מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(4)	(1)	(2)	(4)	(1)	(1)	(4)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(4)	(1)	(1)	(3)	(1)	(4)	(4)	(1)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. **השאלה**: עבור כל x השונה מ-1 הוגדרה הפעולה $\$(x)$ כך: $\$(x)=\frac{x}{x-1}$

$\frac{\$(10)}{\$(5)}=?$

פיתרון: נחשב באמצעות הגדרת פעולת ה-$ את ערכם של הביטויים שבמונה ובמכנה:

$$\$(10)=\frac{10}{10-1}=\frac{10}{9}$$

$$\$(5)=\frac{5}{5-1}=\frac{5}{4}$$

כעת נחלק את הביטוי במונה, בביטוי שקיבלנו במכנה, ונקבל: $\frac{8}{9}$ $\left(\frac{\frac{10}{9}}{\frac{5}{4}}=\frac{{}^{2}\cancel{10}}{9}\cdot\frac{4}{\cancel{5}_{1}}=\right)$

תשובה (3).

---

2. **השאלה**: במפעל לייצור דיסקים יש שתי מכונות, והן מייצרות יחד 300 דיסקים בשעה.
מכונה א מייצרת בשעה פי 2 יותר דיסקים ממכונה ב.

בכמה שעות תייצר מכונה א 400 דיסקים?

פיתרון: אלגברה

נתון כי מכונה א מייצרת בשעה פי 2 יותר דיסקים ממכונה ב.
נסמן את מספר הדיסקים שמייצרת מכונה ב בשעה ב-x, ואת מספר הדיסקים שמייצרת מכונה א בשעה ב-2x.
מכיוון ששתי המכונות מייצרות ביחד 300 דיסקים בשעה, הרי ש: $x+2x=300$ ⇦ $3x=300$.
נחלק ב-3 את שני האגפים, ונקבל: $x=100$.
אם מכונה ב מייצרת 100 דיסקים לשעה, הרי שמכונה א מייצרת 200 דיסקים לשעה, ומכאן שמכונה א מייצרת 400 דיסקים בשעתיים.

תשובה (2).

---

3. **השאלה**: בלוח השנה של שבט עתיק יש 12 חודשים.
ב-6 החודשים הראשונים של השנה – בכל חודש זוגי יש 25 ימים, ובכל חודש אי-זוגי יש 24 ימים.
בכל חודש מ-6 החודשים האחרונים של השנה יש 10 ימים.

כמה ימים יש בשנה אחת בלוח השנה של שבט זה?

פיתרון:
ב-6 החודשים הראשונים של השנה – בכל חודש זוגי יש 25 ימים, ובכל חודש אי-זוגי יש 24 ימים.
מכיוון שב-6 החודשים הראשונים יש 3 חודשים זוגיים ו-3 חודשים אי-זוגיים,
הרי שיש בסך הכול ב-6 חודשים אלו 147 ימים $(= 3\cdot 25+3\cdot 24)$.
בכל חודש מ-6 החודשים האחרונים של השנה יש 10 ימים, כלומר בסך הכול 60 ימים $(= 6\cdot 10)$.
מצאנו כי בסך הכול יש בשנה 207 ימים $(= 147+60)$.

תשובה (4).

---

4. **השאלה**: לכל אדם בוגר במשפחת כהן יש שלושה ילדים או ארבעה או חמישה.

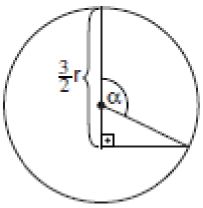
מה מספר הנכדים המקסימלי שיכול להיות לסבא במשפחת כהן?

פיתרון: נתבקשנו למצוא את מספר הנכדים המקסימלי שיכול להיות לסבא במשפחה.
מכאן שעלינו להניח שלאותו אדם יש את מספר הילדים המקסימלי ולכל אחד מהם אף הוא יש את מספר הילדים המקסימלי האפשרי.
אם לכל אדם בוגר במשפחת כהן יש בין 3 ל-5 ילדים, הרי שלסבא במשפחת כהן יש לכל היותר 5 ילדים, שלכל אחד מהם יש לכל היותר 5 ילדים, כלומר לסבא במשפחת כהן יש לכל היותר 25 נכדים $(= 5\cdot 5)$.

תשובה (1).

---

5. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שרדיוסו r.
הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט
$\alpha = ?$

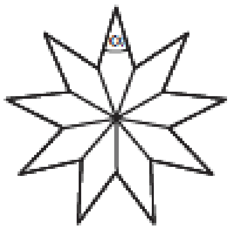
פיתרון: הנקודה המודגשת היא מרכז המעגל, ולכן הקו אשר אורכו מסומן בסרטוט ב- $\frac{3}{2}r$, מורכב מרדיוס המעגל ומקטע אשר אורכו שווה ל- $\frac{1}{2}r$.
נתבונן במשולש ישר-הזווית שבסרטוט:
יתר המשולש הוא רדיוס המעגל ואורכו של אחד הניצבים הוא $\frac{1}{2}r$, ומכאן שמשולש זה הוא משולש זהב, כלומר משולש אשר הזווית שמול הניצב השווה למחצית היתר שווה ל-$30°$. נסמן זווית זו בסרטוט.
מכיוון שסכום זוויות פנימיות בכל משולש שווה ל-$180°$, הרי שהזווית הצמודה לזווית α שווה ל-$60°$,
וזווית α שווה ל-$120°$ $(= 180° - 60°)$.

תשובה (2).

---

6. **השאלה**: 9 מעוינים חופפים יוצרים צורה כבסרטוט.

$\alpha = ?$



פיתרון: כל המעונים שבסרטוט חופפים, ומכאן שלכל אחד מהמעוינים זווית שגודלה α הנמצאת בדיוק באותו מיקום של הזווית α המסומנת בסרטוט.
זוויות נגדיות במעוין שוות זו לזו, ולכן אם נתבונן בנקודה המודגשת שבמרכז הסרטוט, הרי שמסביב לה יש 9 זוויות שגודל כל אחת מהן שווה ל-α, וסכומן שווה ל-$360°$.
מכיוון שמצאנו כי $9\alpha = 360°$, נחלק ב-9 את שני האגפים, ונקבל כי $\alpha = 40°$.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: נתון: $0 < |a| < 1$

$x = a^2$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שהשאלה עוסקת במשתנים ניתן לפתור אותה באמצעות הצבת דוגמה מספרית.
נתון כי a הוא שבר אשר ערכו המוחלט גדול מ-0 וקטן מ-1, נציב לדוגמה $a = \frac{1}{2}$.

על פי הנתונים $x = a^2$, ומכאן ש: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

נציב בכל אחת מן התשובות המוצעות את ערכם של a ו-x ונבדוק מי מהתשובות נפסלת בעקבות ההצבה:

<u>תשובה (1)</u>: $0 < x < |a|$. נציב $x = \frac{1}{4}$ ו- $a = \frac{1}{2}$ באי-השיוויון המוצע, ונקבל: $0 < \frac{1}{4} < \left|\frac{1}{2}\right|$. מכיוון שאי-השיוויון שקיבלנו נכון, לא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $|a| < x < 1$. נציב את ערכי a ו-x באי-השיוויון המוצע, ונקבל: $\left|\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} < 1$.
מכיוון שאי-השיוויון שקיבלנו אינו נכון, תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $1 < x < \frac{1}{|a|}$. נציב את ערכי a ו-x באי-השיוויון המוצע, ונקבל: $1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ ⇦ $1 < \frac{1}{4} < |2|$. מכיוון שאי-השיוויון שקיבלנו אינו נכון, תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{1}{|a|} < x$. נציב את ערכי a ו-x באי-השיוויון המוצע, ונקבל: $\frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} < \frac{1}{4}$ ⇦ $|2| < \frac{1}{4}$. מכיוון שאי-השיוויון שקיבלנו אינו נכון, תשובה זו נפסלת.

מכיוון שהצבת הדוגמה פסלה את תשובות (2), (3) ו-(4), הרי שניתן לסמן את תשובה (1).

<u>דרך ב'</u>: תכונות של שברים

נתון כי a הוא שבר שערכו המוחלט קטן מ-1 וגדול מ-0, כלומר שבר חיובי או שלילי.
על פי הנתונים: $x = a^2$. כאשר 'מעלים' שבר חיובי או שלילי בריבוע, ערכו בהכרח חיובי וקטן מ-1.
נוסף על כך ניתן לקבוע, כי בהכרח ערכו המוחלט של השבר החיובי שקיבלנו קטן מערכו המוחלט של השבר המקורי, ולפיכך תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

8. **השאלה**: a ו-b הם מספרים שלמים, $a < b$.
נתון: $a \cdot (b-1) = 36$

איזה מן המספרים הבאים יכול להיות ערכו של $(a + b)$?

פיתרון: הצבת דוגמה מספרית
נתונה משוואה שבה שני נעלמים. מכיוון ששואלים מה יכול להיות ערך סכומם של a ו-b. מכיוון שנתון כי a ו-b הם מספרים שלמים, כאשר $a < b$, נחפש זוגות מספרים שלמים אשר יכולים לקיים את המשוואה, ונבדוק האם סכומם שווה לאחת התשובות המוצעות.
על מנת לעבוד בצורה מסודרת, מומלץ להתחיל מה-a הקטן ביותר, כלומר $a = 1$.
כאשר a שווה ל-1, b צריך להיות 37 על מנת שמכפלת הביטוי $a \cdot (b-1)$ תהיה שווה ל-36.
במצב זה סכומם של a ו-b שווה ל-38 $(1+37=)$, מכיוון שאין תשובה מתאימה נגדיל את a, ונבדוק זוג נוסף המקיים את המשוואה.
כאשר a שווה ל-2, b צריך להיות 19 על מנת שמכפלת הביטוי $a \cdot (b-1)$ תהיה שווה ל-36.
במצב זה סכומם של a ו-b שווה ל-21 $(2+19=)$, מכיוון שאין תשובה מתאימה נגדיל את a, ונבדוק זוג נוסף המקיים את המשוואה.
כאשר a שווה ל-3, b צריך להיות 13 על מנת שמכפלת הביטוי $a \cdot (b-1)$ תהיה שווה ל-36.
במצב זה סכומם של a ו-b שווה ל-16 $(3+13=)$, מכיוון שאין תשובה מתאימה נגדיל את a, ונבדוק זוג נוסף המקיים את המשוואה.
כאשר a שווה ל-4, b צריך להיות 10 על מנת שמכפלת הביטוי $a \cdot (b-1)$ תהיה שווה ל-36.
במצב זה סכומם של a ו-b שווה ל-14 $(4+10=)$, מכיוון שמצאנו תשובה המתאימה למצב זה – תשובה (1), זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריה.

בטבלה מוצגים נתונים הנוגעים למכונות במפעל מסוים.
כל מכונה במפעל היא בעלת שני גלגלי שיניים: גלגל **א** וגלגל **ב**. הסוג של כל מכונה נקבע לפי מספר השיניים שבכל אחד מהגלגלים.
בכל משבצת בטבלה נתונים מספר המכונות במפעל לפי סוגיהן השונים, וההספק (בכוחות סוס, להלן - כ"ס) של מכונה יחידה מאותו הסוג (ראו מקרא).
אם אין במפעל מכונות מסוג מסוים, עובדה זו מצוינת בסימן — במקום המתאים בטבלה.

לדוגמה, במפעל אין מכונות בעלות 8 שיניים בגלגל **א** ו-16 שיניים בגלגל **ב**. במפעל יש 10 מכונות בעלות 40 שיניים בגלגל **א** ו-10 שיניים בגלגל **ב**; ההספק של כל מכונה כזאת הוא 18 כ"ס.

מספר השיניים בגלגל א

64	40	32	16	10	8	מספר השיניים בגלגל ב
15 / 10	15 / 12	15 / 15	20 / 15	20 / 12	20 / 10	8
5 / 20	10 / 18	10 / 16	—	17 / 10	10 / 8	10
4 / 25	—	8 / 20	9 / 10	10 / 20	—	16
—	—	—	8 / 20	—	8 / 8	32
3 / 30	—	5 / 25	—	—	7 / 10	40
1 / 10	1 / 25	—	1 / 25	1 / 10	—	64

מקרא:
מספר המכונות במפעל / הספק של מכונה (בכ"ס)

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.9 **השאלה**: כמה מהמכונות במפעל הן בעלות הספק **הגבוה** מ-20 כ"ס?

פיתרון: לפי המקרא, כל משבצת בטבלה הנתונה, מכילה שני ערכים מספריים. החלק השמאלי העליון מציג מספר (כמות) של מכונות מסוג מסוים במפעל ואילו החלק הימני התחתון מציג את ההספק של כל אחת ממכונות אלה (בכוח-סוס).

בשאלה זו עלינו למצוא כמה מכונות במפעל הן בעלות הספק אשר **גבוה** מ-20 כ"ס, לכן נחפש באילו משבצות מופיע מספר הגדול מ-20 בצדן <u>הימני התחתון</u>, ונספור <u>כמה</u> מכונות כאלה יש, לפי המספר הכתוב בצד <u>השמאלי העליון</u> של אותן משבצות.

נבדוק את הטורים, לפי סדר שיטתי, מימין לשמאל.
בטור הראשון מימין אין מכונות אשר הספקן גבוה מ-20 כ"ס.
בטור השני מימין אין מכונות אשר הספקן גבוה מ-20 כ"ס.
בטור השלישי מימין, במשבצת התחתונה, קיימת מכונה **<u>1</u>** שהספקה הוא 25 כ"ס.
בטור הרביעי מימין, במשבצת החמישית, קיימות **<u>5</u>** מכונות שהספקן 25 כ"ס.

בטור החמישי מימין, במשבצת התחתונה, קיימת מכונה **<u>1</u>** שהספקה 25 כ״ס.
בטור השישי מימין, במשבצת השלישית מלמעלה קיימות **<u>4</u>** מכונות שהספקן 25 כ״ס ובמשבצת החמישית מלמעלה (השנייה מלמטה) יש **<u>3</u>** מכונות נוספות שהספקן 30 כ״ס.

כעת נחבר את מספר המכונות שמצאנו ונקבל 14 מכונות שהספקן גבוה מ-20 כ״ס $\left(=3+4+1+5+1\right)$.

תשובה (4).

.10 **השאלה**: במפעל אין שום מכונה שבה מספר גלגלי השיניים בגלגל **ב** הוא ______, ומספר השיניים בגלגל **א** שווה למספר זה או גדול יותר.

פיתרון: בדיקת תשובות.
הטבלה הנתונה מציגה נתון מספרי לגבי מספר השיניים בכל אחד משני גלגלי שיניים: **א** ו-**ב**.
מצידה העליון של הטבלה, טורים המחלקים את המכונות במפעל לפי מספר השיניים בגלגל א׳ ומצידה הימני של הטבלה, שורות המחלקות את המכונות במפעל לפי מספר השיניים בגלגל **ב**.
היות והתשובות שאנו בודקים מתייחסות למספר השיניים שעל גלגל **ב**, נבדוק את התשובות המוצעות כאשר כל פעם ניגש ל<u>שורה</u> הרלוונטית לתשובה שנבדוק.
הערה: מכיוון שאנו מחפשים איזו מכונה אינה קיימת, עלינו לחפש בתאים הרלוונטיים את הסימן ״-״.

<u>תשובה (1)</u>: 16
השורה השלישית מציינת את מספר המכונות שבגלגל **ב** שלהן יש 16 שיניים.
מכיוון שעל פי הטבלה יש 9 מכונות אשר בגלגל **א** שלהן יש 16 שיניים (ומכונות נוספות שמספר השיניים על גבי גלגל **א** שלהן גדול מ-16). כלומר <u>קיימות</u> מכונות שבהן מספר השיניים בגלגל **ב** שווה או גדול למספר השיניים בגלגל **א**, ולכן תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 32
ניגש לשורה הרביעית המציינת מכונות שבגלגל **ב** שלהן יש 32 שיניים. אנו מחפשים את המכונות שבגלגל **א** שלהן יש מספר שווה או גדול ממספר השיניים שעל גלגל **ב**, כלומר שווה או גדול מ-32.

נתבונן בשורה הרביעית בתרשים המתייחסת למכונות שלהן 32 שיניים בגלגל **ב**.
על פי השורה הרביעית אין מכונות שמספר השיניים בגלגל **א** שלהן שווה או גדול מ-32, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

.11 **השאלה**: אחת המכונות במפעל התקלקלה, והתברר שהיא היחידה מסוגה במפעל.

איזו מהטענות הבאות הנוגעות למכונה זו, נכונה **בהכרח**?

פיתרון: עלינו לזכור כי הערך המציין את <u>מספר</u> המכונות מכל סוג במפעל, מופיע בכל משבצת בצידה העליון השמאלי, וכי המספר שעלינו לחפש כדי למצוא מכונה ״יחידה מסוגה״ (כלומר, אחת בלבד) הוא 1. מהתבוננות בתרשים ניתן לראות כי המקום היחיד שבו נמצאות מכונות שהן ״יחידות״ מסוגן, כלומר שיש רק אחת מהן, היא בשורה התחתונה, כלומר מכונות שיש להן 64 שיניים על גלגל **ב**.
המשותף לכל המכונות שבשורה זו, הוא כי מכל אחת מהן קיימת מכונה 1 בלבד.

תשובה (4).

---

12. **השאלה**: מה סכום ההספקים (בכ"ס) של כל המכונות במפעל שמספר השיניים בשני הגלגלים שלהן שווה זה לזה?

פיתרון: על מנת למצוא את המכונות במפעל שמספר השיניים בשני הגלגלים שלהן שווה זה לזה, עלינו לבדוק את ההצטלבויות של השורות והטורים המייצגים מספר זהה של שיניים. (8,8 , 10,10 , 16,16 וכן הלאה).

מכיוון שהתבקשנו לחשב את <u>סכום</u> ההספקים של כל המכונות במפעל שמספר השיניים בשני הגלגלים שלהן זהה- בעבור כל הצטלבות, נבדוק מהו <u>ההספק</u> של המכונות העונות להגדרה זו, ונכפול אותו <u>במספר</u> המכונות מסוג זה אשר נמצאות במפעל.

נתחיל בבדיקת המכונות להן 8 שיניים בגלגל א' ו-8 שיניים בגלגל ב'. ההספק של כל מכונה מסוג זה הוא 10 כ"ס, וישנן 20 מכונות מסוג זה. סכום ההספקים של המכונות מסוג זה הוא 200 כ"ס $\left(=10\cdot 20\right)$.

כעת נבדוק את המכונות להן 10 שיניים בגלגל א' ו-10 שיניים בגלגל ב'. ההספק של כל מכונה מסוג זה הוא 10 כ"ס, וישנן 17 מכונות מסוג זה.
סכום ההספקים של המכונות מסוג זה הוא 170 כ"ס $\left(=10\cdot 17\right)$.

נמשיך בבדיקת המכונות להן 16 שיניים בגלגל א' ו-16 שיניים בגלגל ב'. ההספק של כל מכונה מסוג זה הוא 10 כ"ס, וישנן 9 מכונות מסוג זה. סכום ההספקים של המכונות מסוג זה הוא 90 כ"ס $\left(=10\cdot 9\right)$.

שימו לב- במפעל <u>לא קיימות</u> מכונות אשר מספר השיניים שעל גלגל א' ועל גלגל ב' שלהן הוא 32.
בנוסף, במפעל <u>לא קיימות</u> מכונות אשר מספר השיניים שעל גלגל א' ועל גלגל ב' שלהן הוא 40.

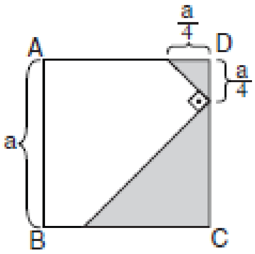
לסיום נבדוק את המכונות להן 64 שיניים בגלגל א' ו-64 שיניים בגלגל ב'. ההספק של כל מכונה מסוג זה הוא 10 כ"ס, וישנה מכונה 1 בלבד מסוג זה.

כעת על מנת למצוא את סכום ההספקים של כל המכונות הרלוונטיות, עלינו לחבר בין סכומי ההספקים שמצאנו עד כה. $200+170+90+10=470$

תשובה (4).

הערה: כבר לאחר בדיקת שתי הקבוצות הראשונות (מכונות שיש להן 8 שיניים על כל גלגל שיניים ומכונות שיש להן 10 שיניים על כל גלגל שיניים, הגענו לסכום של 370 כ"ס $\left(=200+170\right)$, מכיוון שיש רק תשובה אחת הגדולה מ-370 ניתן לסמן אותה כבר בשלב זה).

שאלות ובעיות (שאלות 20-13)



.13 **השאלה**: ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו a.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה סכום השטחים הכהים?

פיתרון: **<u>דרך א</u>**: דרך אלגברית באמצעות הנוסחה למציאת שטח משולש.

נחשב את שטחו של המשולש הכהה הגדול והמשולש הכהה הקטן ולאחר
מכן נחשב את סכומם יחד.

היות ומדובר בשני משולשים ישרי-זווית נחשב את שטחם על ידי מכפלת הניצבים לחלק ל-2.
לפי נתוני הסרטוט ניצביו של המשולש הקטן שווים זה לזה, ומכאן שהוא משולש ישר-זווית ושווה שוקיים, כלומר זוויות הבסיס של המשולש הקטן הן בנות 45° כל אחת, נסמן נתון זה על גבי הסרטוט.
נתבונן במשולש הגדול: נתון כי הזווית בין יתר משולש זה ליתר המשולש הקטן היא 90° וכי זווית הבסיס של המשולש הקטן שווה ל-45°, מכיוון שסכום זוויות על גבי קו ישר שווה ל-180°, הרי שגם הזווית הימנית העליונה במשולש הגדול שווה ל-45° $\left(=180^\circ-45^\circ-90^\circ\right)$.
מצאנו כי המשולש הגדול אף הוא משולש ישר-זווית ושווה שוקיים.

<u>המשולש הקטן</u>: $\frac{a^2}{32} \Leftarrow \frac{a^2}{16}\cdot\frac{1}{2} \Leftarrow \frac{\frac{a^2}{16}}{2} \Leftarrow \frac{\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}}{2}$.

<u>המשולש הגדול</u>: לפי הנתונים שבסרטוט, אורך צלע הריבוע הוא a ס"מ. על מנת לחשב את אורך הניצב במשולש הגדול נחסר את אורך צלע המשולש הקטן מאורך צלע הריבוע ונקבל כי אורך הניצב במשולש הגדול הוא $\frac{3}{4}a$ $\left(a-\frac{a}{4}=\right)$.

כעת נחשב את שטחו של משולש זה $\frac{9a^2}{32} \Leftarrow \frac{9a^2}{16}\cdot\frac{1}{2} \Leftarrow \frac{\frac{9a^2}{16}}{2} \Leftarrow \frac{\frac{3a}{4}\cdot\frac{3a}{4}}{2}$.

כעת לאחר שמצאנו את שטחו של כל משולש בנפרד, נחבר ביניהם ונקבל כי סכום השטחים הכהים הוא $\frac{10a^2}{32}$ $\left(\frac{a^2}{32}+\frac{9a^2}{32}=\right)$.

נצמצם את מונה ומכנה השבר שמצאנו ב-2, ונקבל: $\frac{5a^2}{16} \Leftarrow \frac{\cancel{10}^{5}a^2}{\cancel{32}_{16}}$.

תשובה (1).

---

14. **השאלה**: a, b ו-c הם מספרים חיוביים.

נתון: $b \cdot c = b + c$

$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = ?$

פיתרון: <u>דרך א'</u>: פיתרון אלגברי

מכיוון שנתונה משוואה שלא ברור כיצד ניתן לפשט אותה כך שנוכל לבודד משתנה אשר נציב בביטוי, נפשט את הביטוי המבוקש על ידי חיבור השברים באמצעות יצירת מכנה משותף:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{ac}{bc} + \frac{ab}{bc} = \frac{ac + ab}{bc}$$

על פי המשוואה הנתונה $b \cdot c = b + c$, נציב נתון זה במקום מכנה השבר, ונקבל:

$$\frac{ac + ab}{bc} = \frac{ac + ab}{b + c}$$

נוציא גורם משותף a מהמונה, ונקבל: $\frac{ac + ab}{b + c} = \frac{a \cdot (c + b)}{b + c} = a$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שנתון כי סכומם של a ו- b שווה למכפלתם, נחפש זוגות של מספרים חיוביים אשר יכולים לקיים משוואה זו, ונבדוק מספרים אלה בביטוי עליו נשאלנו.

הערכים היחידים אשר מקיימים משוואה זו הם $b = 2$ ו $c = 2$. $\left(\underbrace{2 + 2}_{4} = \underbrace{2 \cdot 2}_{4}\right)$.

נציב מספרים אלה בביטוי אליו נשאלנו: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$.

נמשיך בהצבת הדוגמה המספרית; המידע הנתון לגבי המשתנה a הוא שהוא מספר חיובי. לשם הנוחיות נציב $a = 1$: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. כלומר, כאשר $a = 1$, תוצאת הביטוי עליו נשאלנו היא <u>1</u>. נבדוק אילו תשובות ניתן לפסול:

<u>תשובה (1)</u>: a

לפי ההצבה בה $a = 1$, תוצאת הביטוי גם היא <u>1</u> ולכן לא נפסול תשובה זו.

<u>תשובה (2)</u>: $\frac{a}{b \cdot c}$

נציב $a = 1$, $b = 2$ ו-$c = 2$: $\frac{1}{2 \cdot 2} \Leftarrow \frac{1}{4}$. מכיוון שהתוצאה שהתקבלה אינה שווה ל-1, נפסול תשובה זו.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{2a}{b + c}$

נציב $a = 1$, $b = 2$ ו-$c = 2$: $\frac{2 \cdot 1}{2 + 2} \Leftarrow \frac{2}{4} \Leftarrow \frac{1}{2}$. מכיוון שהתוצאה שהתקבלה אינה שווה ל-1, נפסול תשובה זו.

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{a^2}{b \cdot c}$

נציב $a = 1$, $b = 2$ ו-$c = 2$: $\frac{1^2}{2 \cdot 2} \Leftarrow \frac{1}{4}$. מכיוון שהתוצאה שהתקבלה אינה שווה ל-1, נפסול תשובה זו.

כעת, לאחר שפסלנו 3 תשובות, נוכל לסמן את תשובה (1).

הערה: בשלב בו נותרנו עם ביטוי המורכב משני שברים בעלי משתנה אחד $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)$, ניתן לחשב את סכום השברים, מבלי להציב מספר במקום המשתנה a:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2} \Leftarrow \frac{a+a}{2} \Leftarrow \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} \Leftarrow a$$

תשובה (1).

---

15. השאלה: לאופיר יש חנות מעילים. בכל מכירת מעיל הוא מרוויח 10% ממחיר המעיל. בחודש פברואר היה מחיר מעיל בחנות גבוה ב- 25% ממחירו בחודש ינואר.

אם בחודש פברואר הרוויח אופיר 100 שקלים במכירת מעיל, כמה הוא הרוויח במכירת מעיל בחודש ינואר?

פיתרון: <u>דרך א</u>: אחוזים

ידוע כי אופיר מרוויח 10% ממחיר כל מעיל שהוא מוכר, כלומר $\frac{1}{10}$ ממחיר המעיל $\left(=\frac{10}{100}\right)$.

נשאלנו כמה הרוויח אופיר במכירת מעיל שמכר בחודש ינואר. מכיוון שיש נתון מספרי אשר נוגע לחודש פברואר (100 שקלים), ראשית נמצא את המחיר בו נמכר מעיל בחודש פברואר.

אופיר מרוויח 10% ממחיר המעיל, וידוע כי בחודש פברואר הוא הרוויח 100 שקלים. מכאן שמחיר המעיל בחודש פברואר גדול פי 10 מהרווח שלו, כלומר שווה ל-1,000 שקלים (10% מ- 1,000 שקלים הם 100 שקלים).

כעת נחשב את מחירו של מעיל בחודש ינואר. לפי הנתון בחודש פברואר מחיר המעיל בחנות היה גבוה ב- 25% <u>מ</u>מחיר המעיל בחודש ינואר. כלומר, מחיר המעיל בחודש ינואר מהווה 100% ומחיר במעיל בחודש פברואר, גבוה ב- 25% כלומר יהווה 125%.

סכום כסף	%
1,000	125
?	100

מכיוון שהיחס בשורה העליונה שווה ליחס בשורה התחתונה, הרי ש: $\frac{1,000}{125}=\frac{x}{100}$.

על מנת לבודד את x, נכפול את המשוואה כולה ב-100; $\frac{1,000\cdot 100}{125}=x$

כעת נצמצם את השבר שהתקבל ב-25; $\frac{1,000\cdot \cancel{100}^{4}}{\cancel{125}_{5}}=x \Leftarrow \frac{{}^{200}\cancel{1,000}\cdot 4}{{}_{1}\cancel{5}}=x \Leftarrow$

$200\cdot 4=800$.

מצאנו כי מחיר מעיל בחודש ינואר היה 800 שקלים.

מכיוון שאופיר מרוויח 10% ממחיר מעיל, הרי שבחודש ינואר הרוויח אופיר 80 שקלים.

<u>דרך ב</u>: בדיקת התשובות המוצעות.

ידוע כי אופיר מרוויח 10% ממחיר כל מעיל שהוא מוכר. נשאלנו כמה הרוויח אופיר במכירת מעיל שמכר בחודש ינואר. על מנת לחשב רווח זה עלינו ראשית למצוא את המחיר בו נמכר מעיל בחודש פברואר.

אם אופיר מרוויח 10% ממחיר המעיל, וידוע כי בחודש פברואר הוא הרוויח 100 שקלים, הרי שמחיר המעיל בחודש זה היה 1,000 שקלים (10% מ- 1000 שקלים הם 100 שקלים).

לאחר שמצאנו כי מחיר מעיל בחודש פברואר היה 1,000 שקלים, עלינו למצוא מהו הסכום שעלינו להוסיף לו 25% (כלומר, רבע) בכדי לקבל 1,000 שקלים.
רצוי להתחיל את הבדיקה בתשובה הנוחה ביותר. מכיוון ש-70 ו-75 שקלים הם מספרים אשר אינם מתחלקים ללא שארית ב-4, נתחיל בתשובה (3): 80.

<u>תשובה (3)</u>: 80 שקלים
אם הרווח ממכירת מעיל בחודש ינואר היה 80 שקלים, הרי שמחיר המעיל בחודש זה היה גדול פי 10, כלומר שווה ל-800 שקלים.
כעת נבדוק האם כאשר נוסיף 25% ל-800 שקלים נקבל 1000 שקלים.
כאמור, 25% שווים לרבע, רבע מ-800 שקלים מהווים 200 שקלים $\left(\frac{1}{4}\cdot 800=\right)$, כאשר נוסיף 200 שקלים אלו ל-800 שקלים, נקבל 1,000 שקלים $(=200+800)$, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: נתונים גלילים שרדיוס בסיסיהם 1ס״מ וגובהם 5 ס״מ.

כמה גלילים כאלה **לכל היותר** אפשר להכניס לתוך קובייה שאורך מקצועה 10 ס״מ?

פיתרון: על מנת למצוא מה מספר הגלילים שניתן להכניס לקובייה, עלינו למצוא מה אורכו, רוחבו וגובהו של כל גליל.
אורכו ורוחבו של כל גליל נקבע לפי אורך הקוטר שלו . מכיוון שאורכו של רדיוס הגליל הוא 1 ס״מ, הרי שרוחבו ואורכו של כל גליל שווה ל-2 ס״מ.
אורך מקצועה של הקובייה הוא 10 ס״מ.
מכאן שניתן להכניס ב<u>רוחב</u> הקובייה 5 גלילים אשר קוטר כל אחד מהם הוא 2 ס״מ $\left(\frac{10}{2}=\right)$.

באותו אופן, ניתן להכניס 5 גלילים <u>לאורכו</u> של בסיס הקובייה.
מצאנו כי ניתן להציב על בסיס הקובייה 25 גלילים $(=5\cdot 5)$.
גובהו של כל גליל הוא 5 ס״מ. מכיוון שאורכה של צלע הקובייה הוא 10 ס״מ, הרי שניתן להכניס לקובייה <u>שתי</u> ״שכבות״ של גלילים, כאשר גובהה של כל ״שכבה״ הוא 5 ס״מ, ובכל שכבה יש 25 גלילים, כלומר מספר הגלילים המקסימלי שניתן להכניס לקובייה הוא 50 $(=25\cdot 2)$.

תשובה (1).

---

17. **השאלה**: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

$x=?$

פיתרון: אלגברה – חזקות ושורשים

עלינו למצוא את הערך של x אשר יקיים את המשוואה הנתונה. מכיוון שהנעלם מופיע במעריך, עלינו להגיע למצב בו החזקות במשוואה הן בעלות <u>בסיסים זהים</u> ולאחר מכן להשוות בין המעריכים.

$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$ ⇦ $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$. נחלק את המונה והמכנה ב- $\sqrt{2}$, ונקבל:

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$ ⇦ $\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$.

על מנת לבנות משוואה בעלת בסיסים זהים, עלינו להמיר את השורש לכתיבה של חזקה, מכיוון ששורש שני הוא חזקת חצי, הרי ש: $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$

מכיוון שקיבלנו משוואה שבה הבסיסים שווים, כעת ניתן להשוות בין המעריכים, כלומר: $\frac{1}{2}=2x$

נחלק את שני האגפים ב-2 ונקבל $x=\frac{1}{4}$.

תשובה (4).

---

18. **השאלה**: בארנק יש 3 מטבעות של 5 שקלים ו-2 מטבעות של שקל אחד.

כמה סכומי כסף שונים אפשר לשלם במדויק באמצעות המטבעות שבארנק?

פיתרון: ספירה ידנית

עלינו למצוא את מספר הסכומים האפשריים אליהם ניתן להגיע באמצעות המטבעות שבארנק.
נבחר דרך נוחה לספירה, על מנת לשמור על הסדר.

נתחיל בשימוש במטבע של 5 שקלים <u>בלבד</u>. האפשרויות הן: 5, $10\ (=5+5)$, $15\ (=5+5+5)$. עד כה 3 אפשרויות.

כעת נוסיף מטבע בודד של שקל לכל אחת מ-3 האפשרויות שקיבלנו, ונמצא כי ניתן גם לשלם: $6\ (=5+1)$, $11\ (=10+1)$ ו- $16\ (=15+1)$. מצאנו 3 אפשרויות נוספות.

כעת נוסיף 2 מטבעות לכל אחת מהאפשרויות הראשונות: $7\ (=5+1+1)$, $12\ (=10+1+1)$, $17\ (=15+1+1)$. נוספו 3 אפשרויות.

היות וניתן לשלם במטבעות של שקל אחד <u>בלבד</u>, נוסיף 2 אפשרויות: שקל אחד ושני שקלים.

סך הכול 11 אפשרויות $(=3+3+3+2)$.

תשובה (4).

---

19. **השאלה**: למלך ארתור ולמלך ג'ורג' היו כובעים באותה כמות. המלך ארתור חילק את כובעיו שווה בשווה בין 6 פקידיו, והמלך ג'ורג' חילק את כובעיו שווה בשווה בין 30 פקידיו.
כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים יותר מכל פקיד של המלך ג'ורג'.

כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: בדיקת תשובות
היות ונשאלנו כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים, נבדוק את מספר הכובעים אשר בתשובות המוצעות. שימו לב, לפי תשובה (1), לא ניתן לדעת כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים, לכן עלינו לבדוק האם קיימת יותר מתשובה אחת אשר מקיימת את נתוני השאלה.

<u>תשובה (2)</u>: 30
אם למלך ארתור היו 30 כובעים, והוא חילק אותם בין 6 פקידיו,
הרי שכל פקיד קיבל 5 כובעים $(=30:6)$.
אם למלך ג'ורג' היו 30 כובעים, והוא חילק אותם בין 30 פקידיו,
הרי שכל פקיד קיבל כובע אחד $(=30:30)$.
לכל פקיד של המלך ארתור 5 כובעים ואילו לכל פקיד של המלך ג'ורג' כובע אחד.

במצב בו לכל מלך היו 30 כובעים, כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 יותר כובעים מכל פקיד של המלך ג'ורג'. אפשרות זו מקיימת את נתוני השאלה. כעת נבדוק את התשובה הבאה.

<u>תשובה (3)</u>: 60
אם למלך ארתור היו 60 כובעים, והוא חילק אותם בין 6 פקידיו,
הרי שכל פקיד קיבל 10 כובעים $(=60:6)$.
אם למלך ג'ורג' היו 60 כובעים, והוא חילק אותם בין 30 פקידיו,
הרי שכל פקיד קיבל 2 כובעים $(=60:30)$.
לכל פקיד של המלך ארתור 10 כובעים ואילו לכל פקיד של המלך ג'ורג' 2 כובעים.

גם במצב בו לכל מלך היו 60 כובעים, כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 יותר כובעים מכל פקיד של המלך ג'ורג'. גם אפשרות זו מקיימת את נתוני השאלה.

מכיוון שמצאנו כי שתיים מהתשובות שבדקנו מקיימות את נתוני השאלה, הרי שלא ניתן לדעת כמה כובעים היו לכל אחד מהמלכים.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה
למלך ארתור ולמלך ג'ורג' היו כובעים באותה כמות, נסמן כמות זו ב-x.

המלך ארתור חילק את כובעיו שווה בשווה בין 6 פקידיו, כלומר כל פקיד של המלך ארתור קיבל $\frac{x}{6}$ כובעים.

המלך ג'ורג' חילק את כובעיו שווה בשווה בין 30 פקידיו, כלומר כל פקיד של המלך ג'ורג קיבל $\frac{x}{30}$ כובעים.

כל פקיד של המלך ארתור קיבל פי 5 כובעים יותר מכל פקיד של המלך ג'ורג', כלומר אם נכפול ב-5 את מספר הכובעים שקיבל כל פקיד של המלך ארתור נקבל את מספר הכובעים שקיבל כל פקיד של המלך ג'ורג:

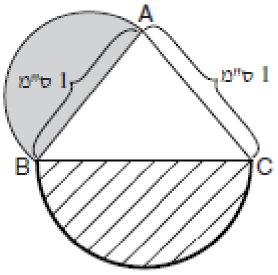
$$\frac{x}{6}=\cancel{5}^{1}\cdot\frac{x}{\cancel{30}_{6}} \Leftarrow \frac{x}{6}=\frac{x}{6}.$$

מכיוון שקיבלנו משוואה המתקיימת עבור כל x, הרי שהתשובה היא כי לא ניתן לדעת מה ערכו של x.

תשובה (1).

.20 **השאלה**: ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$.

על שתיים מצלעות המשולש נבנו חצאי מעגלים כבסרטוט.



נתון: השטח המקווקו גדול פי 2 מהשטח הכהה.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה אורך הקשת המודגשת BC (בס"מ)?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: מעבר בין יחס שטחים ליחס קווים:

על מנת למצוא את אורך הקשת המודגשת BC עלינו לחשב את מחצית היקף המעגל הגדול בעזרת הנוסחה לחישוב היקף המעגל $(\pi \cdot 2r)$.

כלומר, עלינו ראשית למצוא את אורך <u>הרדיוס</u> של מחצית המעגל הגדול (השטח המקווקו).

לפי הנתון, השטח המקווקו גדול פי 2 מהשטח הכהה. אם כן, יחס השטחים הוא 2:1. בעזרת יחס השטחים, נוכל למצוא את יחס הקווים בין המעגלים, ובעזרתו למצוא את אורך רדיוס מחצית המעגל הגדול.

$$\text{יחסהשטחים} = (\text{יחס קווי})^2$$

היות ונתון כי יחס השטחים הוא 2:1, נוציא שורש ליחס זה ונקבל כי ה"יחס הקווי" הוא $\sqrt{2}:1$.

אורכו של <u>קוטר</u> המעגל הקטן הוא 1 ס"מ.

הרי שקוטר המעגל הגדול גדול פי $\sqrt{2}$, כלומר שווה ל- $\sqrt{2}$ ס"מ.

משמצאנו את אורכן של קוטר המעגל הגדול, נוכל לחשב את אורך הקשת BC, שהיא מחצית מהיקף המעגל הגדול. היקף מעגל שווה למכפלת הקוטר ב-π, ומכאן שהיקף המעגל הגדול שווה ל- $\sqrt{2} \cdot \pi$,

ואורך הקשת BC שהיא מחצית מהיקף המשולש הגדול שווה ל- $\frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2} \Leftarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

<u>דרך ב'</u>: יצירת משוואה בעזרת נוסחה לחישוב שטח מעגל.

על מנת למצוא את אורך הקשת המודגשת BC עלינו לחשב את מחצית היקף המעגל הגדול בעזרת הנוסחה לחישוב היקף מעגל $(\pi \cdot 2r)$

כלומר, ראשית עלינו למצוא את אורך <u>הקוטר</u> של מחצית המעגל הגדול (השטח המקווקו).

הנתון היחיד אשר נוגע לשטח המקווקו הוא ששטח זה גדול פי 2 מהשטח הכהה (מחצית המעגל הקטן).
בסרטוט נתון לגבי אורך הצלע עליה נבנה המעגל <u>הקטן</u> ולכן נתחיל מחישוב שטח זה.

אם הצלע AB היא קוטר המעגל הקטן, ואורכה 1 ס"מ, הרי שאורך הרדיוס הוא מחצית מהקוטר, כלומר $r = \frac{1}{2}$.

כעת נחשב את שטח המעגל הקטן. נוסחת שטח מעגל היא: $r^2 \cdot \pi$, ומכאן ששטח המעגל הקטן הוא $\frac{\pi}{4}$ $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi =\right)$, ושטח מחצית המעגל הוא $\frac{\pi}{8}$ $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{8} =\right)$.

לפי הנתון, השטח המקווקו גדול מהשטח הכהה פי 2, כלומר השטח המקווקו שווה ל- $\frac{\pi}{4}$ $\left(2 \cdot \frac{\pi}{8} =\right)$.

נסמן את רדיוס המעגל הגדול ב-R. שטח מחצית המעגל הגדול שווה ל- $\frac{\pi}{4}$, כלומר:

$\frac{1}{2}\cdot\pi R^2=\frac{\pi}{4}$. נכפול ב-4 ונחלק ב-π את שני האגפים, ונקבל: $2R^2=1$ ⇦ $R^2=\frac{1}{2}$ כעת "נוציא" שורש למשוואה כולה ונקבל $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

משמצאנו את אורך רדיוס המעגל הגדול, נוכל לחשב את אורך הקשת BC, שהוא מחצית היקף המעגל הגדול: $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot R\cdot\pi$

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot R\cdot\pi$ ⇦ $\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\cancel{2}^1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\pi$ ⇦ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ס"מ.

תשובה (1).
