות כי המשוואה השנייה ניתנת לפישוט על ידי חלוקה ב-2. לכן, נתחיל בפישוט המשוואה. נחלק את שני צדי המשוואה ב-2, ונקבל: $6x + 8y = 20 \Leftarrow 3x + 4y = 10$.

קיבלנו שתי משוואות בהן ל-x יש מקדם זהה. בפתרון של מערכת משוואות, לרוב נעדיף 'להיפטר' מהנעלם עליו לא נשאלנו. כלומר, במקרה זה מכיוון שנשאלנו על ערכו של x הינו מעדיפים להיפטר מ-y.
עם זאת, מכיוון שהמקדם של x זהה בשתי המשוואות, יהיה קל יותר להיפטר מ-x. לאחר שנעשה זאת נוכל למצוא את y. בהמשך, בעזרת y, נוכל למצוא את x שעליו נשאלנו.

כדי להיפטר מ-x נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה (שפישטנו), ונקבל:
$3x + 5y - (3x + 4y) = 11 - 10$.

נפתח סוגריים ונכנס איברים, ונקבל: $3x + 5y - (3x + 4y) = 11 - 10 \Leftarrow 3x + 5y - 3x - 4y = 1 \Leftarrow$
$y = 1$.

כעת נציב את ערכו של y באחת מהמשוואות. נציב למשל כי $y = 1$ במשוואה הראשונה, ונקבל:
$3x + 5y = 11 \Leftarrow 3x + 5 \cdot 1 = 11 \Leftarrow 3x + 5 = 11$.
נחסר 5 משני צדי המשוואה, ונקבל: $3x = 6$.
נחלק את שני צדי המשוואה ב-3 ונגיע לתוצאה: $x = 2$.

תשובה (2).

---

2. **השאלה**: לברק היו 10 פרחים, 5 כחולים ו-5 צהובים, ולשירה לא היו פרחים כלל.
ברק נתן לשירה 4 מהפרחים שלו.

איזו מן הטענות הבאות בהכרח **אינה** נכונה כעת?

פתרון: בדיקת תשובות

עלינו למצוא איזו טענה בהכרח אינה נכונה. לכן, נעבור על התשובות המוצעות ונבדוק לגבי כל תשובה האם הטענה שבה יכולה להתקיים. כל טענה שיכולה להתקיים אינה התשובה הנכונה. התשובה ש**לא** יכולה להתקיים, היא התשובה הנכונה.

נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): לשירה יש יותר פרחים צהובים מלברק

ברק העביר לשירה 4 פרחים בצבע כלשהו. ייתכן כי ברק העביר לשירה 4 פרחים צהובים. לברק היו 5 פרחים צהובים, ולכן לאחר ההעברה יישאר לו רק פרח צהוב אחד $(5 - 4 =)$. כך לשירה יהיו 4 פרחים צהובים לברק פרח צהוב אחד, ולפיכך יהיו לה יותר פרחים צהובים מלברק. מכיוון שהטענה שבתשובה יכולה להתקיים, הרי שהתשובה אינה נכונה.

תשובה (2): לברק יש פרחים כחולים וצהובים במספר שווה

ברק העביר לשירה 4 פרחים בצבע כלשהו. לברק היו 5 פרחים צהובים ו-5 פרחים כחולים. אם הוא העביר לשירה 2 פרחים צהובים ו-2 פרחים כחולים, יישארו לו 3 פרחים כחולים $(5 - 2 =)$ ו-3 פרחים צהובים $(5 - 2 =)$. מצאנו כי יתכן שלברק יש מספר שווה של פרחים כחולים וצהובים. מכיוון שהטענה שבתשובה יכולה להתקיים, הרי שהתשובה אינה נכונה.

תשובה (3): לשירה יש פחות פרחים כחולים מלברק

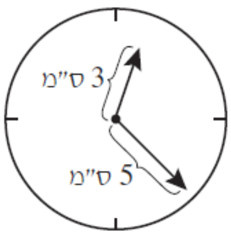
ברק העביר לשירה 4 פרחים בצבע כלשהו. ייתכן כי ברק העביר לשירה רק פרחים צהובים. לברק היו 5 פרחים כחולים, ולכן לאחר ההעברה ישארו ברשותו 5 פרחים כחולים. במצב כזה, לשירה אין פרחים כחולים בכלל, ולכן לברק יהיו יותר פרחים כחולים מלשירה. מכיוון שהטענה שבתשובה יכולה להתקיים, הרי שהתשובה אינה נכונה.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות הרי שהתשובה הנכונה היא תשובה מספר (4). אולם לשם השלמת ההסבר נבדוק גם אותה:

תשובה (4): מספר הפרחים הצהובים שבידי שירה ובידי ברק שווים

לברק יש 5 פרחים צהובים ולשירה אין פרחים צהובים כלל. לכן, כדי שלשירה ולברק יהיה מספר שווה של פרחים צהובים, ברק צריך לתת לשירה מחצית מהפרחים הצהובים שבידו. עם זאת, 5 הוא מספר אי-זוגי ולכן לא ניתן לחלק את הפרחים הצהובים באופן שווה. לפיכך, טענה זו אינה אפשרית, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).



.3 **השאלה**: לשעון יש שני מחוגים: מחוג שעות שאורכו 3 ס״מ, ומחוג דקות שאורכו 5 ס״מ.

במהלך שעות היממה המרחק בין קצות המחוגים (קצות ראשי החצים שבסרטוט) הוא לכל הפחות______ ס״מ ולכל היותר______ ס״מ.

פתרון: זוהי שאלת טווחים. עלינו למצוא את המרחק המינימלי והמרחק המקסימלי בין קצות המחוגים.

<u>מרחק מינימלי</u>: המרחק המינימלי בין קצות המחוגים יתקבל כאשר קצות המחוגים יהיו הכי קרובים שניתן. מצב כזה יתקבל כאשר שני המחוגים מורים על אותה נקודה בשעון. במצב כזה, המחוגים יתלכדו, וקצות המחוגים ימצאו זה לצד זה. כך, המרחק בין קצות המחוגים שווה להפרש בין אורכי המחוגים.
לפיכך, המרחק המינימלי בין קצות המחוגים הוא 2 ס״מ $(5-3=)$. כעת נוכל לפסול את תשובות (3) ו-(4).

<u>מרחק מקסימלי</u>: המרחק המקסימלי בין קצות המחוגים יתקבל כאשר קצות המחוגים יהיו הכי רחוקים שניתן. מצב כזה יתקבל כאשר שני המחוגים מורים לכיוונים מנוגדים. במצב כזה, שני המחוגים ייצרו קו ישר שקצותיו הם קצות המחוגים. במצב זה המרחק בין קצות המחוגים שווה לסכום אורכי המחוגים.
לפיכך, המרחק המקסימלי בין קצות המחוגים הוא 8 ס״מ $(5+3=)$.

לסיכום: מצאנו כי המרחק בין קצות המחוגים הוא לכל הפחות 2 ס״מ, ולכל היותר 8 ס״מ.

תשובה (1).

.4 **השאלה**: מחירה של שמלת ערב היה x שקלים.
בזמן מבצע ירד מחיר השמלה ב-y שקלים כל יום (החל ביום הראשון למבצע).

מה היה מחיר השמלה ביום ה-m למבצע (בשקלים)?

פתרון: **<u>דרך א׳</u>**: הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכם של x, y ו-m, ולכן נוכל להציב מספרים במקומם. אין בנתוני השאלה הגבלות כלשהן לגבי ערכם של הנעלמים, ועל כן נבחר מספרים נוחים כלשהם. נציב למשל כי: $x=5$, $y=1$, $m=2$.
כלומר, הצבנו כי המחיר המקורי של השמלה היה 5 שקלים; בזמן המבצע יורד מחיר השמלה ב-1 שקלים בכל יום; עלינו למצוא את מחיר החולצה ביום ה-2 למבצע.
אם מחיר השמלה היה 5 שקלים, ובכל יום מחירה יורד ב-1 שקלים, הרי שלאחר יום אחד מחירה יהיה 4 שקלים $(5-1=)$. לאחר יום נוסף מחירה של השמלה יירד בשקל אחד פעם נוספת. לפיכך לאחר יומיים מחירה יהיה 3 שקלים $(4-1=)$.
לסיכום: לאחר הצבת המספרים מצאנו שמחירה של השמלה לאחר ההנחה הוא 3 שקלים.
כעת נעבור על התשובות המוצעות. במקום הנעלמים שבתשובות נציב את אותם מספרים, ונפסול כל תשובה השונה מ-3:

<u>תשובה (1)</u>: $x-ym$. נציב כי $x=5$, $y=1$, $m=2$, ונקבל: $5-1\cdot 2$ ⇦ 3.
קיבלנו שמחיר השמלה לאחר ההנחה הוא 3 שקלים, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

<u>תשובה (2)</u>: $x\,(m-y)$. נציב כי $x=5$, $y=1$, $m=2$, ונקבל: $5\cdot(2-1)$ ⇦ $5\cdot 1$ ⇦ 5.
קיבלנו שמחיר השמלה לאחר ההנחה שונה מ-3 שקלים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $m\,(x-y)$. נציב כי $x=5$, $y=1$, $m=2$, ונקבל: $2\cdot(5-1)$ ⇦ $2\cdot 4$ ⇦ 8.
קיבלנו שמחיר השמלה לאחר ההנחה שונה מ-3 שקלים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $m-xy$. נציב כי $x=5$, $y=1$, $m=2$, ונקבל: $2-5\cdot 1$ ⇦ -3.
קיבלנו שמחיר השמלה לאחר ההנחה שונה מ-3 שקלים, ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו 3 תשובות ומכאן שתשובה (1) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: בניית ביטוי אלגברי

נתון כי מחירה של שמלה הוא x שקלים. בזמן המבצע, ידוע כי מחירה של השמלה יורד ב-y שקלים בכל יום. לפיכך, לאחר יום אחד, מחירה השמלה יהיה שווה למחירה המקורי פחות ההנחה. כלומר, לאחר יום אחד מחירה של השמלה הוא $(x-y)$ שקלים.

על פי אותו עיקרון, לאחר יומיים מחירה של השמלה יירד שוב ב-y שקלים, ולפיכך מחירה יהיה $(x-y)-y$ שקלים. כלומר, לאחר יומיים יהיה מחירה של השמלה $(x-2y)$ שקלים.

לאחר שלושה ימים מחירה יירד שוב ב-y שקלים ולכן מחירה יהיה $(x-3y)$ שקלים.

למעשה, מספר הפעמים שמחירה של השמלה יירד ב-y שקלים שווה למספר הימים בהם השמלה השתתפה במבצע. כלומר, לפי עיקרון זה, מחירה של השמלה ביום ה-m למבצע יירד ב-ym שקלים. לפיכך מחירה לאחר m ימים יהיה מחירה ההתחלתי – x פחות ym שקלים: $(x-ym)$ שקלים.

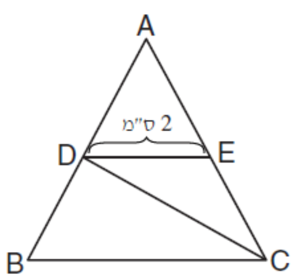
תשובה (1).

.5 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משולש ADE הוא משולש שווה-צלעות.

נתון: $BC \parallel DE$

CD הוא תיכון במשולש ABC

לפי הנתונים והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הטרפז DBCE (בסמ"ר)?



פתרון: שטח טרפז שווה לממוצע אורך בסיסיו כפול גובהו. אורכו של הבסיס הקצר נתון, ולפיכך, על מנת למצוא את שטח הטרפז, עלינו למצוא את אורך בסיסו הארוך ואת גובהו.

נתון כי משולש ADE הוא משולש שווה-צלעות. בנוסף, ידוע כי אורך אחת מצלעות המשולש שווה ל-2 ס"מ $(DE = 2)$. לכן, כל צלעות המשולש שוות גם הן ל-2 ס"מ, כלומר $AD = AE = 2$.

בנוסף, במשולש שווה-צלעות כל זוויות המשולש שוות ל-$60°$. נתון כי $BC \parallel DE$.

לפי זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים, ניתן לקבוע כי $\angle ADE = \angle ABC = 60°$ וכי $\angle AED = \angle ACB = 60°$.

כעת, נתבונן במשולש ABC: מצאנו כי כל זוויותיו שוות ל-$60°$, ולכן ניתן לקבוע כי משולש ABC הוא משולש שווה-צלעות.

נתון CD הוא תיכון. מצאנו כי $AD = 2$, ומכאן ש- $AD = DB = 2$. על כן, אורכה של הצלע AB, המורכבת מסכום הצלעות AD ו-DB, שווה ל-4 ס"מ $(2+2=)$.

מכיוון שמשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות, ועל כן $AB = BC = 4$.

מצאנו את אורך בסיסי הטרפז ולכן כעת נותר למצוא את גובהו. בסרטוט לא משורטט גובה בטרפז. לכן, עלינו להוריד גובה. לשם כך, נוריד גובה מנקודה D לבסיס BC. נקרא לנקודה בה הגובה נפגש עם הצלע BC נקודה F, וכך נקבל כי הצלע DF היא גובה בטרפז. נתבונן על המשולש DBF שקיבלנו:

במשולש זה מצאנו כי $\angle ABC = 60°$ והגדרנו כי $\angle DFB = 90°$. מכאן, ניתן לקבוע כי משולש DBF הוא משולש זהב. במשולש זה מצאנו כי $DB = 2$, כאשר DB היא יתר המשולש. כדי למצוא את אורך הגובה DF נשתמש ביחסים הידועים לגבי משולש זהב. במשולש זהב הניצב הקטן, כלומר הצלע BF, שווה למחצית מהיתר. על כן $BF = 1$ $\left(\frac{2}{2} =\right)$. כמו כן, במשולש זהב הניצב הגדול גדול פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן. על כן $DF = \sqrt{3}$ $\left(1 \cdot \sqrt{3} =\right)$.

לסיכום: נתון כי אורך הבסיס הקצר של הטרפז שווה ל-2 ס"מ; מצאנו כי אורך הבסיס הארוך של הטרפז שווה ל-4 ס"מ; ומצאנו כי גובה הטרפז שווה ל- $\sqrt{3}$ ס"מ.

על כן, שטח הטרפז שווה ל- $3\sqrt{3}$ סמ"ר $\left(\frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} =\right)$.

תשובה (3).

.6 **השאלה**: שלושה סיידים מסיידים קירות, כל אחד בקצב משלו.
סייד א מסייד בקצב של 1 מ"ר בשעה.
סייד ב מסייד בקצב של 80% מהקצב של סייד א, וסייד ג מסייד בקצב של 80% מהקצב של סייד ב.

כמה מ"ר יסיידו שלושת הסיידים ב-10 שעות?

פתרון: ידוע כי סייד א מסייד בקצב של 1 מ"ר בשעה. לפיכך, ב-10 שעות סייד א יסייד 10 מ"ר $(= 1\cdot 10)$.

ידוע כי סייד ב מסייד בקצב של 80% מהקצב של סייד א. לפיכך, לאחר 10 שעות סייד ב יסייד 80% ממה שסייד סייד א. מצאנו כי סייד א מסייד 10 מ"ר ב-10 שעות, ולכן סייד ב יסייד 8 מ"ר ב-10 שעות $\left(= \frac{80}{100}\cdot 10\right)$.

סייד ג מסייד בקצב של 80% מהקצב של סייד ב. מצאנו כי סייד ב מסייד 8 מ"ר ב-10 שעות, ולכן סייד ג יסייד 6.4 מ"ר ב-10 שעות $\left(= \frac{80}{100}\cdot 8\right)$.

מצאנו כי סייד א מסייד 10 מ"ר ב-10 שעות; סייד ב מסייד 8 מ"ר ב-10 שעות; וסייד ג מסייד 6.4 מ"ר ב-10 שעות. מכאן שביחד שלושת הסיידים יסיידו 24.4 מ"ר ב-10 שעות $(= 10 + 8 + 6.4)$.

תשובה (2).

.7 **השאלה**: a, b ו-c הם מספרים שלמים.
הממוצע של a, b ו-c הוא מספר שלם.
נתון: $a + b = c$

c בהכרח -

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכם של a ו-b ולכן נוכל להציב במקומם מספרים. עלינו למצוא מספרים המקיימים את נתוני השאלה. כלומר, יש למצוא מספרים שלמים, שהממוצע שלהם הוא מספר שלם, ושמתקיים: $a + b = c$.

נציב למשל כי $a = 1$ ו- $b = 2$. כך נקבל כי $c = 3$ $(= 1 + 2)$. כעת נבדוק כי הממוצע של שלושת המספרים הוא אכן מספר שלם. נציב בנוסחת הממוצע, ונקבל שהממוצע של המספרים שווה ל:

$$\frac{1+2+3}{3} \Leftarrow \frac{6}{3} \Leftarrow 2.$$

מצאנו כי ממוצע שלוש המספרים הוא מספר שלם, ולכן ההצבה מתאימה.

כעת נעבור על התשובות המוצעות. נזכור שמצאנו כי $c = 3$.

<u>תשובה (1)</u>: אי-זוגי. מצאנו כי $c = 3$. 3 הוא אכן מספר אי-זוגי, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

<u>תשובה (2)</u>: זוגי. 3 הוא מספר אי-זוגי, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: מתחלק ב-3. מצאנו כי $c = 3$. 3 הוא אכן מספר המתחלק ב-3, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

<u>תשובה (4)</u>: אינו מתחלק ב-3. 3 הוא מספר המתחלק ב-3, ולכן תשובה זו נפסלת.

פסלנו רק 2 תשובות ולכן יש לבצע הצבה נוספת. נשים לב כי מבין התשובות שנותרו, תשובה אחת קובעת כי c אי-זוגי והשנייה כי הוא מתחלק ב-3. לכן, ננסה למצוא מספר שיפסול את אחת התשובות. ננסה למשל להציב רק מספרים זוגיים: נציב כעת כי $a = 2$ ו- $b = 4$. מכאן ש- $c = 6$ $(= 2 + 4)$. כעת נבדוק שהממוצע של שלושת המספרים הוא אכן מספר שלם. הממוצע של שלושת המספרים שווה ל:

$\frac{2+4+6}{3}$ ⇦ $\frac{12}{3}$ ⇦ 4. מצאנו כי הממוצע הוא אכן מספר שלם, ולכן ההצבה מתאימה.

כעת נעבור על התשובות שנותרו. נזכור כי מצאנו ש- $c = 6$:

<u>תשובה (1)</u>: אי-זוגי. מצאנו כי $c = 6$. 6 הוא מספר זוגי, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: מתחלק ב-3. מצאנו כי $c = 6$. 6 הוא אכן מספר המתחלק ב-3 ועל כן התשובה מתאימה.

פסלנו 3 תשובות ולכן תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

<u>**דרך ב'**</u>: הבנה אלגברית

נתון כי הממוצע של a, b ו-c הוא מספר שלם. על פי נוסחת הממוצע, ממוצע שלושת המספרים שווה ל:

$\frac{a+b+c}{3}$. בנוסף, נתון כי $a + b = c$. נציב נתון זה בביטוי שקיבלנו עבור הממוצע של המספרים, ונקבל:

$\frac{a+b+c}{3}$ ⇦ $\frac{c+c}{3}$ ⇦ $\frac{2c}{3}$.

כאמור, ממוצע המספרים הוא מספר שלם. על מנת שנקבל כי הממוצע הוא אכן מספר שלם, המכנה בביטוי $\frac{2c}{3}$ חייב להצטמצם עם המונה. מכיוון שלא ניתן כעת לצמצם את הביטוי, ניתן לקבוע כי c אמור להצטמצם עם המכנה, כלומר עם 3. לפיכך ניתן לקבוע כי c חייב להתחלק ב-3 על מנת שנקבל תוצאה שלמה.

תשובה (3).

---

8. **השאלה**: מחירם של שתי פיתות ובגט אחד הוא 4.5 שקלים.
מחירם של בגט אחד ולחמנייה אחת הוא 4 שקלים.
מחירן של לחמנייה אחת ופיתה אחת הוא 2.5 שקלים.

מה מחירה של פיתה אחת (בשקלים)?

פתרון: <u>**דרך א'**</u>: בדיקת תשובות

עלינו למצוא מהו מחירה של פיתה. בתשובות נתונים מספרים נוחים ולפיכך נוכל לבדוק את התשובות המוצעות. בכל תשובה נשתמש במחיר הפיתה כדי למצוא את מחירן של לחמנייה ובגט, ונבדוק האם המחירים שמצאנו תואמים את נתוני השאלה.

<u>תשובה (1)</u>: 1. אם מחירה של פיתה אחת הוא 1 שקל אחד, אז מחירן של שתי פיתות הוא 2 שקלים $(= 1 \cdot 2)$. ידוע כי מחירן של שתי פיתות ובגט הוא 4.5 שקלים. מכאן שמחירו של בגט אחד הוא 2.5 שקלים $(= 4.5 - 2)$.

ידוע כי מחירו של בגט אחד ולחמנייה אחת הוא 4 שקלים. מצאנו כי מחירו של בגט אחד הוא 2.5 שקלים, ולכן מחירה של לחמנייה הוא 1.5 שקלים $(= 4 - 2.5)$.

כעת נבדוק כי הנתון השלישי מתאים למחירים שמצאנו. מצאנו כי מחירה של לחמנייה אחת הוא 2.5 שקלים, כאשר מחירה של פיתה הוא 1 שקל. לפיכך מחירן של פיתה אחת ולחמנייה אחת שווה ל-2.5 שקלים $(= 1 + 1.5)$. לפי הנתון מחירן של פיתה אחת ולחמנייה אחת הוא אכן 2.5 שקלים. מכיוון שהמספר שהצבנו מתאים לנתוני השאלה, זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: בניית משוואה

נשאלנו מהו מחירה של פיתה אחת, ולכן נסמן את מחירה של הפיתה ב-P שקלים. בעזרת הנעלם P ונתוני השאלה נבטא את מחירו של בגט ומחירה של לחמנייה. לאחר מכן, נציב את הביטויים שקיבלנו בנתון האחרון וניצור משוואה עם נעלם אחד – P. כך נוכל למצוא את P.

ידוע כי מחירם של שתי פיתות ובגט הוא 4.5 שקלים. אם מחירה של פיתה אחת הוא P שקלים, הרי שמחירן של שתי פיתות הוא 2P שקלים. מכאן שמחירו של בגט הוא $(4.5 - 2P)$ שקלים.

נתון כי מחירם של בגט אחד ולחמנייה אחת הוא 4 שקלים. מצאנו כי מחירו של בגט הוא $(4.5 - 2P)$ שקלים, ועל כן מחירה של לחמנייה אחת שווה ל: $4-(4.5-2P) \Leftarrow 4-4.5+2P \Leftarrow 2P-0.5$.

לסיכום: מחירה של פיתה הוא P שקלים, מחירו של בגט הוא $(4.5 - 2P)$ שקלים, ומחירה של לחמנייה הוא $(2P - 0.5)$ שקלים.

לפי הנתון השלישי, מחירן של לחמנייה אחת ופיתה אחת הוא 2.5 שקלים. נציב את הביטויים שמצאנו עבור מחיריהן של לחמנייה ופיתה ונמצא כי: $(2P-0.5)+P=2.5$.

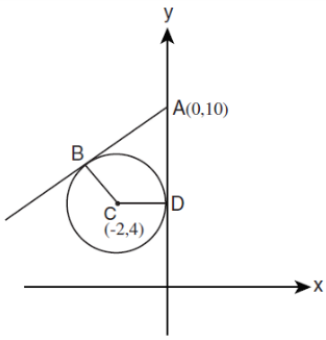
נפתח סוגריים ונכנס איברים, ונקבל: $(2P-0.5)+P=2.5 \Leftarrow 3P-0.5=2.5$.

נוסיף 0.5 לשני צדי המשוואה, ונקבל: $3P-0.5=2.5 \Leftarrow 3P=3$.

נחלק את שני צדי המשוואה ב-3, ונקבל: $3P=3 \Leftarrow P=1$.

תשובה (1).

.9 **השאלה**: במערכת הצירים שלפניכם מעגל שמרכזו C.
AB משיק למעגל בנקודה B.
ציר ה-y משיק למעגל בנקודה D.



לפי הנתונים והנתונים שבסרטוט,
מה שטח המרובע ABCD?

פתרון: המרובע שבסרטוט מורכב משתי צלעות שהן רדיוסים במעגל (CD ו-CB). בנוסף, שתי צלעותיו האחרות של המרובע הן משיקים היוצאים מאותה נקודה (AB ו-AD). שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה, כלומר $AD = AB$. בנוסף, שני הרדיוסים CD ו-CB שווים. כלומר קיבלנו מרובע עם שני זוגות של צלעות סמוכות שוות. מכאן שהמרובע ABCD הוא דלתון.

ניתן לחשב שטח של דלתון בשתי דרכים: מכפלת האלכסונים חלקי 2, או חלוקה באמצעות האלכסון AC לשני משולשים זהים, וחישוב שטח המשולש. המשיקים AD ו-AB משיקים למעגל בנקודות D ו-B בהתאמה. רדיוס הנוגע בנקודת ההשקה מאונך למשיק. הרדיוסים CD ו-CB נוגעים בנקודות ההשקה ולכן: $\angle ADC = \angle ABC = 90°$.

אם נחבר את קודקוד A עם קודקוד C נקבל שני משולשים ישרי זווית. על מנת למצוא את שטחי המשולשים יש למצוא את אורכי הניצבים שלהם. בעזרת ערכי הנקודות הנתונים בסרטוט נוכל למצוא את אורכי הניצבים. לפיכך, במקרה זה, נעדיף לחשב את שטח הדלתון באמצעות חלוקה למשולשים.

מצאנו כי $AD = AB$ וידוע כי $CD = CB$. הצלע AC היא צלע המשותפת לשני המשולשים. מכאן שכל צלעות המשולשים שוות זו לזו ולכן המשולשים ACD ו-ACB הם משולשים חופפים. לכן, נסתפק במציאת שטחו של אחד המשולשים, שכן שטחם של משולשים חופפים זהה.

במשולש ACD נתונים ערכיהן של שתי נקודות. לכן, נבחר לחשב את שטחו של משולש ACD.

נמצא את אורך ניצביו של משולש ACD:

הניצב CD הוא רדיוס המאונך לציר ה-y. נקודה D נמצאת על ציר ה-y ולכן ערך ה-x של הנקודה הוא 0. בנוסף, הנקודה D נמצאת על הקו הישר CD, המקביל לציר ה-x. לפיכך, ערכי ה-y של הנקודה D ושל הנקודה C זהים. נתון כי ערך ה-y של הנקודה C הוא 4, ולכן ערכי הנקודה D הם $(0,4)$.

אורך הקטע CD שווה להפרש בין ערכי ה-x של הנקודה C ו-D. לפיכך, $CD = 2$ $(|-2-0| =)$.

הניצב AD מתלכד עם ציר ה-y. לכן, אורכו של הקטע AD שווה להפרש בין ערכי ה-y של הנקודה D והנקודה A. מצאנו שערכי הנקודה D הם $(0,4)$. לכן, $AD = 6$ $(10-4 =)$.

שטח משולש ישר זווית שווה למכפלת הניצבים שלו חלקי 2. מצאנו כי $CD = 2$ וכי $AD = 6$, ומכאן שטח משולש ACD שווה ל-6 סמ״ר $\left(= \frac{2 \cdot 6}{2}\right)$.

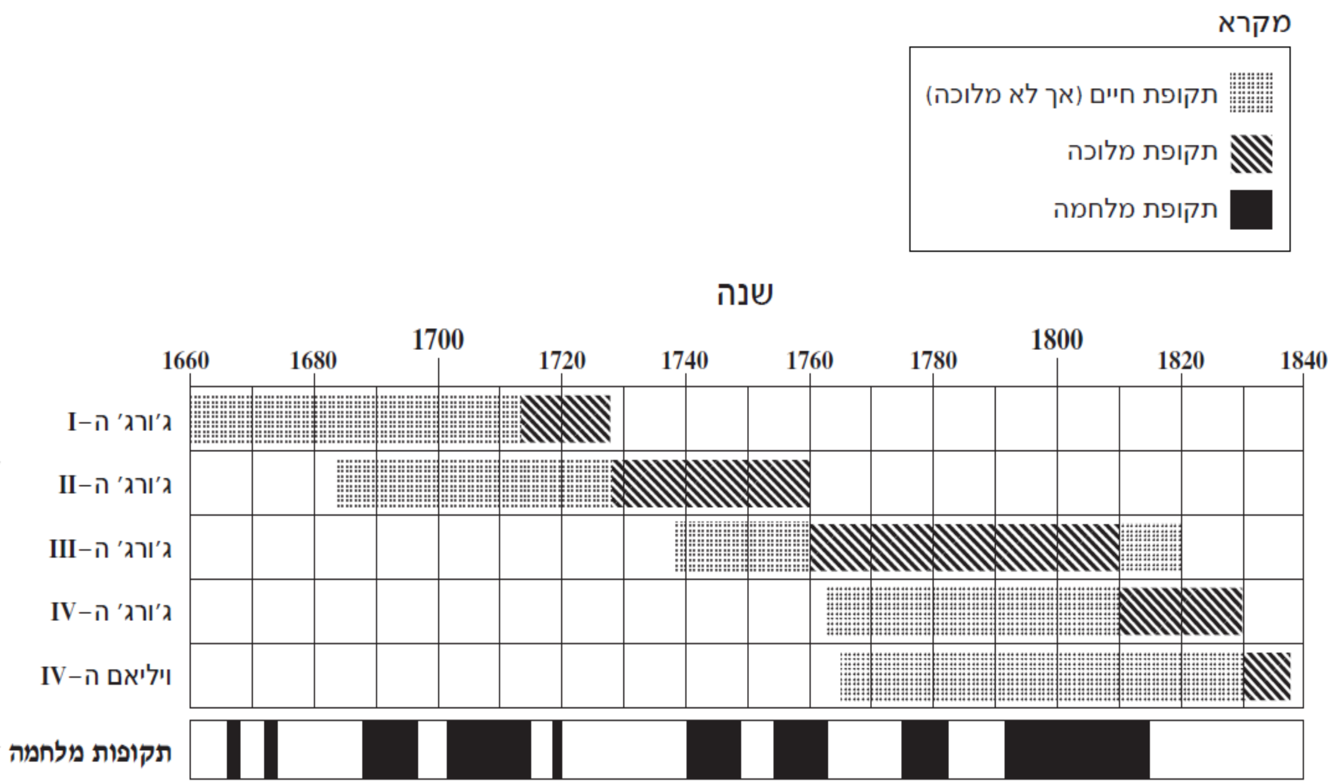
שטח הדלתון שווה לפעמיים שטחו של משולש ACD. על כן שטחו של הדלתון ABCD שווה ל-12 סמ״ר $(= 2 \cdot 6)$.

תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 10-13)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם וענו על ארבע השאלות שאחריו.

התרשים מתאר את תקופות חייהם ומלוכתם של חמישה ממלכי אנגליה בשנים 1840-1660.
כל אחת מחמש השורות העליונות בתרשים מתארת את תקופת חייו של אחד המלכים, ובתוכה - גם את תקופת מלוכתו.
השורה התחתונה של התרשים מתארת את תקופות המלחמה באנגליה באותן שנים (ראו מקרא).



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות אחרות.

השאלות

.10 **השאלה**: כמה זמן בקירוב חי ג׳ורג׳ ה-IV?

פתרון: בשורה העליונה של התרשים מופיע ציר זמן של שנים. לפי ציר הזמן נמצא באיזו שנה בקירוב נולד ג׳ורג׳ ה-IV ובאיזו שנה הוא נפטר. על פי התרשים, ניתן לראות כי ג׳ורג׳ ה-IV נולד כמה שנים אחרי שנת 1760 ונפטר בדיוק בשנת 1830. אילו ג׳ורג׳ היה חי בין השנים 1760-1830 הרי שהיה חי 70 שנים $(1830-1760=)$. מכיוון שג׳ורג׳ נולד אחרי שנת 1760 הרי שהוא חי קצת פחות מ-70 שנים. רק תשובה אחת קטנה במעט מ-70 והיא תשובה (1), ולפיה ג׳ורג׳ ה-IV חי בקירוב 67 שנים. לפיכך זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.11 **השאלה**: בשנים 1830-1750, כמה פעמים התחלף מלך אנגליה בתקופת מלחמה?

פתרון: בחלקו התחתון של התרשים ניתן לראות חלקים הצבועים בשחור. כל חלק שחור כזה מתאר פרק זמן בו התרחשה מלחמה. לכן, כדי למצוא כמה פעמים התחלף מלך אנגליה בתקופת מלחמה בין השנים 1830-1750, נבדוק מתי התחלף מלך אנגליה בין שנים אלה. נוכל לראות שהתחלף מלך אנגליה כאשר נגמרה תקופת מלוכתו של מלך אחד והתחילה תקופת מלוכתו של מלך אחר. תקופת מלוכה מסומנת בתרשים בדוגמת פסים. לאחר מכן, נבדוק האם בזמן זה הייתה מלחמה לפי חלקו התחתון של התרשים.

על פי נתוני התרשים, מלך אנגליה התחלף 3 פעמים בשנים 1830-1750:

בשנת 1760: בשנה זו התבצע חילוף בין המלך ג'ורג' ה-II והמלך ג'ורג' ה-III. כאשר נתבונן בחלקו התחתון של התרשים, נראה כי בשנה זו אכן הייתה מלחמה.

בשנת 1810: בשנה זו התבצע חילוף בין המלך ג'ורג' ה-III והמלך ג'ורג' ה-IV. כאשר נתבונן בחלקו התחתון של התרשים, נראה כי בשנה זו אכן הייתה מלחמה.

בשנת 1830: בשנה זו התבצע חילוף בין המלך ג'ורג' ה-IV והמלך ויליאם ה-IV. אולם, בשנה זו לא הייתה מלחמה.

לסיכום: מצאנו שבין השנים 1830-1750, מלך אנגליה התחלף 2 פעמים בזמן מלחמה, בשנים 1760 ו-1810.

תשובה (2).

.12 **השאלה**: מי מהמלכים הבאים מלך באנגליה 60 שנה לאחר מותו של המלך ג'ורג' ה-II ?

פתרון: על פי התרשים, המלך ג'ורג' ה-II מת בשנת 1760. לפיכך, 60 שנה אחרי מותו השנה הייתה 1820 $\left(= 60 + 1760\right)$. בשנת 1820, ג'ורג' ה-IV היה מלך אנגליה (מסומן בדוגמת פסים).

תשובה (3).

.13 **השאלה**: משנת 1700 ועד שנת 1800, כמה פעמים סך הכול היה רק מלך אחד מהחמישה בחיים?

הערה: כל פרק זמן קצוב כזה נחשב "פעם אחת".

פתרון: עלינו למצוא כמה פעמים היה רק מלך אחד בחיים בין השנים 1700 ל-1800. כל מלך נחשב חי בכל פרק הזמן הצבוע בתרשים המתאר את אותו מלך. כלומר, המלך בחיים גם בזמן המוגדר כ"תקופת חיים" וגם בזמן המוגדר כ"תקופת מלוכה" המופיעים בצבעים שונים בתרשים. שכן, לא סביר שהמלך מולך מהקבר.

נתבונן בתרשים ונחפש פרקי זמן בהם רק מלך אחד חי. רק מלך אחד חי כאשר בפרק זמן מסוים כל אחת מהשורות שמעליו או מתחתיו אינן צבועות. מנתוני התרשים עולה כי בתקופת הזמן המדוברת היו 2 פרקי זמן בהם רק מלך אחד היה בחיים:

פרק זמן 1: המלך ג'ורג' ה-I נפטר קצת לפני שנת 1730, ואחריו מלך המלך ג'ורג' ה-II. המלך ג'ורג' ה-II היה המלך היחיד בחיים כמעט לשנת 1740, כאשר המלך ג'ורג' ה-III נולד.

פרק זמן 2: המלך ג'ורג' ה-II נפטר בשנת 1760, ואחר כך מלך המלך ג'ורג' ה-III. המלך ג'ורג' ה-III חי לבדו כמה שנים בודדות עד שנולד המלך ג'ורג' ה-IV, כמה שנים בודדות אחרי שנת 1760.

לסיכום: משנת 1700 ועד שנת 1800 היו 2 תקופות בהן רק מלך אחד היה בחיים.

תשובה (2).

שאלות ובעיות (שאלות 14-20)

14. **השאלה**: נתון: $0 < a, b$.

$$10 + a = 5 + b$$

נסמן: $x = \frac{a}{b}$

התחום המדויק בו יכול x להימצא הוא:

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: הצבת דוגמה מספרית

המשוואה הנתונה ניתנת לפישוט. לכן, ראשית נפשט את המשוואה:
נחסר 5 משני צדי המשוואה, ונקבל: $10 + a = 5 + b$ ⇦ $5 + a = b$.
לא נשאלנו על ערכם של a ו-b ולכן נוכל להציב מספרים במקומם. עלינו להציב מספרים המקיימים את הנתונים. כלומר, עלינו להציב מספרים חיוביים המקיימים את המשוואה שפישטנו. נציב למשל כי: $a = 1$ ונמצא כי $b = 6$.

כעת נענה על השאלה. נשאלנו לגבי התחום בו נמצא x. ידוע כי $x = \frac{a}{b}$, ולכן, לפי המספרים שהצבנו, ערכו של x שווה ל- $\frac{1}{6}$.

כעת נעבור על התשובות המוצעות. נפסול כל תשובה אשר ערכו של x שמצאנו אינו מתאים לטווח שבה:

<u>תשובה (1)</u>: $0 < x < 1$. מצאנו כי $x = \frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}$ אכן נמצא בין 0 ל-1, ולכן התשובה מתאימה.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{1}{2} < x < 2$. מצאנו כי $x = \frac{1}{6}$. $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ ולכן התשובה אינה מתאימה. נפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: $0 < x < 5$. מצאנו כי $x = \frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}$ אכן נמצא בין 0 ל-5, ולכן התשובה מתאימה.

<u>תשובה (4)</u>: $5 < x < 10$. מצאנו כי $x = \frac{1}{6}$. $\frac{1}{6} < 5$ ולכן התשובה אינה מתאימה. נפסול את התשובה.

נותרנו עם שתי תשובות. כאשר ננסה להציב מספרים אחרים, נקבל בכל פעם שבר חיובי ומכאן שגם תשובה (1) וגם תשובה (3) נכונות. לפיכך, עלינו להבין איזו מבין התשובות נכונה.
הטווח המוצע בתשובה (3) $(0 < x < 5)$ כולל בתוכו את הטווח המוצע בתשובה (1) $(0 < x < 1)$. לכן, בשביל להכריע מה התחום **המדויק** ביותר בו x נמצא, נבדוק האם x יכול להיות גדול מ-1.
נתון כי $x = \frac{a}{b}$. על מנת ש-x יהיה גדול מ-1, המונה a צריך להיות גדול מהמכנה b. אולם, מצאנו כי $5 + a = b$. ידוע כי a ו-b הם מספרים חיוביים, ולכן a תמיד קטן מ-b. אם a תמיד קטן מ-b אז המונה של השבר $\frac{a}{b}$ תמיד קטן מהמכנה. במצב כזה, תמיד נקבל שבר בין 0 ל-1. מכאן שהטווח המדויק ביותר עבור x הוא: $0 < x < 1$.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

בשאלה נתון ביטוי עבור x המורכב משני נעלמים, a ו-b. כדי שנוכל לדעת באיזה טווח נמצא x, עלינו לקבל ביטוי פשוט יותר עבור x, למשל ביטוי המכיל רק נעלם אחד. לכן, נשתמש בשאר נתוני השאלה על מנת ליצור ביטוי כזה.

ידוע כי $10 + a = 5 + b$. בעזרת המשוואה הנתונה נוכל לבודד את אחד הנעלמים ולהציבו בביטוי הנתון עבור x. כך נקבל ביטוי עבור x המכיל נעלם אחד בלבד. שימו לב: נוכל להבין מהו הטווח המדויק ביותר עבור x על ידי בידוד של כל אחד מהנעלמים.
נבחר באופן אקראי לבודד את b מתוך המשוואה הנתונה: $10 + a = 5 + b$.
נחסר 5 משני צדי המשוואה, ונקבל: $10 + a = 5 + b \Leftarrow a + 5 = b$.

כעת נציב את b שמצאנו בביטוי הנתון עבור x, ונקבל: $x = \frac{a}{b} \Leftarrow x = \frac{a}{a+5}$.

ידוע כי a ו-b הם מספרים חיוביים. לפיכך, המונה a הוא מספר חיובי כלשהו, והמכנה $(a+5)$ הוא מספר חיובי אחר הגדול ב-5 מהמונה. מכאן שהמונה של השבר תמיד קטן מהמכנה. כאשר המונה תמיד קטן מהמכנה נקבל שבר 'אמיתי', כלומר מספר בין 0 ל-1. מכאן שהטווח המדויק ביותר עבור x הוא $0 < x < 1$.

תשובה (1).

---

15. **השאלה**: נגדיר "מספר זוגני" כמספר שיש לו **רק** מחלקים זוגיים (נוסף על המחלק 1).

איזה מן המספרים הבאים **אינו** מספר זוגני?

פתרון: בדיקת תשובות

עלינו למצוא מי מבין המספרים שבתשובות אינו מספר זוגני. כלומר, עלינו למצוא מספר שמתחלק במספר אי-זוגי אחד לפחות. לכן, נעבור על התשובות המוצעות ונמצא את המחלקים של המספרים המופיעים בהן. מספר אשר נמצא לו מחלק אי-זוגי (נוסף על 1), **אינו** מספר זוגני, ועל כן יהיה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (1)</u>: 100^2. על מנת לדעת מי הם המחלקים של 100^2 נשתמש בפירוק לגורמים ראשוניים:
$100^2 \Leftarrow (2 \cdot 50)^2 \Leftarrow (2 \cdot 2 \cdot 25)^2$. כבר בשלב זה ניתן לראות כי 100^2 מתחלק ב-25, כלומר הוא מתחלק במספר אי-זוגי. לכן, 100^2 **אינו** מספר זוגני.

תשובה (1).

---

16. **השאלה**: נתון: x הוא מספר דו-ספרתי חיובי.
6x הוא מספר דו-ספרתי.

כמה ערכים שונים של x מקיימים את הנתון?

פתרון: ספירה ידנית

עלינו למצוא את כל המספרים המקיימים את נתוני השאלה. בתשובות מוצעים מספרים קטנים, ומכאן שאין הרבה מספרים כאלו, לפיכך, נעדיף לספור ידנית את מספר הערכים השונים של x.
על מנת לעבוד מסודר, נמצא לפי הנתונים את המספר הקטן ביותר האפשרי עבור x. לאחר מכן, נמצא את המספר הבא וכך הלאה, עד שנמצא את כל הערכים השונים של x.

x הוא מספר דו-ספרתי חיובי. אנחנו מחפשים את ערכו המינימלי של x ולכן נמצא המספר הדו-ספרתי הקטן ביותר. 10 הוא המספר הדו-ספרתי הקטן ביותר, ולכן נבדוק מה קורה כאשר $x = 10$.
ידוע כי 6x הוא גם מספר דו-ספרתי. אם $x = 10$, אז $6x = 60$ $(= 6 \cdot 10)$.

60 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 10 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 11. כאשר $x = 11$, $6x = 66$ $(= 6 \cdot 11)$.

66 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 11 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 12. כאשר $x = 12$, אז $6x = 72$ $(= 6 \cdot 12)$.

72 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 12 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 13. כאשר $x = 13$, אז $6x = 78$ $(= 6 \cdot 13)$.

78 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 13 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 14. כאשר $x = 14$, אז $6x = 84$ $(= 6 \cdot 14)$.

84 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 14 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 15. כאשר $x = 15$, אז $6x = 90$ $(= 6 \cdot 15)$.

90 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 15 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 16. כאשר $x = 16$, אז $6x = 96$ $(= 6 \cdot 16)$.

96 הוא אכן מספר דו-ספרתי, ועל כן 16 מקיים את הנתון.

המספר הדו-ספרתי הבא הוא 17. כאשר $x = 17$, אז $6x = 102$ $(= 6 \cdot 17)$.

102 **אינו** מספר דו-ספרתי, ועל כן 17 אינו מקיים את הנתון.
אם נמשיך למספרים דו-ספרתיים גדולים מ-17, 6x רק ימשיך לגדול. לכן, מכיוון שכבר ראינו שכאשר $x = 17$ נקבל ש-6x הוא מספר תלת-ספרתי, נעצור כאן.

לסיכום: מצאנו סך הכול 7 מספרים דו ספרתיים אשר מקיימים את שני הנתונים: 10, 11, 12, 13, 14, 15 ו-16.

תשובה (2).

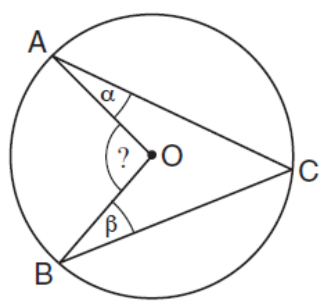
.17 **השאלה**: יואב משחק בקבוצת כדורגל שיש בה 11 שחקנים. בסוף כל אימון נבחר זוג שחקנים שינקה את המגרש.

מה מספר הזוגות השחקנים האפשריים **הכוללים את יואב**?

פתרון: זוהי שאלת צירופים. מהמספרים המוצעים בתשובות ניתן להבין כי יש מספר קטן יחסית של זוגות שחקנים אפשריים הכוללים את יואב. לכן, נספור באופן ידני את מספר הזוגות.
עלינו למצוא כמה זוגות **שונים** ניתן להרכיב מ-11 שחקנים, כך שיואב (אחד השחקנים) תמיד יהיה חלק מהזוג. אם יואב הוא תמיד חלק מזוג השחקנים, למעשה עלינו למצוא כמה שחקנים ניתן לצרף אל יואב, כך שיתקבל זוג שונה בכל פעם. מכיוון שבקבוצה יש 10 שחקנים למעט יואב $(=11-1)$, כל שחקן שיצטרף ליואב מתוך 10 השחקנים, ייצור זוג שונה עם יואב. לכן, יואב יכול להיות בן הזוג של 10 שחקנים, ולפיכך יש 10 זוגות שחקנים שונים הכוללים את יואב.

תשובה (1).

.18 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.
A, B ו-C הן נקודות על היקף המעגל.



על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,
$\angle AOB = ?$

פתרון: זוהי שאלת מעגלים, ובה עלינו למצוא זווית. בשאלות מעגלים בהן נשאלים על גודלה של זווית, נתבונן על הקשתות עליהן מונחות הזוויות הנתונות והזווית הנשאלת. לאחר מכן, נחפש זווית הנשענות על קשתות זהות.
זוויות α ו-β הן זוויות היקפיות במעגל. לא ניתן לראות בבירור על איזה קשתות הן נשענות, ולכן נמשיך את הצלעות AO ו-BO. נמשיך את הקו AO עד שייגע בהיקף המעגל. נגדיר את נקודת המגע של הקו עם המעגל כנקודה D. כך קיבלנו את המיתר AD. על פי אותו עיקרון, נמשיך את הקו BO עד שייגע במעגל. נגדיר את נקודת המגע של הקו עם המעגל כנקודה E. כך קיבלנו את המיתר BE.
כעת, נוכל לראות כי הזווית α נשענת על הקשת הקצרה DC, וכי הזווית β נשענת על הקשת הקצרה EC. בנוסף, כאשר העברנו את המיתרים קיבלנו את הזווית המרכזית $\angle DOE$. הזווית המרכזית $\angle DOE$ נשענת על הקשת הקצרה ED, שהיא סכום הקשתות DC ו-CE. לפיכך סכום הזוויות ההיקפיות α ו-β נשענות על אותה קשת כמו הזווית המרכזית $\angle DOE$. במעגל, זווית מרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. מכאן נוכל לקבוע כי: $\angle DOE = 2\cdot(\alpha+\beta)$.
הזווית $\angle DOE$ היא זווית קודקודית לזווית $\angle AOB$ ולפיכך הן שוות זו לזו. מכאן ש: $\angle AOB = 2\cdot(\alpha+\beta)$.

את השאלה ניתן לפתור גם בדרך אחרת:
אם נעביר את הרדיוס OC נקבל שני משולשים: משולש AOC ומשולש BOC. במשולשים אלה שתיים מצלעות המשולש הם רדיוסים: במשולש AOC נמצא את הרדיוסים AO ו-OC; ובמשולש BOC נמצא את הרדיוסים BO ו-OC. לפיכך, המשולשים AOC ו-BOC הם משולשים שווי שוקיים.
במשולשים שווי שוקיים זוויות הבסיס שוות. מכאן ש: $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ ו- $\angle OBC = \angle OCB = \beta$.
נתבונן על הזווית ההיקפית $\angle ACB$:
הזווית $\angle ACB$ היא סכום הזוויות $\angle OCA$ ו- $\angle OCB$. מכאן ש: $\angle ACB = \alpha+\beta$.
הזווית $\angle ACB$ היא זווית היקפית הנשענת על הקשת הקצרה AB. הזווית $\angle AOB$ היא זווית מרכזית הנשענת גם היא על הקשת הקצרה AB. במעגל, הזווית המרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. מכאן ש: $\angle AOB = 2\cdot(\alpha+\beta)$.

תשובה (1).

---

19. **השאלה**: נתון: $a \neq 0$

איזה מהביטויים הבאים חיובי בהכרח?

פתרון: **__דרך א'__**: הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכו של a ולכן נוכל להציב מספרים במקומו. נציב למשל כי $a = 1$.
כעת נעבור על התשובות המוצעות, נציב כי $a = 1$, ונחשב את ערכו של הביטוי המופיע בכל אחת מהן. כל ביטוי שערכו אינו חיובי, נפסל.

__תשובה (1)__: $a^2 - |a|$. נציב כי $a = 1$, ונקבל: $1^2 - |1| \Leftarrow 1 - 1 \Leftarrow 0$.
0 אינו מספר חיובי, ולכן התשובה נפסלת.

__תשובה (2)__: $a^3 \cdot |a|$. נציב כי $a = 1$, ונקבל: $1^3 \cdot |1| \Leftarrow 1 \cdot 1 \Leftarrow 1$.
1 הוא מספר חיובי, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

__תשובה (3)__: $a \cdot |a|^{-a}$. נציב כי $a = 1$, ונקבל: $1 \cdot |1|^{-1} \Leftarrow 1 \cdot 1^{-1} \Leftarrow 1 \cdot 1 \Leftarrow 1$.
1 הוא מספר חיובי, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

__תשובה (4)__: $a^{-2} \cdot |-a|$. נציב כי $a = 1$, ונקבל: $1^{-2} \cdot |-1| \Leftarrow 1 \cdot 1 \Leftarrow 1$.
1 הוא מספר חיובי, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

פסלנו רק תשובה אחת ולכן עלינו להציב פעם נוספת. זוהי שאלת חיובי-שלילי, וכאשר הצבנו מספר חיובי פסלנו רק תשובה אחת. לכן, על מנת לנסות לפסול תשובות נוספות, נציב הפעם מספר שלילי. נציב למשל כי $a = -1$. כעת נעבור על התשובות שנותרו:

__תשובה (2)__: $a^3 \cdot |a|$. נציב כי $a = -1$, ונקבל: $(-1)^3 \cdot |-1| \Leftarrow -1 \cdot 1 \Leftarrow -1$.
-1 אינו מספר חיובי, ולכן התשובה נפסלת.

__תשובה (3)__: $a \cdot |a|^{-a}$. נציב כי $a = -1$, ונקבל: $(-1) \cdot |-1|^{-(-1)} \Leftarrow (-1) \cdot |-1|^{1} \Leftarrow (-1) \cdot 1 \Leftarrow -1$.
-1 אינו מספר חיובי, ולכן התשובה נפסלת.

__תשובה (4)__: $a^{-2} \cdot |-a|$. נציב כי $a = -1$, ונקבל: $(-1)^{-2} \cdot |-(-1)| \Leftarrow 1 \cdot |1| \Leftarrow 1$.
1 הוא מספר חיובי, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

פסלנו 3 תשובות, ולכן תשובה (4) היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הבנה אלגברית

זוהי שאלת חיובי-שלילי. נעבור על התשובות המוצעות ולגבי כל חלק מהביטוי שבתשובות נבין האם הוא חיובי או שלילי. לבסוף נבין אם הביטוי כולו הוא חיובי או שלילי או שלא ניתן לדעת.

<u>תשובה (1)</u>: $a^2-|a|$. כל מספר בחזקה זוגית חיובי בוודאות. מכאן שהביטוי a^2 חיובי תמיד.
כל ביטוי בערך מוחלט חיובי תמיד. לפיכך גם הביטוי $|a|$ חיובי תמיד.
בביטוי זה למעשה קיבלנו פעולת חיסור בין שני מספרים חיוביים. תוצאת החיסור של שני מספרים חיוביים יכול להיות חיובי, שלילי או שווה ל-0. לפיכך, ביטוי זה אינו חיובי בהכרח ולכן התשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (2)</u>: $a^3\cdot|a|$. כל ביטוי בערך מוחלט חיובי בהכרח. מכאן שהביטוי $|a|$ חיובי תמיד.
חזקה אי-זוגית שומרת על הסימן המקורי של המספר. כלומר, מספר חיובי יישאר חיובי, ומספר שלילי יישאר שלילי. לפיכך, הביטוי a^3 יכול להיות חיובי או שלילי, ותלוי בסימן של a.
למעשה קיבלנו מספר שסימנו לא ידוע כפול מספר חיובי. אם a^3 חיובי גם התוצאה תהיה חיובית, אך אם a^3 שלילי התוצאה תהיה שלילית. לפיכך, סימן התוצאה ייקבע לפי הסימן של הביטוי a^3. מכיוון שסימן תוצאת הביטוי תלויה בסימן של a, הרי שהיא אינה חיובית לכל a.
לכן, התשובה אינה נכונה.

<u>תשובה (3)</u>: $a\cdot|a|^{-a}$. כל ביטוי בערך מוחלט חיובי בהכרח. מכאן שהביטוי $|a|$ חיובי לכל a.
העלאת מספר חיובי בכל חזקה תותיר את המספר חיובי. לפיכך גם הביטוי $|a|^{-a}$ חיובי תמיד.
חשוב לזכור: חזקה שלילית אינה משנה את הסימן של המספר, אלא רק הופכת אותו להופכי שלו.
כמו כן, לא ידוע אם a חיובי או שלילי. לכן, בדומה לתשובה (2), קיבלנו פעולת כפל בין מספר חיובי למספר שהסימן שלו לא ידוע. לפיכך, הסימן של הביטוי תלוי בסימן של a, ולכן הביטוי אינו חיובי לכל a. לכן ניתן לפסול את התשובה.

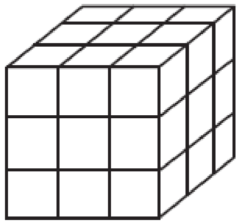
פסלנו שלוש תשובות, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (4). אולם, לשם השלמת ההסבר נבדוק גם את תשובה (4):

<u>תשובה (4)</u>: $a^{-2}\cdot|-a|$. כל ביטוי בערך מוחלט חיובי בהכרח, ומכאן שהביטוי $|-a|$ חיובי לכל a.
כל מספר בחזקה זוגית חיובי תמיד, ועל כן הביטוי a^{-2} חיובי גם הוא לכל a. כאמור, חזקה שלילית אינה משנה את הסימן של הביטוי.
לפיכך, לפנינו מכפלה בין שני מספרים חיוביים. מכפלה של שני מספרים חיוביים חיובית גם היא, ועל כן הביטוי $a^{-2}\cdot|-a|$ חיובי לכל a. לכן, זוהי התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

20. **השאלה**: אילנה צבעה קובייה גדולה בשחור מכל צדדיה, וחתכה אותה ל-27 קוביות שוות בגודלן, כבסרטוט.



$$? = \frac{\text{מספר הקוביות שיש להן בדיוק פאה אחת צבועה}}{\text{מספר הקוביות שכל פאותיהן **אינן** צבועות}}$$

פתרון: נמצא את מספר הקוביות שיש להן בדיוק פאה אחת צבועה:
עלינו למצוא את מספר הקוביות הקטנות להן צבועה פאה אחת בלבד. כאשר אילנה צובעת את הקובייה הגדולה, היא צובעת את פאותיהן החשופות של הקוביות הקטנות. למשל, נתבונן על הקובייה הקטנה שנמצאת בפינה הימנית העליונה בקובייה הגדולה. לאותה קובייה יש 6 פאות, שכן לכל קובייה יש 6 פאות. אולם, אנו יכולים לראות רק 3 מתוך הפאות הללו. מכאן, שכאשר אילנה תצבע את הקובייה, רק 3 פאות של הקובייה הזו יהיו צבועות. כלומר, הפאות הצבועות יהיו הפאות שאנו יכולים לראות. לפיכך, אם עלינו למצוא את מספר הקוביות הקטנות שלהן רק פאה אחת צבועה, למעשה עלינו למצוא את מספר הקוביות שרק פאה אחת שלהן חשופה. נתבונן על הפאה הקידמית של הקובייה הגדולה, כלומר זו שקרובה אלינו. בפאה זו ניתן לראות כי רק בקובייה אחת חשופה פאה אחת בלבד. קובייה זו היא הקובייה הקטנה שנמצאת במרכז הפאה הגדולה. שימו לב: יש קוביות קטנות נוספות בפאה זו בהן ניתן לראות רק פאה אחת. אך, מכיוון שהצורה היא תלת-מימדית, עליכם לדמיין שאתם מחזיקים אותה בידכם. כך, תוכלו לתאר לעצמכם כי תוכלו לראות פאות נוספות בקוביות הקטנות המקיפות את הקובייה שבמרכז. אבל, בקובייה המרכזית עדיין לא תוכלו לראות פאות נוספות מלבד זו שרואים בסרטוט.
לסיכום: בפאה הקידמית של הקובייה הגדולה יש קובייה אחת שלה רק פאה אחת צבועה. קובייה היא צורה סימטרית ומכאן שכל הפאות של הקובייה הגדולה סימטריות אף הן. לפיכך, בכל פאה גדולה יש רק קובייה אחת קטנה אשר רק פאה אחת שלה צבועה. בקובייה יש 6 פאות ולכן יש בסך הכול 6 קוביות קטנות בהן רק פאה אחת צבועה.

כעת נמצא את מספר הקוביות להן אין כלל פאות צבועות:
למעשה, עלינו למצוא בכמה קוביות קטנות אין פאות חשופות כלל. הקובייה הגדולה מורכבת מ-27 קוביות קטנות. ניתן לדמיין שאנו פורסים את הקובייה הגדולה ל-3 פרוסות, כמו כיכר לחם. הפרוסה הראשונה מורכבת מ-9 הקוביות הקטנות שבקידמת הקובייה הגדולה, אלה שבקדמת הסרטוט. הפרוסה השנייה תהיה מורכבת מ-9 הקוביות האמצעיות, והפרוסה האחרונה מורכבת מ-9 הקוביות האחוריות.
נסתכל למשל על הפרוסה הקדמית שהתקבלה, כלומר על 9 הקוביות שלפנינו. פרוסה זו מורכבת מ-9 קוביות קטנות. בכל הקוביות הקטנות הללו נוכל לראות פאה כלשהי חשופה. פאות חשופות הן פאות שאילנה צבעה, ולפיכך לפחות פאה אחת של כל 9 הקוביות הקטנות הקדמיות צבועה. לכן, קוביות אלה אינן מתאימות להגדרה של קוביות בהן אין פאות צבועות כלל.
על בסיס אותו עיקרון, כל 9 הקוביות האחוריות, המרכיבות את הפרוסה האחורית צבועות לפחות בפאה אחת. שימו לב כי הפרוסה האחורית והקידמית זהות מבחינת כמות הפאות הקטנות החשופות.
לסיכום: עד כה מצאנו כי 18 קוביות מתוך 27 הקוביות הקטנות צבועות לפחות בפאה אחת. כעת נבחן את הפרוסה האמצעית, המורכבת מ-9 קוביות קטנות. דמיינו את הפרוסה שנותרה: הפרוסה מורכבת מ-9 קוביות קטנות המסודרות ב-3 שורות. בכל שורה יש 3 קוביות קטנות. תוכלו גם לראות כי בחלקה העליון של הפרוסה רואים את פאותיהן של 3 קוביות. לפיכך, גם בקוביות אלה לפחות פאה אחת צבועה. השורה התחתונה של הפרוסה זהה לחלוטין לעליונה, ולפיכך גם ב-3 הקוביות התחתונות לפחות פאה אחת צבועה.
כעת נדמיין ונתבונן על השורה האמצעית המורכבת מ-3 קוביות. אם תתבוננו בסרטוט תוכלו לראות כי הפאה של הקובייה הימנית הקיצונית, בשורה האמצעית, חשופה. לפיכך, גם בקובייה הזו יש לפחות פאה אחת צבועה. הקובייה השמאלית, שלא ניתן לראות בסרטוט, זהה לימנית. לפיכך, גם בקובייה זו יש לפחות פאה אחת צבועה. על כן, נותרנו רק עם קובייה אחת: הקובייה האמצעית בשורה האמצעית של הפרוסה האמצעית. זוהי למעשה הקובייה שנמצאת במרכז הקובייה, ועל כן אף פאה שלה לא חשופה. מכאן שיש רק קובייה אחת שלה אין שום פאה צבועה.

מצאנו כי ב-6 קוביות יש רק פאה אחת צבועה, וכי בקובייה אחת אין שום פאה צבועה. מכאן שהיחס בין מספר הקוביות שלהן פאה אחת צבועה לבין מספר הקוביות שלהן אין פאות צבועות שווה ל-6 $\left(=\frac{6}{1}\right)$.

תשובה (1).
