מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(3)	(4)	(4)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(3)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

.1 **השאלה**: נתון: $y < x < 2y$

מכאן ש-

פתרון: הצבת דוגמה מספרית.
לא נשאלנו על ערכם של x ו-y ועל כן ניתן להציב מספרים במקומם.
נציב מספרים המקיימים את הנתון, למשל כי y שווה ל-1, ו-x שווה ל-1.5, ונקבל: $1<1.5<2$.
כעת נעבור על התשובות המוצעות ונמצא כי רק תשובה (1) נכונה, ועל פיה x חיובי ו-y חיובי.

תשובה (1).

.2 **השאלה**: בעיירה כלשהי מתגוררות 800 משפחות. ל-5% מהן יש מכונית אחת. למחצית **משאר** המשפחות אין מכונית, ולכל היתר יש שתי מכוניות.

כמה מכוניות בסך הכול יש לתושבי העיירה?

פתרון: עלינו למצוא כמה מכוניות יש בסך הכול לתושבי העיירה. ידוע כי ל-5% מהמשפחות יש מכונית אחת. אם יש 800 משפחות, הרי של-40 מהן יש מכונית אחת $\left(= 5 \cdot 8 = \frac{5}{\cancel{100}} \cdot \cancel{800}\right)$. לפיכך, לאותן 40 משפחות יש בסך הכול 40 מכוניות $\left(= 40 \cdot 1\right)$.
הנתון הבא מתייחס **לשאר** המשפחות. מצאנו כי ל-40 משפחות יש מכונית אחת, ומכאן שיש עוד 760 משפחות $\left(= 800 - 40\right)$.

מתוך שאר המשפחות, למחצית אין מכונית ולשאר יש שתיים. מחצית משאר המשפחות הן $\frac{760}{2}$.

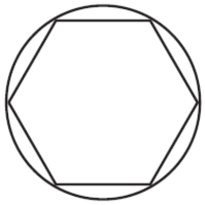
מכאן של- $\frac{760}{2}$ משפחות אין מכונית, וכי ל- $\frac{760}{2}$ משפחות יש שתי מכוניות.

לפיכך, ל- $\frac{760}{2}$ משפחות בעלי שתי מכוניות יש בסך הכול 760 מכוניות $\left(= \frac{760}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\right)$.

מכאן שיש לתושבי העיירה בסך הכול 800 מכוניות $\left(= 760 + 40\right)$.

תשובה (3).

.3 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם משושה משוכלל החסום במעגל שהיקפו 3π ס״מ.



מה היקף המשושה (בס״מ)?

פתרון: עלינו למצוא את היקף המשושה. היקף המשושה הוא סכום צלעותיו.
במשושה משוכלל החסום במעגל, אורך צלע המשושה שווה לאורך רדיוס המעגל החוסם את המשושה.
נמצא את רדיוס המעגל החוסם:
ידוע כי היקף המעגל שווה ל- 3π ס״מ. מכאן, שבעזרת נוסחת היקף מעגל $(2r\pi)$ נוכל לבנות את המשוואה הבאה: $2r\pi = 3\pi$.
נחלק את שני צדי המשוואה ב-2π, ונקבל: $r = 1.5$.
לפיכך, גם אורך צלע המשושה שווה ל-1.5 ס״מ. היקף המשושה מורכב מ-6 צלעות שוות, ועל כן היקפו שווה ל-9 ס״מ $(= 1.5 \cdot 6)$.

תשובה (4).

.4 **השאלה**: ברז ממלא אמבטיה באותו זמן ש-2 ברזים ממלאים **חצי** חבית.

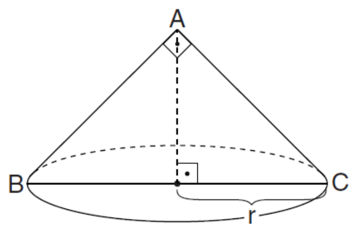
בהנחה שכל הברזים בעלי הספק שווה וקבוע,

$$? = \frac{\text{נפח האמבטיה}}{\text{נפח החבית}}$$

פתרון: הצבת דוגמה מספרית.
עלינו למצוא את היחס בין נפח האמבטיה לנפח החבית. בשאלה לא נתון הספק הברזים ולא נשאלנו עליו ולכן נוכל להציב במקומו מספרים. נניח כי ברז ממלא 1 ליטר מים בשעה. כמו כן, נניח כי הברז ממלא את האמבטיה בשעה אחת. מכאן שנפח האמבטיה הוא 1 ליטר.
ידוע כי באותו זמן 2 ברזים ממלאים חצי חבית. מכאן שאותו זמן, כלומר בשעה אחת, ימלאו שני הברזים 2 ליטר $(= 1 \cdot 2)$. לפיכך, נפח <u>חצי החבית</u> הוא 2 ליטר, ועל כן נפח <u>החבית כולה</u> הוא 4 ליטר $(= 2 \cdot 2)$.

מכאן שהיחס בין נפח האמבטיה לנפח החבית הוא $\frac{1}{4}$.

תשובה (4).



5. **השאלה**: BC הוא קוטר של בסיס החרוט שבסרטוט. רדיוס הבסיס הוא r.
$\sphericalangle BAC = 90°$

מה נפח החרוט?

פתרון: עלינו למצוא את נפח החרוט שבסרטוט. על פי הנוסחה, נפח חרוט שווה לשטח בסיסו כפול גובהו חלקי 3. שטח בסיס החרוט הוא שטח מעגל שרדיוסו r, ומכאן ששטח בסיס החרוט שווה ל- $r^2\pi$.
נמצא את גובה החרוט: נסמן את נקודת מרכז המעגל ב-O. על פי נתוני הסרטוט, המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. כמו כן, במשולש ABC הגובה AO הוא גם תיכון, שכן הוא מחלק את היתר BC לשני חלקים שווים, השווים לרדיוס המעגל. לפיכך, משולש ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים. מכאן ש: $\sphericalangle ACB = 45°$.
כעת נתבונן במשולש AOC: על פי הסרטוט זהו משולש ישר זווית שמצאנו שאחת מזוויותיו שווה ל-$45°$.
מכאן שגם משול AOC הוא משולש שווה שוקיים ומכאן ש: $AO = OC = r$.
מצאנו שגובהו של החרוט שווה ל-r, ומכאן שנפחו שווה ל: $\frac{r^3\pi}{3}$ $\left(= \frac{r^2\pi \cdot r}{3}\right)$.

תשובה (1).

---

6. **השאלה**: $\frac{8^3 \cdot 9}{2^6 \cdot 6^2} = ?$

פתרון: פישוט אלגברי.

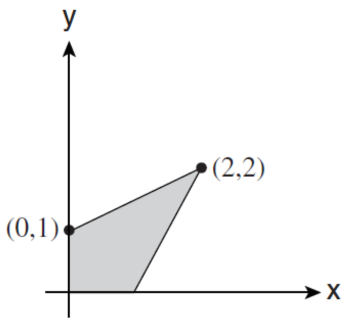
על מנת להימנע מחישובים מורכבים, נפרק את המספרים שבביטוי לגורמים ראשוניים ולאחר מכן נצמצם:

$$\frac{8^3 \cdot 9}{2^6 \cdot 6^2} \Leftarrow \frac{\left(2^3\right)^3 \cdot 3^2}{2^6 \cdot (2 \cdot 3)^2} \Leftarrow \frac{2^9 \cdot 3^2}{2^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \Leftarrow \frac{2^9 \cdot 3^2}{2^8 \cdot 3^2} \Leftarrow \frac{2^9}{2^8} \Leftarrow 2.$$

תשובה (2).

---

7. **השאלה** : במערכת הצירים שלפניכם מסורטט דלתון.



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
מה שטח הדלתון (השטח הכהה)?

פתרון : עלינו למצוא את שטח הדלתון שבסרטוט. שטח דלתון שווה למחצית מכפלת אלכסוניו. על כן נעביר את אלכסוני הדלתון ונמצא את אורכם.
אורך האלכסון הארוך : נעביר את האלכסון הארוך מהנקודה $(2,2)$ ועד לראשית הצירים. כדי למצוא את אורך האלכסון עלינו ליצור משולש ישר זווית ולהשתמש במשפט פיתגורס. נוריד גובה מהנקודה $(2,2)$ לציר ה-x.
כך נקבל משולש ישר זווית ושווה שוקיים שהיתר שלו הוא האלכסון הארוך של הדלתון. על פי ערכי הנקודה $(2,2)$ המשולש שהתקבל הוא משולש ישר זווית שאורך כל אחד מניצביו הוא 2. מכאן שקיבלנו משולש ישר זווית ושווה שוקיים. במשולש ישר זווית ושווה שוקיים אורך היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מאורך הניצב, ומכאן שאורכו של האלכסון הארוך שווה ל- $2\sqrt{2}$.
אורך האלכסון הקצר : נעביר את האלכסון הקצר מהנקודה $(0,1)$ ועד לקודקוד הדלתון המונח על ציר ה-x.
קיבלנו משולש ישר זווית שניצביו הם שתי הצלעות הקצרות של הדלתון. בדלתון זוג הצלעות הסמוכות הקצרות שוות זו לזו, ומכאן שקיבלנו משולש ישר זווית ושווה שוקיים. לפי ערכי הנקודה $(0,1)$ אורך הניצב של המשולש שהתקבל שווה ל-1. מכאן שאורכו של האלכסון הקצר הוא $\sqrt{2}$.
מצאנו שאורכו של האלכסון הארוך של הדלתון הוא $2\sqrt{2}$ ושאורכו של האלכסון הקצר הוא $\sqrt{2}$, ומכאן ששטח הדלתון שווה ל-2 $\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \right)$

תשובה (2).

---

8. **השאלה**: $\frac{9!}{n!} = 72$

$n = ?$

פתרון: בדיקת תשובות

נשאלנו מהו ערכו של n ולפנינו תשובות מספריות. לפיכך, ניתן לבדוק את התשובות המוצעות. מכיוון שנתונה בשאלה משוואה, התשובה הנכונה היא זו שתיצור "פסוק אמת" – שוויון בני שני צדי המשוואה.

נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): 8. נציב כי $n = 8$, ונקבל: $\frac{9!}{8!} = 72$.

על מנת לפשט את צידה הימני של המשוואה בקלות, נפתח את סימן העצרת לפי הכלל הבא:
$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots x$.

נפתח את סימן העצרת, ונקבל: $\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot 9}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8}} = 72$ ⇦ $9 = 72$.

לא קיבלנו משוואה נכונה ועל כן התשובה נפסלת.

תשובה (2): 7. נציב כי $n = 7$, ונקבל: $\frac{9!}{7!} = 72$.

נפתח את סימן העצרת, ונקבל: $\frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot 8 \cdot 9}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7}} = 72$ ⇦ $8 \cdot 9 = 72$.

קיבלנו משוואה נכונה ועל כן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

9. **השאלה**: בכיתה כלשהי גובהם הממוצע של כלל התלמידים הוא 1.30 מטרים.
$\frac{1}{3}$ מהתלמידים בכיתה הם בנים, וגובהם הממוצע הוא 1.26 מטרים.

מה גובהן הממוצע של הבנות בכיתה?

פתרון: הצבת דוגמה מספרית + נוסחת הממוצע

עלינו למצוא את גובהן הממוצע של הבנות בכיתה. ידוע כי $\frac{1}{3}$ מהתלמידים בכיתה הם בנים. אולם, איננו יודעים כמה תלמידים יש בכיתה ולכן לא ניתן לדעת כמה בנים וכמה בנות יש בכיתה.
מכיוון שלא נשאלנו מהו מספר הבנים או מספר הבנות, ואין לנו דרך למצוא אותם, נוכל להציב מספרים במקומם.
ידוע כי $\frac{1}{3}$ מהתלמידים בכיתה הם בנים. מכאן ניתן לקבוע כי מספר התלמידים בכיתה מחלק ב-3.
על כן, נבחר להציב שמספר התלמידים בכיתה הוא מספר נוח שמתחלק ב-3.
נציב כי מספר התלמידים בכיתה הוא 3. מכאן שיש בכיתה בן אחד $\left(= \frac{1}{3} \cdot 3\right)$ ו-2 בנות $\left(= 3 - 1\right)$.

כעת עלינו להשתמש בנתונים הקיימים ובמספרים שהצבנו במשוואת הממוצע. אבל, הנתונים לגבי גובהם הממוצע של תלמידי הכיתה ושל הבנים מובאים בצורה של שברים עשרוניים. מכיוון שלא נוח לחשב פעולות מתמטיות עם שברים עשרוניים, ראשית נשתמש בהמרת יחידות כדי לקבל מספרים שלמים.
בכל מטר יש 100 ס"מ. לפיכך, אם גובהם הממוצע של כלל התלמידים בכיתה הוא 1.30 מטרים, הרי שגובהם הממוצע הוא 130 ס"מ $\left(= 1.30 \cdot 100\right)$, וגובהם הממוצע של הבנים הוא 126 ס"מ $\left(= 1.26 \cdot 100\right)$.

כעת נשתמש בנוסחת הממוצע. נניח כי גובהן של כל אחת מהבנות בכיתה שווה. מכיוון שנשאלנו על ממוצע גובהן של הבנות, גובהה של אחת מהבנות אינו רלוונטי, ונוח יותר להניח כי הן באותו גובה. על כן נסמן את גובהה של כל בת ב-x.

ידוע כי ממוצע גובהם של הבנים הוא 126 ס״מ, ומכיוון שלפי ההצבה שלנו מצאנו כי יש רק בן אחד, הרי שגובהו הוא 126 ס״מ. ידוע כי ממוצע גובהם של כלל התלמידים הוא 130 ס״מ, כאשר הצבנו כי בכיתה יש בן אחד ו-2 בנות. מכאן נוכל לבנות את המשוואה הבאה: $130 = \frac{126 + 2x}{3}$.

נכפול את שני צדי המשוואה ב-3, ונקבל: $126 + 2x = 390$.

נחסר 126 משני צדי המשוואה, ונקבל: $2x = 264$.

נחלק את שני צדי המשוואה ב-2, ונקבל: $x = 132$.

מצאנו שגובהן הממוצע של הבנות הוא 132 ס״מ, ומכאן שגובהן הממוצע הוא 1.32 מטרים $\left(= \frac{132}{100}\right)$.

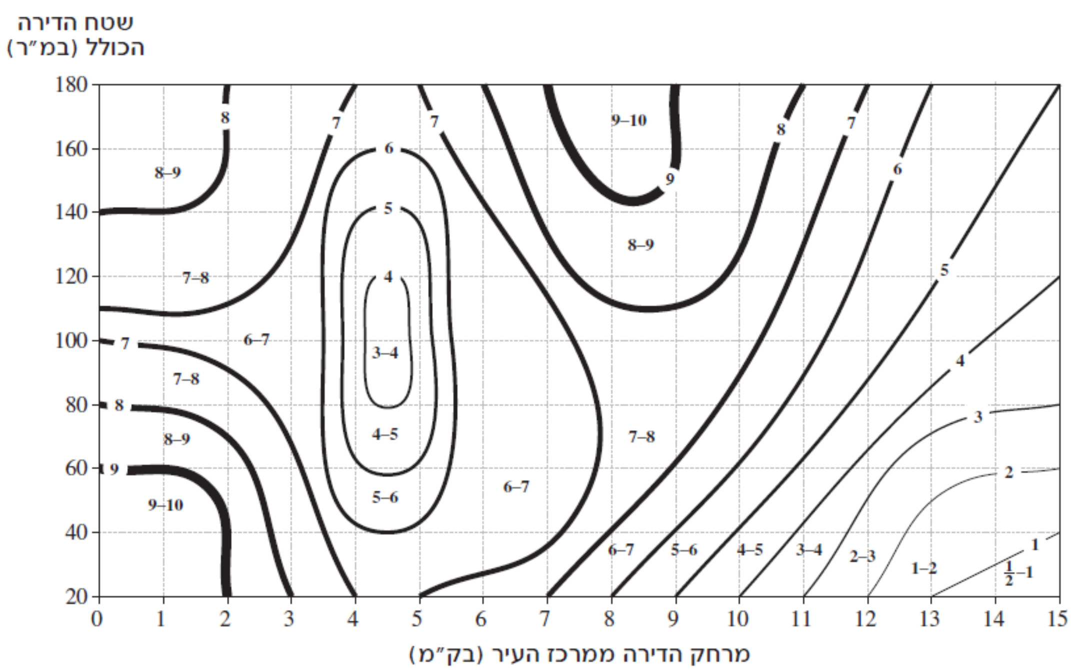
תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 10-13)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

התרשים עוסק במחירי דירות בעיר כלשהי.
התרשים מתאר את המחיר **למטר רבוע אחד** של דירה בהתאם לשני גורמים: שטח הדירה הכולל ומרחקה ממרכז העיר.
הציר האופקי מייצג את מרחק הדירה ממרכז העיר (בק"מ), והציר האנכי מייצג את שטח הדירה הכולל (במ"ר).
התרשים מחולק לתחומים המגדירים את טווח המחירים למ"ר של כל הדירות המצויות בהם. טווח המחירים למ"ר מופיע בתוך כל תחום, ביחידות של אלפי דולרים.
המחיר למ"ר של דירות ה"נמצאות" על הקווים המפרידים בין התחומים הוא המספר השלם המופיע על הקו (באלפי דולרים).

לדוגמה, המחיר של 1 מ"ר בדירה ששטחה 40 מ"ר ומצויה במרחק 1 ק"מ ממרכז העיר הוא בין 9,000 ל-10,000 דולר.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.10 **השאלה**: על פי הנתונים בתרשים הנוגעים לדירות ששטחן 60 מ"ר ומרחקן ממרכז העיר הוא בין 0 ל-15 ק"מ, כאשר **מתרחקים** ממרכז העיר, מחירי הדירות -

פתרון: נמצא את הדירות ששטחן 60 מ"ר על הציר האנכי בתרשים. נסמן קו אופקי מנקודה זו ועד לקצה הימני של התרשים. **שימו לב**: בשאלה זו נשאלנו על דירות שמרחקן ממרכז העיר הוא בין 0 ל-15 ק"מ. הציר האופקי מציין דירות שמרחקן ממרכז העיר הוא בין 0 ל-15 ק"מ, ולפיכך נשאלנו על כלל הדירות המופיעות בתרשים ששטחן הוא 60 מ"ר.
כעת נתבונן על מחירי הדירות שעל הקו שסרטטנו תוך פסילת תשובות.
בתחילה נוכל לראות שמחיר הדירות הוא 9,000 דולר, וכאשר מגיעים למרחק של כ-1.5 ק"מ ממרכז העיר מחיר הדירות <u>יורד</u> לטווח של 8,000-9,000 דולר. כעת ניתן לפסול את תשובה (3).
בהמשך, נראה שבמרחק של כ-2.5 ק"מ מחיר הדירות עומד על 8,000 דולר, ובמרחק קצר לאחר מכן הוא מגיע לטווח של 7,000-8,000 דולר. כלומר, מחיר הדירות <u>ממשיך לרדת</u>. מגמה זו ממשיכה עד למרחק של

מעט יות מ-4 ק״מ ממרכז העיר, שם מחירי הדירות מגיע לטווח של 5,000-4,000 דולר.
החל ממרחק של כ-5 ק״מ ממרכז העיר מחירי הדירות מתחילים <u>לעלות</u>: ממחיר של 5,000 דולר ועד לטווח מחירים של 8,000-7,000 דולר במרחק של קצת פחות מ-9 ק״מ ממרכז העיר.
עד כה מצאנו כי מחירי הדירות יורדים ואז עולים, אך עדיין לא ניתן לפסול תשובות נוספות.
החל ממרחק זה, של כ-9 ק״מ ממרכז העיר, ועד למרחק של 15 ק״מ ממרכז העיר מחירי הדירות רק יורדים, עד למחיר של 2,000 דולר במרחק של 15 ק״מ ממרכז העיר. לפיכך תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.11 **השאלה**: שגית גרה במרחק $\frac{1}{2}$ ק״מ ממרכז העיר, ומחיר כל מ״ר בדירתה הוא 6,500 דולר.

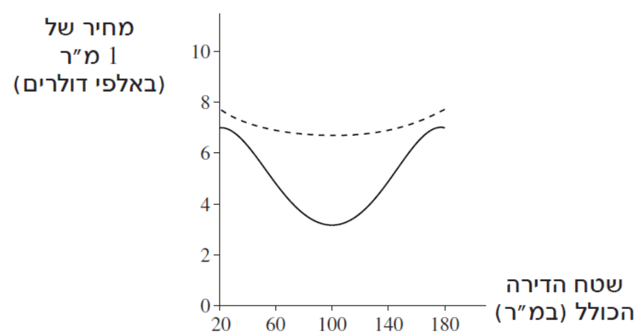
ייתכן ששטח דירתה של שגית הוא -

פתרון: נמצא על הציר האנכי את הדירות שמרחקן ממרכז העיר הוא $\frac{1}{2}$ ק״מ.

דירות שמחירן הוא 6,500 דולר למ״ר נמצאות על הציר האנכי היכן ששטחן של הדירות הוא בין 110-100 מ״ר. שם תראו כי מחירי הדירות הוא בטווח של 7,000-6,000 דולר למ״ר.
נחפש בתשובות דירות ששטחן הוא בין 100 מ״ר ל-110 מ״ר. לפיכך תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.12 **השאלה**: לפניכם תרשים המתאר את הקשר בין שטח הדירה ובין המחיר של 1 מ״ר בדירה.
התרשים נוגע לשני מרחקים ממרכז העיר.



הקו השחור מתאים לדירות שמרחקן ממרכז העיר הוא ______,
והקו המקווקו מתאים לדירות שמרחקן ממרכז העיר הוא ______.

פתרון: בדיקת תשובות

בתרשים בשאלה זו מוצג מחיר מטר רבוע בדירה בהתאם לשטח הדירה. עלינו להשלים את החסר בשאלה על ידי התשובות, ולכן נבחן את התשובות:

<u>תשובה (1)</u>: 4.5 ק״מ ; 6 ק״מ.

לפי תשובה זו הקו השחור מתאים לדירות שמרחקן הוא 4.5 ק״מ, והקו המקווקו מתאים לדירות שמרחקן 6 ק״מ.

נבחן את הדירות שמרחקן 4.5 ק״מ. המחיר למ״ר עבור דירה ששטחה 20-40 מ״ר במרחק זה, הוא 6000-7000 ש״ח למ״ר. עבור דירות ששטחן 40-60 מ״ר המחיר הוא 5000-6000 ש״ח למ״ר. כך המחיר למ״ר יורד עד דירות ששטחן 100 מ״ר, שמחירן למטר רבוע הוא 3000-4000 ש״ח. עבור דירות גדולות יותר המחיר עולה, עד מחיר של 6000-7000 ש״ח למ״ר.

הקו השחור בשאלה זו מתאר ירידה ממחיר של 7000 ש״ח ועד למחיר של 3000 ש״ח. לאחר מכן המחיר עולה שוב ל-7000, בדומה למתואר עבור דירות במרחק 4.5 ק״מ בתרשים. לכן, הקו השחור מתאים לדירות במרחק 4.5 ק״מ.

נבחן האם המחיר למ״ר בדירות שמרחקן ממרכז העיר הוא 6 ק״מ מתאים לקו המקווקו. המחיר למ״ר עבור דירה ששטחה 20 מ״ר הוא 7000-8000 ש״ח- כפי שמתאר הקו המקווקו. עבור כל הדירות שגודלן בין 30 ל-140 מ״ר המחיר למטר הוא 6000-7000 ש״ח, כפי שמתאר הקו המקווקו. המחיר עולה שוב ל-7000-8000 ש״ח עבור דירות ששטחן 160-180 מ״ר. כפי שמתאר הקו המקווקו.

אם כן, הקו השחור מתאים לדירות במרחק 4.5 ק״מ, והקו המקווקו מתאים לדירות במרחק 6 ק״מ, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

13. **השאלה**: מה טווח המחירים המדויק למ״ר של דירות בעיר ששטחן 160 מ״ר?

פתרון: לפנינו שאלת טווחים. עלינו למצוא את המחיר המינימלי והמקסימלי למ״ר לדירות ששטחן 160 מ״ר.
נבחן את הציר האופקי עבור דירות ששטחן 160 מ״ר. מכיוון שזו שאלת טווחים- נחפש את המחיר המינימלי למ״ר עבור גודל דירה זה. ניתן לראות כי עבור דירה במרחק 15 ק״מ המחיר למ״ר הוא 4000-5000 ש״ח. כלומר, המחיר המינימלי הוא 4000 ש״ח עבור גודל דירה זה.
כעת, נחפש את המחיר המקסימלי למ״ר עבור גודל דירה זה. ניתן לראות כי עבור דירה במרחק 8 ק״מ המחיר למ״ר הוא 9000-10,000 ש״ח. כלומר המחיר המקסימלי למ״ר עבור גודל דירה זה הוא 10,000 ש״ח.

אם כן, טווח המחירים הוא 4,000-10,000 ש״ח.

תשובה (3).

שאלות ובעיות (שאלות 14-20)

14. השאלה: נתון: $0 < m$, $0 < n$

$(m+n)^2 < 16$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

לפנינו אי שוויון ובתשובות אנו רואים טווחים עבור m ו-n. מה שמפריע לנו לפשט את אי השוויון הוא החזקה, ולכן נרצה להוציא שורש לשני אגפי אי השוויון.
כאשר מוציאים שורש לשני אגפי אי השוויון, קיימים שני פתרונות אפשריים עבור הבסיס- חיובי ושלילי.
הביטוי $(m+n)$ חייב להיות חיובי מכיוון שעל פי הנתון גם m וגם n חיוביים. ולכן, לאחר הוצאת שורש לשני אגפי אי השוויון מתקיים: $m+n<4$.
מכיוון שכל אחד מהנעלמים חיובי, בהכרח שניהם קטנים מ-4. זאת מכיוון שאם אחד מהם היה גדול מ-4, סכום שניהם בהכרח היה גדול מ-4, וזו סתירה של אי השוויון שפישטנו. ולכן, כל אחד מהנעלמים קטן מ-4, ובפרט $n<4$.

<u>דרך ב'</u>: בדיקת תשובות+ הצבת דוגמה מספרית

לפנינו אי שוויון ריבועי. נתון כי m ו-n מספרים חיוביים. מאחר שיש שני נעלמים באותה משוואה ריבועית, לא ניתן למצוא את ערכו של כל אחד מהנעלמים באמצעות פישוט אי השוויון. נוכל להציב דוגמה מספרית בהתאם לטווחים שבתשובות. אם נמצא מספרים המקיימים את הנתון, אך סותרים את התשובה, נוכל לפסול את התשובה. כך, נפסול 3 תשובות.

<u>תשובה (1)</u>: $n<4$.

בנוסף, נתון בשאלה כי $0<n$. נציב $n=2$ ערך מספרי מתוך הטווח.
על פי הצבה זו מתקיים באי השוויון שבשאלה $(m+2)^2<16$.
כעת, עלינו לבחון האם קיים m המקיים את אי השוויון, אם קיים ערך כזה, תשובה זו יכולה להתקיים.
נציב $m=1$, מכיוון שערך זה מקיים את הנתון $0<m$.
נציב $m=1$ ו- $n=2$ באי השוויון: $(1+2)^2<16$ ← $9<16$. אי שוויון זה מתקיים.
כלומר, מצאנו מספרים המקיימים את הנתונים ומסתדרים עם התשובה. לא ניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (2)</u>: $(m-n)^2<8$.

כדי לפסול את התשובה, עלינו לבחור שני מספרים, המקיימים את הנתונים אך אינם מקיימים את הנתון שבתשובה, כלומר שאם נעלה את הביטוי $(m-n)$ בריבוע- נקבל מספר הגדול מ-8.
המספרים $n=0.1$ ו- $m=3.8$ מקיימים את הנתונים, שכן שניהם חיוביים וכאשר מעלים את סכומם בריבוע מקבלים תוצאה הקטנה מ-16.
נציב מספרים אלו בתשובה, ונקבל: $(3.8-0.1)^2<8$ ⇦ $3.7^2<8$, מכיוון שהצבה זו אינה מקיימת את אי השוויון שבתשובה, הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $2 < m$.
המספרים $m = 1$ ו-$n = 1$ מקיימים את הנתונים, שכן שניהם חיוביים וכאשר מעלים את סכומם בריבוע מקבלים תוצאה הקטנה מ-16. מצאנו כי m אינו גדול בהכרח מ-2, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $m = n$.
בתשובה מספר (2) הדגמנו כיצד דוגמה מספרית בה $m \neq n$ מקיימת את הנתונים, ומכאן שלא ניתן לטעון כי m בהכרח שווה ל-n, ומכאן שהתשובה נפסלת.

פסלנו את תשובות (2), (3) ו-(4) ולכן תשובה (1) נכונה.

תשובה (1).

---

15. **השאלה**: ליד מעבר חצייה יש רמזור שפועל כך: האור האדום דולק במשך 1.5 דקות, אחר כך האור הירוק דולק במשך דקה אחת וחוזר חלילה לאורך כל שעות היממה.
מיכל מגיעה למעבר חצייה ברגע אקראי במהלך היממה.

מה ההסתברות שברגע זה האור ברמזור יהיה ירוק?

פתרון: **<u>דרך א'</u>**: חישוב יחסים

הסתברות היא היחס בין מספר האפשרויות הרצויות, לבין סך כל האפשרויות.
ההסתברות לכך שהרמזור יהיה ירוק היא היחס בין הזמן בו הרמזור ירוק, לסכום הזמן בו הרמזור ירוק והזמן בו הרמזור אדום. מכיוון שהכלל המתואר בשאלה מתקיים לכל אורך היממה, ניתן לחשב את היחס בין זמנים אלו עבור מחזור פעולה אחד של הרמזור. היחס בין הזמנים עבור מחזור פעולה אחד, יהיה נכון עבור כל שעות הפעילות של הרמזור.

לפי נתוני השאלה- הרמזור ירוק במשך דקה אחת, ואדום במשך 1.5 דקות. סכום הזמן בו הרמזור ירוק והזמן בו הרמזור אדום הוא 2.5 דקות $(= 1 + 1.5)$.

כפי שציינו, ההסתברות במאורע פשוט היא היחס הרצוי למצוי. בשאלה זו הרצוי, הזמן בו הרמזור ירוק הוא 1 דקה. המצוי, סכום הזמן בו הרמזור ירוק והזמן בו הרמזור אדום הוא 2.5 דקות. לכן, היחס בין הרצוי למצוי הוא: $\frac{1}{2.5}$. נמיר את השבר העשרוני לשבר מדומה: $\frac{1}{\frac{5}{2}} \rightarrow \frac{2}{5}$.

<u>דרך ב'</u>: חישוב הסתברות פשוטה עבור שעה
לפנינו שאלת הסתברות. כדי לחשב הסתברות של מאורע, עלינו לחשב את המצב הרצוי מתוך כל האפשרויות המצויות. במקרה זה, המצב הרצוי הוא הזמן מתוך היממה בו הרמזור ירוק, ועלינו לחשב אותו מתוך כל הזמן המצוי- שעות היממה.
מכיוון ששואלים אותנו על הזמן בו הרמזור ירוק מתוך כל שעות היממה, נוכל לחשב את הזמן בו הרמזור ירוק מתוך שעה אחת, וכך להסיק מה קורה בשאר שעות היממה.

לפי הכלל שצוין בשאלה, הרמזור אדום במשך 1.5 דקות, ולאחר מכן ירוק במשך דקה אחת. כלומר- לאורך 2.5 דקות- הרמזור אדום במשך 1.5 דקות וירוק למשך דקה אחת. באותו האופן, אם נכפיל ב-2, לאורך 5 דקות- הרמזור אדום במשך 3 דקות, וירוק במשך 2 דקות.
כדי למצוא את הזמן בו הרמזור ירוק במשך 60 דקות (שעה אחת), נוכל להכפיל ב-12 את הזמן בו הרמזור ירוק מתוך 5 דקות. מתוך 5 דקות הרמזור היה ירוק למשך 2 דקות, ולכן לאורך שעה הרמזור יהיה ירוק למשך 24 דקות $(= 2 \cdot 12)$. כלומר, מתוך 60 דקות, הרמזור ירוק למשך 24 דקות.

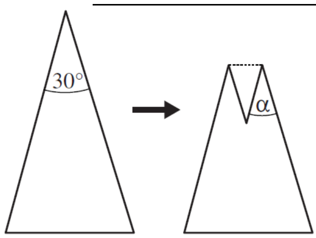
מכיוון שקיימת אותה החוקיות עבור כל שעה משעות היממה, ניתן להניח שההסתברות לכך שהרמזור ירוק בשעה אחת, נכונה עבור כל שעות היממה. בשעה אחת הרמזור ירוק ב-24 דקות מתוך 60.

ההסתברות היא הרצוי חלקי המצוי. הרצוי הוא הזמן בו הרמזור ירוק מתוך שעה אחת, והמצוי הוא כל השעה- 60 דקות. לכן הרצוי חלקי המצוי הוא: $\frac{2}{5} \leftarrow \frac{\cancel{24}^{2}}{\cancel{60}_{5}}$.

תשובה (2).

---

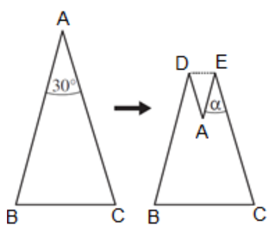
16. **השאלה**: לרבקה פיסת נייר בצורת משולש שווה-שוקיים שזווית הראש שלו $30°$.
היא קיפלה את פינתו העליונה של המשולש לאורך קו המקביל לבסיס המשולש (ראו סרטוט).



$\alpha = ?$

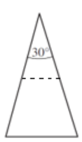
פתרון: חישוב באמצעות דמיון משולשים

נתון לנו שלרבקה משולש שווה שוקיים. אם נתונה אחת הזוויות במשולש שווה שוקיים, ניתן לחשב את הזוויות הנוספות. סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$. סכום שתי זוויות הבסיס שווה ל- $180° - 30° \leftarrow$ $150°$. לכן, כל זווית בסיס שווה ל- $75° = \frac{150°}{2}$.



לשם הנוחות נסמן את קודקודי המשולשים באותיות (ראה סרטוט). רבקה קיפלה את המשולש לאורך קו מקביל לבסיס, גם את הקודקודים הנוספים נסמן באותיות (ראה סרטוט).
הקיפול שרבקה עשתה נעשה בקו מקביל לבסיס, ולכן DE מקביל ל-BC. סכום זוויות פנימיות בישרים מקבילים שווה ל- $180°$. הזוויות הפנימית בישרים המקבילים שנוצרו הן $\measuredangle BCE$ ו- $\measuredangle CED$.
לכן, סכום הזוויות הפנימיות: $\measuredangle BCE + \measuredangle CED = 180°$. מצאנו ש- $\measuredangle BCE = 75°$, נציב ערך זה במשוואה: $75° + \measuredangle CED = 180°$.
נחסיר $75°$ משני אגפי המשוואה: $\measuredangle CED = 105°$.

זווית α היא חלק מזווית CED כך שמתקיים: $\alpha + \measuredangle DEA = 105°$. לכן, כדי למצוא את גודלה של α נצטרך למצוא את זווית DEA.



זווית זו היא חלק ממשולש DEA שנוצר לאחר קיפול המשולש המקורי. מכיוון שהקיפול במשולש המקורי נעשה בקו מקביל, נוצר לנו מצב מוכר של דמיון משולשים- משולש בו עובר ישר המקביל לבסיס (ראה סרטוט משמאל).
לכן, משולש DEA שנוצר לאחר הקיפול דומה למשולש ABC המקורי. במשולשים דומים זוויות מתאימות שוות זו לזו, ולכן זווית DEA שווה לזווית הבסיס במשולש המקורי. מצאנו שזווית הבסיס במשולש ABC שווה ל- $75°$, ולכן גם זווית $\measuredangle DEA = 75°$.
נזכיר כי מצאנו ש- $\alpha + \measuredangle DEA = 105°$, ולכן מתקיים $\alpha + 75° = 105°$. נחסיר $75°$ משני אגפי המשוואה ונקבל: $\alpha = 30°$

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: נתון: $|a| = |b| = |c| = 1$

כמה ערכים שונים יכול לקבל הביטוי $a + b + c$?

פתרון: לפנינו משוואה הכוללת בתוכה ערך מוחלט. עלינו למצוא את מספר הערכים האפשריים עבור ערך הביטוי $a + b + c$. לשם מציאת ערך הביטוי, נבחן את הנתון.

נתונים לנו שלושה נעלמים שהערך המוחלט של כל אחד מהם שווה ל-1. כאשר ערך מוחלט של ביטוי שווה למספר חיובי, הביטוי שבתוך הערך המוחלט יכול להיות חיובי או שלילי. כך, לדוגמה בשאלה זו, כאשר נתון ש- $|a| = 1$ ערכו של a יכול להיות 1 או -1. באותו האופן גם ערכו של b יכול להיות 1 או -1, וכך גם ערכו של c.

כלומר, עבור כל אחד מהנעלמים יש 2 פתרונות אפשריים. נבחן מה הערכים האפשריים עבור הביטוי $a + b + c$:

כל אחד מהנעלמים יכול להיות 1 או -1. פתרון אפשרי אחד הוא ששלושת הנעלמים שווים ל-1. במצב זה ערך הביטוי $a + b + c$ שווה ל-3 $(1+1+1=)$.

מצב אפשרי שני הוא כאשר רק אחד מהנעלמים שווה ל- -1, ושני הנעלמים הנותרים שווים ל-1. במצב זה ערך הביטוי $a + b + c$ יהיה שווה ל-1 $(1+1+(-1)=)$.

מצב אפשרי שלישי הוא כאשר שני נעלמים שווים ל- -1 והנעלם הנותר שווה ל-1. במצב זה ערך הביטוי $a + b + c$ יהיה שווה ל- -1 $(1+(-1)+(-1)=)$.

המצב האחרון האפשרי הוא כאשר כל שלושת הנעלמים שווים ל- -1, במצב זה ערך הביטוי $a + b + c$ יהיה שווה ל- -3 $((-1)+(-1)+(-1)=)$.

בחנו את כל המצבים האפשריים, ומצאנו כי ישנם ארבעה ערכים שהביטוי $a + b + c$ יכול לקבל: 3, 1, -1 ו- -3.

תשובה (4).

---

18. **השאלה**: $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} = ?$

פתרון: מכנה משותף

לפנינו ביטוי המורכב משני שברים. בתשובות ניתן לראות ערכים המורכבים משבר אחד. על מנת לפשט את הביטוי ניצור מכנה משותף.

המכנה המשותף בביטוי זה הוא מכפלת שני השברים: $\frac{1\cdot(\sqrt{3}+1)-(1\cdot(\sqrt{3}-1))}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$.

נפשט את הביטוי על ידי פתיחת הסוגריים: $\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

הביטוי במכנה בנוי באותה הצורה כמו נוסחת הכפל המקוצר $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, ולכן ערך הביטוי הוא: $\frac{\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \leftarrow \frac{1+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$

נזכיר כי $(\sqrt{3})^2 = 3$, נפשט: $\frac{2}{3-1} \leftarrow \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \leftarrow 1$.

תשובה (1).

---

19. **השאלה**: רונית מזגה 3 ליטרים של מיץ לכוסות שנפח כל אחת מהן 225 מיליליטר.

כמה כוסות מלאות מיץ התקבלו לכל היותר?

פתרון: **__דרך א'__**- פירוט שיטתי

זוהי שאלת טווחים בה עלינו למצוא את המספר המקסימלי של הכוסות שרונית מזגה. המספר המקסימלי יתקבל אם לאחר המזיגה של הכוסות יישאר נפח הקטן מ-225 מ"ל, כך שלא ניתן יהיה למזוג כוס נוספת.

נתון לנו שרונית מזגה 3 ליטרים של מיץ לכוסות שנפחן 225 מ"ל. ניתן לראות כי נפח הכוס נמדד במ"ל, ואילו נפח המיץ שנמזג נמדד בליטרים. כדי לעבוד בצורה נוחה עם המספרים עלינו להציג את שניהם באותן המידות. 1 ליטר = 1,000 מ"ל, ולכן 3 ליטרים שווים ל-3,000 מ"ל $(=3\cdot 1000)$.

המספר 225 הוא מספר שלא פשוט לחשב באמצעותו, לכן נחשב בשלבים. מאחר שכל התשובות גדולות מ-10, בוודאות נמזגו מעל 10 כוסות. לכן, בשלב ראשון נוח יהיה לחשב את כמות המיץ הנדרשת למזיגת 10 כוסות. כדי למזוג 10 כוסות קפה נדרשים 2,250 מ"ל של מיץ $(=10\cdot 225)$. כלומר, נותרו לרונית עוד 750 מ"ל של מיץ.

מספר הכוסות הנוספות שרונית יכולה למזוג בהכרח קטן מ-4, שכן $200\cdot 4$ שווה ל-800, ולכן בהכרח אם תמזוג 4 כוסות של 225 מ"ל הנפח יהיה גדול מ-800. מכיוון שמזגה כבר 2,250 מ"ל, לא ייתכן שמזגה יותר מ-800 מ"ל נוספים.

נבחן האם יש באפשרותה למזוג 3 כוסות.

כדי למזוג עוד 3 כוסות מיץ נדרשים לנו 675 מ"ל של מיץ $(=3\cdot 225)$. לכן, לאחר מזיגת 13 כוסות, מזגה רונית בסך הכל 2925 מ"ל של מיץ $(=2250+675)$. מאחר שנותרו פחות מ-100 מ"ל של מיץ לא ניתן למזוג כוסות נוספות. ולכן ניתן למזוג לכל היותר 13 כוסות.

__דרך ב'__- בדיקת תשובות

זוהי שאלת טווחים בה עלינו למצוא את המספר המקסימלי של הכוסות שרונית מזגה. המספר המקסימלי יתקבל אם לאחר המזיגה של הכוסות יישאר נפח הקטן מ-225 מ"ל, כך שלא ניתן יהיה למזוג כוס נוספת.

נתון לנו שרונית מזגה 3 ליטרים של מיץ לכוסות שנפחן 225 מ"ל. ניתן לראות כי נפח הכוס נמדד במ"ל, ואילו נפח המיץ שנמזג נמדד בליטרים. כדי לעבוד בצורה נוחה עם המספרים עלינו להציג את שניהם באותן המידות. 1 ליטר = 1,000 מ"ל, ולכן 3 ליטרים שווים ל-3,000 מ"ל $(=3\cdot 1000)$.

שואלים כמה כוסות נמזגו, ובתשובות קיימות אפשרויות למספר זה. נוכל לבדוק את התשובות, ולבחון האם לאחר מזיגת מספר הכוסות שבתשובה נשאר נפח מספיק למזיגת כוס נוספת.

נבחר לבדוק תשובה אמצעית, ולפי תוצאת החישוב נוכל לדעת אם מספר הכוסות גדול או קטן יותר מהמספר שמצאנו.

__תשובה (2)__: 15.

נחשב מה נפח המיץ שנמזג אם נמזגו 15 כוסות. אם נפח כל כוס הוא 225 מ"ל, נמזגו בסך הכול $15\cdot 225$ מ"ל של מיץ.

כדי לחשב בצורה נוחה נפצל את תרגיל הכפל: $15\cdot(200+25) \leftarrow 15\cdot 200+15\cdot 25$.

כאשר נחשב את $15\cdot 200$ נמצא כי $15\cdot 200 = 3000$. כלומר התוצאה של הסכום $15\cdot 200+15\cdot 25$ בהכרח גדולה מ-3000. לא ייתכן שנמזגו 15 כוסות, מכיוון שלשם כך נדרשים יותר מ-3000 מ"ל.

תשובה זו נפסלת, ועלינו לבחור תשובה קטנה יותר.

<u>תשובה (3)</u>: 13.

נחשב מה נפח המיץ שנמזג אם נמזגו 13 כוסות. אם נפח כל כוס הוא 225 מ"ל, נמזגו בסך הכול $13 \cdot 225$ מ"ל של מיץ.

כדי לחשב בצורה נוחה נפצל את תרגיל הכפל: $13 \cdot (200+25) \leftarrow 13 \cdot 200 + 13 \cdot 25$.

תוצאת המכפלה $13 \cdot 200$ היא 2,600.

כעת נותר לחשב את תוצאת $13 \cdot 25$. ניתן לפצל שוב: $25 \cdot (10+3) \leftarrow 25 \cdot 10 + 25 \cdot 3$.

נחשב: $25 \cdot 10 = 250$ ובנוסף $25 \cdot 3 = 75$. נחבר: $250 + 75 \leftarrow 325$.

נחבר את שני המספרים שחישבנו: $2,600 + 325 \leftarrow 2,925$.

ניתן לראות כי נותר פחות מ-100 מ"ל של מיץ מתוך 3,000 המ"ל, ולכן לא ניתן למזוג עוד כוסות. אם כן- זהו המספר המקסימלי של כוסות שניתן למזוג.

תשובה (3).

---

20. **השאלה**: ערן סרטט משולש שאורכי צלעותיו הם 2 ס"מ, 4 ס"מ ו-5 ס"מ.

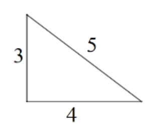
איזה משולש סרטט ערן בהכרח?

פתרון: השוואה למצב מוכר

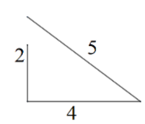
לפנינו משולש שנתונים אורכי צלעותיו, ועלינו לקבוע האם הוא קהה זווית, חד זווית או ישר זווית. כלומר, באמצעות צלעות המשולש עלינו להסיק על זוויותיו. כאשר עוסקים במשולש, אחד מהמצבים בהם ניתן להסיק מאורך הצלעות על זוויות המשולש הוא כאשר נתון משולש ישר זווית- כסף או זהב (המצב הנוסף הוא משולש שווה צלעות).

מצב נפוץ במשולש ישר זווית אשר מזכיר את המצב המתואר בשאלה הוא משולש ישר זווית שאורך ניצביו הם 3 ס"מ ו-4 ס"מ, ואורך היתר 5 ס"מ.

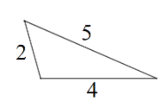
נשרטט משולש ישר זווית, כדי לדמות את המשולש המוכר שצלעותיו הן 3, 4 ו-5:



במשולש שצלעותיו נתונות בשאלה, הצלעות ששוות 4 ו-5 זהות למצב המוכר ועלינו לקצר את הצלע ששווה ל-3. כך נוצר לנו המשולש הבא:



כמובן שמצב זה לא ייתכן, ולכן עלינו 'לתקן' את הסרטוט, ולחבר בין הצלעות. לשם כך, עלינו 'לפתוח' את הזווית בין הצלע ששווה 2 לצלע ששווה 4, ו'להוריד' את הצלע ששווה 5. כך נוצר המשולש הבא:



משולש זה הינו משולש קהה זווית.

תשובה (1).
