

מפתח תשובות נכונות

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	שאלה
(2)	(2)	(1)	(3)	(4)	(1)	(2)	(1)	(2)	(2)	תשובה

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	שאלה
(3)	(4)	(4)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(4)	(3)	תשובה

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-9)

1. **השאלה:** לאיזה מן המספרים הבאים מספר המחלקים השונים הגדול ביותר?
פיתרון: עלינו להשוות בין התשובות ולמצוא למי מהן מספר המחלקים השונים הגדול ביותר. כל מספר מתחלק בעצמו וב-1, עלינו לבדוק מיהם הגורמים הנוספים שבהם מתחלק כל אחד מן המספרים שבתשובות (גורמים אלו הם המספרים הראשוניים המרכיבים אותם).
תשובה (1): 17. היות ו-17 הוא מספר ראשוני הרי שהוא לא מתחלק לאף מספר מלבד ל-1 ול-17.
תשובה (2): 42. המספר 42 מתפרק למכפלת המספרים הראשוניים הבאים: $2 \cdot 3 \cdot 7$. מכאן שהמספר 42 מתחלק מלבד לעצמו ול-1, ל-2 ול-21, ל-3 ול-14, ל-6 ול-7. סך הכול מצאנו כי ל-42 ישנם 8 מחלקים.
תשובה (3): 57. המספר 57 מתפרק למכפלת המספרים הראשוניים הבאים: $3 \cdot 19$. מכאן שהמספר 57 מתחלק בעצמו וב-1, ב-3 וב-19. בסך הכול ל-57 ישנם 4 מחלקים שונים.
תשובה (4): 95. המספר 95 מתפרק למכפלת המספרים הראשוניים הבאים: $5 \cdot 19$. מכאן שהמספר 95 מתחלק בעצמו וב-1, ב-5 וב-19. בסך הכול ל-95 ישנם 4 מחלקים שונים.
 מצאנו כי המספר 42 הוא בעל מספר המחלקים השונים הגדול ביותר.
תשובה (2).

2. **השאלה:** לכל a ו- b המקיימים $0 \leq b \leq a$ הוגדרה הפעולה \$ כך:

$$$(a, b) = \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

$$\frac{$(81, 16)}{$(36, 25)} = ?$$$

פיתרון: מכיוון שנתון ביטוי (שבר) שעלינו לפתור בעזרת השימוש בפעולה $ עלינו להציב את המספרים בכל פעולה מומצאת, תחילה במונה ואחר כך במכנה.
 הפעולה $ במונה: $$(81, 16) = \sqrt{\sqrt{81} - \sqrt{16}} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$
 הפעולה $ במכנה: $$(36, 25) = \sqrt{\sqrt{36} - \sqrt{25}} = \sqrt{6 - 5} = \sqrt{1} = 1$
 כעת נציב את התוצאות במונה ובמכנה של הביטוי עליו נשאלנו, ונקבל כי הביטוי שווה ל- $\sqrt{5}$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}\right)$
תשובה (2).$$$

3. **השאלה:** חמש מכוניות עומדות זו אחר זו. הרווח בין כל שתי מכוניות סמוכות הוא 10 מטרים, ואורך כל אחת מהן הוא לכל הפחות 2 מטרים ולכל היותר 4 מטרים.

מה לא יכול להיות המרחק (במטרים) מקדמת המכונית הראשונה ועד אחורי המכונית האחרונה?

פיתרון: מכיוון שבנתוני השאלה נתון אורך מינימלי ("לכל הפחות") ואורך מקסימלי ("לכל היותר") של כל מכונית נבדוק את המרחק הגדול והקטן ביותר בין קדמת המכונית הראשונה ואחורי המכונית האחרונה. מומלץ להיעזר בסרטוט על מנת לפתור את השאלה.

ראשית - ניתן לראות שבין 5 מכוניות קיימים 4 מרווחים. נתון כי כל אורכו של כל מרווח הוא 10 מטרים ולכן המרווח הכולל בין כל המכוניות הוא 40 מטרים.

כעת נבדוק את אורכן של המכוניות. מכיוון שנתון כי אורך המכוניות נע בין 2 מטר ל-4 מטרים, הרי שעלינו לבדוק את מינימום ומקסימום אורך המכוניות הכולל.

נתחיל מהאורך הקצר ביותר האפשרי שהוא 2 מטרים.

מכיוון שיש 5 מכוניות, הרי שאורכן המינימלי של כל 5 המכוניות הוא 10 מטרים ($5 \cdot 2 =$).

במצב זה המרחק בין קדמת המכונית הראשונה לאחורי המכונית האחרונה הוא 50 מטרים ($10 + 40 =$).

מכיוון שלא יכול להיות מרחק הקטן מ-50 מטרים, הרי שהתשובה הנכונה היא תשובה (1).

תשובה (1).

4. **השאלה:** באיזה מן המרובעים הבאים האלכסונים לא בהכרח מאונכים זה לזה?

פיתרון: המרובעים היחידים בהם האלכסונים מאונכים זה לזה הם מעוין, דלתון וריבוע (מעדר). במלבן האלכסונים אינם בהכרח מאונכים זה לזה.

שימו לב - במידה ולא זוכרים את הכלל לגבי המרובעים שאלכסוניהם מאונכים זה לזה ניתן לצייר כל אחד מהמרובעים הנתונים ולבדוק במי מהם האלכסונים מאונכים.

תשובה (2).

5. **השאלה:** כמה פתרונות אפשריים יש למשוואה $10x = x$?

פיתרון: נפשט את המשוואה. מכיוון שאין כל מידע לגבי ערכו של x , הרי שערכו של x יכול להיות שווה ל-0, ולפיכך אסור לחלק את המשוואה ב- x .

נחסר x משני האגפים, ונקבל: $9x = 0$.

כעת נחלק את המשוואה ב-9, ונקבל: $x = 0$.

מצאנו כי הערך היחיד המקיים את המשוואה הוא $x = 0$. כלומר למשוואה יש פיתרון אחד בלבד.

תשובה (1).

6. **השאלה:** במשולש מסוים אורך הצלע הקצרה הוא 1 ס"מ, ואורך הצלע הארוכה הוא 4 ס"מ. מה יכול להיות אורך הצלע הבינונית במשולש זה (בס"מ)?

פיתרון: במשולש אורכה של כל צלע חייב להיות קטן מסכום אורכי שתי הצלעות האחרות וגדול מהפרש ביניהן. בשאלה נתונים אורכי הצלע הקטנה ביותר והצלע הגדולה ביותר במשולש מסוים, ומכאן שלפי המשפט אורכה של הצלע הבינונית הוא בין 5 ל-3. מכיוון שנתון כי הצלע המבוקשת היא הצלע הבינונית במשולש, הרי שאורכה של הצלע חייב להיות קטן מאורך הצלע הארוכה במשולש, כלומר קטן מ-4 ס"מ. הערך היחיד בתשובות שיכול לייצג את אורך הצלע הבינונית הוא 3.5.

תשובה (4).

7. **השאלה:** מספר הבנים בכיתה הוא 12, והם מהווים בין 30% ל-60% מכל ילדי הכיתה. כמה בנות, לכל היותר, יש בכיתה?

פיתרון: מספר הבנים בכיתה הוא 12, אך חלקם היחסי מתוך כלל תלמידי הכיתה אינו ידוע, פרט לעובדה שהם מהווים בין 30% ל-60% מכלל ילדי הכיתה. מכיוון שנשאלנו כמה בנות, לכל היותר, יש בכיתה, הרי שעלינו למצוא מה מספר הבנות בכיתה כאשר אחוז הבנים בכיתה הוא הנמוך ביותר, שכן בדרך זו חלקן היחסי של הבנות מתוך כלל תלמידי הכיתה יהיה הגדול ביותר.

הבנים והבנות, ביחד, מהווים 100% מילדי הכיתה. נבדוק כמה בנות יש בכיתה במידה ו-12 הבנים מהווים בדיוק 30%.

אם 12 בנים מהווים 30% מילדי הכיתה, הרי ש-10% מילדי הכיתה הם 4 ילדים $\left(\frac{12}{3} = 4\right)$. מכאן שאם הבנות מהוות 70% מילדים הכיתה, הרי שמספרן הוא $(4 \cdot 7 = 28)$.

מצאנו כי כאשר 12 הבנים שבכיתה מהווים 30% מסך תלמידי הכיתה, מספרן של בנות הכיתה הוא 28.

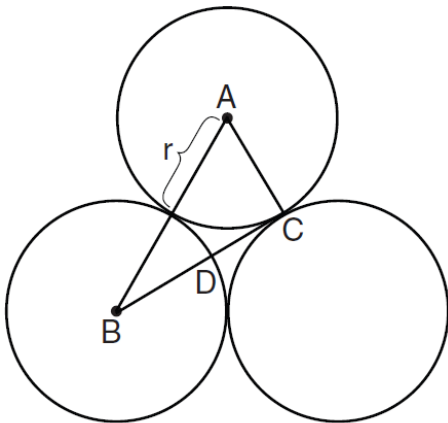
תשובה (3).

8. **השאלה:** שלושת המעגלים שבסרטוט חופפים, וכל אחד מהם משיק לשניים האחרים.

A ו-B הם מרכזי שניים מן המעגלים. C היא נקודת השקה. D היא נקודת החיתוך של BC עם המעגל שמרכזו B.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,

$CD = ?$



פיתרון: מכיוון שנתון כי שלושת המעגלים שבסרטוט חופפים, ורדיוס המעגל שמרכזו A מסומן ב-r, הרי שאנו יכולים לסמן את כל הקטעים המהווים רדיוס באחד המעגלים ב-r, כלומר את הקטעים AC, BD, ואת הרדיוס היוצא ממרכז המעגל שמרכזו B ומהווה חלק מהצלע AB.

נתבקשנו למצוא את אורך הקטע CD.

הקטע CD מהווה חלק מצלע המשולש BC. על מנת למצוא את אורכו עלינו לחסר מאורך הצלע BC את אורך הקטע BD המסומן ב-r.

נתבונן במשולש ABC:

ראשית, רדיוס לנקודת ההשקה יוצר זווית של 90° עם המשיק, ולפיכך הרדיוס AC יוצר זווית של 90° עם הצלע BC. כלומר משולש ABC הוא משולש ישר זווית.

כעת נבדוק מה נוכל להסיק לגבי אורכי הצלעות במשולש ישר זווית זה. יתר המשולש, הצלע AB מורכבת משני רדיוסים, ולכן אורכה שווה ל- $2r$.

פברואר 2014 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

הניצב AC הוא רדיוס המעגל שמרכזו בנקודה A, ולכן אורכו שווה ל- r . לפנינו משולש ישר זווית שבו היתר גדול פי 2 מאורך אחד הניצבים ולכן ניתן להסיק שמדובר במשולש זהב, בו יחס הצלעות הוא $2 : \sqrt{3} : 1$. אם אורכו של AC (הניצב הקטן) הוא r , הרי שאורכו של BC (הניצב הגדול) גדול פי $\sqrt{3}$ ולכן שווה ל- $r\sqrt{3}$. אורכו של הקטע CD שווה לאורך הצלע BC פחות הקטע BD, כלומר לביטוי $r\sqrt{3} - r$. היות והביטוי אינו מופיע בתשובות, נוציא גורם משותף r ונקבל $r(\sqrt{3}-1)$.

תשובה (1).

הסקה מתרשים (שאלות 9-13)

עיינו היטב בטבלאות שלפניכם, וענו על חמש השאלות שאחריהן.

בתחרות זמר השתתפו שישה מתמודדים: אורית, בועז, גלית, ליאור, מיכל ונילי. כל אחד מן המתמודדים הופיע לפני חמשת שופטי התחרות (השופטים **א, ב, ג, ד, ה**). כל שופט בתורו (משופט **א** עד שופט **ה**) דירג את המתמודדים מהמקום הראשון עד למקום השישי. כל מקום זיכה את המתמודד בנקודות (לפי הרשום בטבלה 1). בטבלה 2 מוצג הניקוד המצטבר של כל מתמודד **לאחר** שדירג אותו כל אחד מארבעת השופטים **א-ד**. **הניקוד המצטבר לאחר הדירוג של שופט ה אינו מופיע בטבלה.**

הניקוד הסופי של כל מתמודד היה הניקוד המצטבר לאחר שדירגו אותו כל חמשת השופטים **א-ה**. המנצח בתחרות היה מי שקיבל את הניקוד הסופי הגבוה ביותר. אם כמה מתמודדים השיגו אותו ניקוד סופי, שהיה גם הגבוה ביותר, הוכרזו כמה מנצחים.

לדוגמה: שופט **ג** דירג את נילי במקום השלישי, ולפיכך הוענקו לה 3 נקודות. הניקוד המצטבר שלה עלה מ-6 ל-9.

טבלה 1: מספר הנקודות שמזכה כל מקום בדירוג

מספר נקודות	דירוג
10	מקום ראשון
6	מקום שני
3	מקום שלישי
1	מקום רביעי
0	מקום חמישי
0	מקום שישי

טבלה 2: הניקוד המצטבר של כל מתמודד בתחרות

	אורית	בועז	גלית	ליאור	מיכל	נילי
לאחר הדירוג של שופט א	0	3	10	6	1	0
לאחר הדירוג של שופט ב	0	3	11	16	4	6
לאחר הדירוג של שופט ג	6	4	11	26	4	9
לאחר הדירוג של שופט ד	9	4	17	27	4	19
לאחר הדירוג של שופט ה	?	?	?	?	?	?

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

9.

השאלה: שופט ___ ושופט ___ דירגו במקום הראשון את אותו מתמודד.

פיתרון: לפנינו שתי טבלאות; טבלה 1 מציינת כמה נקודות מקבלים המתמודדים בעבור כל דירוג של השופטים. טבלה 2 מציינת את הניקוד המצטבר של כל מתמודד. כאשר שופט מדרג מתמודד מסוים במקום הראשון, מקבל אותו מתמודד 10 נקודות. על מנת למצוא מי מהמתמודדים דורג במקום הראשון על ידי שני שופטים, נחפש בטבלה 2 מתמודד שהניקוד המצטבר שלו עלה לפחות פעמיים ב-10 נקודות. על פי התרשים סכום הנקודות של ליאור אשר היה בעל ניקוד של 6 נקודות לאחר דירוגו של שופט א', היה בעל ניקוד מצטבר של 16 נקודות לאחר דירוגו של שופט ב', כלומר זכה לדירוג של מקום ראשון על ידי שופט ב'. היות וסכום הנקודות של ליאור עלה לאחר דירוגו של שופט ג' מ-16 נקודות ל-26 נקודות, הרי שליאור זכה לדירוג במקום הראשון גם על ידי שופט ג'.

תשובה (2).

10.

השאלה: באיזה מקום דירג את גלית שופט ד'?

פיתרון: על מנת לגלות באיזה מקום דירג שופט ד' את גלית, עלינו לבדוק ראשית מה מספר הנקודות שקיבלה גלית משופט זה. הניקוד המצטבר של גלית לאחר הדירוג של שופט ג' היה 11 נקודות, והניקוד המצטבר שלה לאחר הדירוג של שופט ד' היה 17 נקודות, ומכאן שגלית קיבלה משופט ד' 6 נקודות ($17 - 11 = 6$). לפי טבלה מספר 1, מי שמדורג במקום השני הוא שזוכה ל-6 נקודות, ולפיכך שופט ד' דירג את גלית במקום השני.

תשובה (2).

11.

השאלה: מתי בפעם הראשונה היה אפשר לדעת שבועז לא ינצח?

פיתרון: על מנת שבועז יידע כי הוא אינו יכול לזכות במקום הראשון עליו להיות במצב שבו גם אם הוא זוכה במספר הנקודות המקסימלי אין ביכולתו לעבור את מי שנמצא במקום הראשון באותו רגע.

תשובה (1): לאחר הדירוג של שופט א'.

לאחר הדירוג של שופט א' היו לבועז 3 נקודות ולליאור שבמקום הראשון 10 נקודות. הפער בין בועז לליאור שבמקום הראשון הוא 7 נקודות ($10 - 3 = 7$). מכיוון שיש עוד 4 שופטים אשר צריכים לדרג את המתמודדים, הרי שבשלב זה בועז יכול לקבל לכל היותר 40 נקודות משופטים אלו (אם כולם ידרגו אותו במקום הראשון) ולכן הוא יכול עדיין בשלב זה, באופן תיאורטי, לנצח את התחרות.

תשובה (2): לאחר הדירוג של שופט ב'.

לאחר הדירוג של שופט ב' היו לבועז 3 נקודות ולליאור שבמקום הראשון 16 נקודות. הפער בין בועז לליאור שבמקום הראשון הוא 13 נקודות ($16 - 3 = 13$). מכיוון שיש עוד 3 שופטים אשר צריכים לדרג את המתמודדים, הרי שבשלב זה בועז יכול לקבל לכל היותר 30 נקודות משופטים אלו (אם כולם ידרגו אותו במקום הראשון), ומכאן שהוא יכול עדיין, באופן תיאורטי, לנצח את התחרות.

תשובה (3): לאחר הדירוג של שופט ג'.

לאחר הדירוג של שופט ג' היו לבועז 4 נקודות ולליאור שבמקום הראשון 26 נקודות. הפער בין בועז לליאור שבמקום הראשון הוא 22 נקודות ($26 - 4 = 22$). מכיוון שיש עוד 2 שופטים אשר צריכים לדרג את המתמודדים, הרי שבשלב זה בועז יכול לקבל לכל היותר 20 נקודות (אם כולם ידרגו אותו במקום הראשון), ולכן לאחר שלב זה בועז יכול לדעת בוודאות שהוא אינו יכול לנצח את התחרות. זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

12. **השאלה:** איזה מתמודד דורג בוודאות במקום השישי על ידי שופט ג'?

פיתרון: על פי טבלה מס' 2 מתמודד שמדורג במקום השישי מקבל 0 נקודות. מכיוון שגם המתמודד שמדורג במקום החמישי מקבל 0 נקודות, הרי שלמרות שניתן לראות בטבלה מס' 1 כי גם גלית וגם מיכל קיבלו משופט ג' 0 נקודות, לא ניתן לומר בוודאות מי מהן דורגה על ידי השופט במקום החמישי ומי דורגה במקום השישי.

תשובה (4).

13. **השאלה:** מה היה ממוצע הניקוד הסופי של ששת המתמודדים בתום התחרות (לאחר הדירוג של שופט ה')?

פיתרון: נוסחת הממוצע: $\frac{\text{סכום כל הנקודות}}{\text{מספרהאיברים}} = \text{הממוצע}$

על מנת לחשב את ממוצע הניקוד הסופי של ששת המתמודדים עלינו לחשב את סכום הנקודות שצברו כל המתמודדים ואז לחלק אותו במספר המתמודדים.

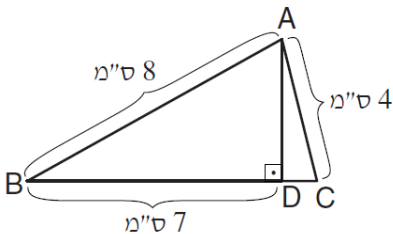
איננו יודעים על פי טבלה 2 כיצד חילק שופט ה' את הנקודות בין המתמודדים, אולם אם נתבונן בטבלה מס' 1, נראה שכל שופט מעניק למתמודדים את הנקודות הבאות לפי דירוגם: 10 נקודות, 6 נקודות, 3 נקודות, נקודה אחת בלבד ו-0 נקודות. כלומר, כל שופט מחלק בין המתמודדים בסך הכול 20 נקודות $(1+3+6+10)$, ומכאן שסכום הנקודות שקיבלו המתמודדים מכלל חמשת השופטים שווה בהכרח ל- $100 = (5 \cdot 20)$

כעת, כשיש בידינו את סכום הנקודות שחולקו לכל ששת המועמדים נוכל לחשב את ממוצע הניקוד של

$$\frac{100}{6} = \frac{50}{3} = \frac{48}{3} + \frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$$

תשובה (2).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)



14. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם משולש ABC, AD הוא גובה לצלע BC. לפי הנתונים שבסרטוט, מה אורכה של הצלע BC (בס"מ)?

פיתרון: בסרטוט נתון משולש ABC אשר איננו יודעים את אורך צלעו BC. נביט במשולש אשר לגביו ידועים הנתונים הרבים ביותר: משולש ABD.

במשולש זה נתונה זווית בת 90° - הזווית ADB, ונתונים אורכי הצלעות AB ו-AD. נחשב את אורכה של צלע AD בעזרת נוסחת פיתגורס:

$$49 + (AD)^2 = 64 \Leftrightarrow 7^2 + (AD)^2 = 8^2$$

נחסר 49 משני האגפים, ונקבל: $(AD)^2 = 64 - 49 = 15$.

נוציא שורש משני האגפים, ונקבל: $AD = \sqrt{15}$.

כעת נעבור למשולש ADC, מכיוון שאנו יודעים את אורכן של שתיים מצלעותיו, נוכל לחשב את

$$15 + (DC)^2 = 16 \Leftrightarrow (\sqrt{15})^2 + (DC)^2 = 4^2$$

נחסר 15 משני האגפים, ונקבל: $(AD)^2 = 16 - 15 = 1$

נוציא שורש משני האגפים, ונקבל: $AD = 1$

אם אורכה של הצלע DC הוא 1 ס"מ, הרי שאורכה של הצלע BC הוא 8 ס"מ $(7 + 1 = 8)$

תשובה (1).

15.

השאלה: בשק א' יש 10 כדורים: 5 אדומים ו-5 כחולים.

בשק ב' יש 8 כדורים: 2 אדומים ו-6 כחולים.

יעל בוחרת באקראי את אחד השקים, ומוציאה באקראי כדור אחד מן השק שבחרה.

מה ההסתברות שהכדור אדום?

פיתרון: על מנת שנוכל לחשב את ההסתברות שיעל תוציא כדור אדום, עלינו להבין מה ברצוננו שיקרה.

אנו רוצים שיעל תוציא כדור אדום משק כלשהו.

יעל יכולה לבחור את שק א' ולהוציא ממנו כדור אדום **או** לבחור את שק ב' ולהוציא ממנו כדור אדום.

נחשב את ההסתברות להוצאת כדור אדום בכל אחד מן המקרים ונחבר ביניהם.

ההסתברות להוציא כדור אדום משק א' = ההסתברות שיעל תבחר באקראי בשק א' **וגם** תוציא ממנו כדור אדום.

שק א' הוא שק אחד מתוך שני השקים האפשריים, ולכן הסיכוי שיעל תבחר בשק א' הוא $\frac{1}{2}$.

בשק א' 5 כדורים אדומים ו-5 כדורים כחולים, ולכן הסיכוי שיעל תוציא כדור אדום משק א' הוא $\frac{5}{10}$.

ההסתברות שיעל תבחר בשק א' **וגם** תוציא ממנו כדור אדום שווה למכפלת ההסתברויות להתרחשותו של כל אחד

$$\text{מן ה'מאורעות', כלומר ל-} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} \right)$$

ההסתברות להוציא כדור אדום משק ב' = ההסתברות שיעל תבחר באקראי בשק ב' **וגם** תוציא ממנו כדור אדום.

שק ב' הוא שק אחד מתוך שני השקים האפשריים, ולכן הסיכוי שיעל תבחר בשק ב' הוא $\frac{1}{2}$.

בשק ב' 2 כדורים אדומים ו-6 כדורים כחולים, ולכן הסיכוי שיעל תוציא כדור אדום משק ב' הוא $\frac{2}{8}$.

ההסתברות שיעל תבחר בשק ב' **וגם** תוציא ממנו כדור אדום שווה למכפלת ההסתברויות להתרחשותו של כל אחד

$$\text{מן ה'מאורעות', כלומר ל-} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} \right)$$

הסיכוי שיעל תוציא כדור אדום משק א' **או** כדור אדום משק ב' שווה לחיבור ההסתברויות להתרחשותם

$$\text{של שני המאורעות, כלומר שווה ל-} \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)$$

תשובה (3).

16. השאלה: $\left(\frac{2^{2a}}{2^x}\right)^x = 2^{(a^2)}$

x בהכרח שווה ל-

פיתרון: ראשית נפשט את המשוואה בעזרת חוקי החזקות, במטרה להגיע לבסיסים זהים בשני אגפי המשוואה.

$$2^{x \cdot (2a-x)} = 2^{(a^2)} \Leftrightarrow (2^{2a-x})^x = 2^{(a^2)} \Leftrightarrow \left(\frac{2^{2a}}{2^x}\right)^x = 2^{(a^2)}$$

כעת, אחרי שהצלחנו להביא את שני אגפי המשוואה למצב בו בסיסי החזקות הם זהים, נוכל לפתור את המשוואה בעזרת השוואת המעריכים בלבד.

$$x \cdot (2a - x) = a^2$$

שימו לב- אנו מחפשים למה x שווה בהכרח, בשלב זה ניתן להמשיך ולפתור את השאלה בעזרת אלגברה או להיעזר בהצבת התשובות.

דרך א': אלגברה

נפשט את הביטוי באמצעות פתיחת סוגריים:

$$2ax - x^2 = a^2 \Leftrightarrow x \cdot (2a - x) = a^2$$

נחבר x^2 ונחסר $2ax$ משני האגפים, ונקבל: $0 = a^2 - 2ax + x^2$.

לפי נוסחת הכפל המקוצר השנייה, הביטוי שקיבלנו בצד ימין של המשוואה, שקול ל- $(a - x)^2$, ולכן

$$0 = (a - x)^2$$

על מנת שהביטוי $(a - x)^2$ יהיה שווה ל-0, הביטוי $(a - x)$ צריך להיות שווה ל-0, כלומר: $a = x$.

תשובה (1): 2. נציב $x = 2$ במשוואה שקיבלנו, ונקבל:

$$4a - 4 = a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot (2a - 2) = a^2$$

האם משוואה זו מתקיימת בעבור כל a? מכיוון שהתשובה שלילית יש להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (2): a. נציב $x = a$ במשוואה שקיבלנו, ונקבל:

$$a^2 = a^2 \Leftrightarrow a \cdot (a) = a^2 \Leftrightarrow a \cdot (2a - a) = a^2 \Leftrightarrow 2 \cdot (2a - 2) = a^2$$

מכיוון שהמשוואה שקיבלנו מתקיימת עבור כל a, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

17. **השאלה:** במפעל מסוים כל אדם מחזיק כרטיסים מ-3 סוגים: כרטיס עובד, כרטיס אשראי וכרטיס

סטודנט, לכל היותר כרטיס אחד מכל סוג.

ל-10 אנשים במפעל יש סך הכל 25 כרטיסים.

כמה מתוכם, לכל הפחות, מחזיקים בכל 3 סוגי הכרטיסים?

פיתרון: בדיקת תשובות

נתחיל מהצבת התשובה בעלת הערך הקטן ביותר;

תשובה (3): 3. אם רק 3 אנשים במפעל מחזיקים בשלושה סוגי כרטיסים, הרי שביחד לאותם 3 אנשים יש 9 כרטיסים ($3 \cdot 3 =$).

כעת נותרו 7 אנשים, אשר צריכים להחזיק ב-16 כרטיסים על מנת להגיע לסכום כרטיסים כולל של 25 ($25 - 9 =$). מכיוון שכל אחד מאותם 7 אנשים אינו יכול להחזיק ב-3 כרטיסים, הרי שיש ברשות כל

אחד מהם לכל היותר 2 כרטיסים, ובסך הכול 14 כרטיסים ($7 \cdot 2 =$). מכאן שלא יתכן שישנם רק 3

אנשים שברשותם 3 כרטיסים.

פברואר 2014 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

תשובה (4): 4. אם רק 4 אנשים במפעל מחזיקים בשלושה סוגי כרטיסים, הרי שביחד לאותם 4 אנשים יש 12 כרטיסים ($4 \cdot 3 =$).

כעת נותרו 6 אנשים, אשר צריכים להחזיק ב-13 כרטיסים על מנת להגיע לסכום כרטיסים כולל של 25 ($25 - 12 =$). מכיוון שכל אחד מאותם 6 אנשים אינו יכול להחזיק ב-3 כרטיסים, הרי שיש ברשות כל אחד מהם לכל היותר 2 כרטיסים, ובסך הכול לכל היותר 12 כרטיסים ($6 \cdot 2 =$). מכאן שלא יתכן שישנם רק 4 אנשים שברשותם 3 כרטיסים.

תשובה (1): 5. אם רק 5 אנשים במפעל מחזיקים בשלושה סוגי כרטיסים, הרי שביחד לאותם 5 אנשים יש 15 כרטיסים ($5 \cdot 3 =$).

כעת נותרו 5 אנשים, אשר צריכים להחזיק ב-10 כרטיסים על מנת להגיע לסכום כרטיסים כולל של 25 ($25 - 15 =$). מכיוון שכל אחד מאותם 5 אנשים אינו יכול להחזיק ב-3 כרטיסים, הרי שיש ברשות כל אחד מהם לכל היותר 2 כרטיסים, ובסך הכול יכול להיות שיהיו ברשותם 10 כרטיסים ($5 \cdot 2 =$). מצאנו כי לכל הפחות 5 מהאנשים במפעל מחזיקים בכל 3 סוגי הכרטיסים.

תשובה (1).

18. השאלה: הממוצע של a ו- b קטן מ-0.

איזה מן האפשרויות הבאות בהכרח **אינה** נכונה?

פיתרון: הצבת תשובות. מכיוון שאנו מחפשים את האפשרות שבהכרח **אינה** נכונה, מספיק שנמצא עבור תשובה מסוימת דוגמה שיכולה להתקיים, על מנת לפסול אותה.

תשובה (1): $a \cdot b > 0$

לפי נתוני השאלה הממוצע של a ו- b הוא שלילי. אם מכפלתם של a ו- b היא חיובית, הרי שיתכן כי שני המספרים שליליים, לדוגמה $a = -1$ ו- $b = -1$. מכפלה של שני מספרים שליליים נותנת תוצאה חיובית, והממוצע שלהם קטן מ-0, ולכן אפשרות זו יכולה להיות נכונה.

תשובה (2): $a \cdot b = 0$

לפי נתוני השאלה הממוצע של a ו- b הוא שלילי. אם מכפלתם של a ו- b היא חיובית הרי שאחד מהם לפחות חייב להיות שווה ל-0. במידה ואחד מהמשתנים הוא שלילי והשני שווה ל-0, הרי שהממוצע שלהם יהיה שלילי, ומכפלתם תהיה שווה ל-0. לדוגמה $a = -2$ ו- $b = 0$, ולפיכך אפשרות זו יכולה להתאים להיות נכונה.

תשובה (3): $a \cdot b < 0$

לפי נתוני השאלה הממוצע של a ו- b הוא שלילי. אם מכפלתם של a ו- b היא שלילית, הרי שאחד מהם צריך להיות חיובי והשני שלילי. האם ייתכן מצב שבו הממוצע של מספר חיובי ומספר שלילי יהיה שלילי? כן, אם מרחקו מהאפס של המספר הקטן לכיוון השלילי גדול ממרחקו של המספר הגדול מהאפס לכיוון החיובי. לדוגמה $a = 1$, $b = -3$.

מצאנו כי שלושת התשובות שבדקנו יכולות להתקיים עם הנתונים ולכן ניתן לבחור את תשובה מס' 4.

תשובה (4): $|a| = b$

מתשובה זו עולה כי b חייב להיות חיובי. כדי שהממוצע של a ו- b יהיה שלילי a חייב להיות שלילי. אם הערך המוחלט של a שווה ל- b , עליהם להיות מספרים נגדיים. למשל $a = 1$ ו- $b = -1$, אולם במקרה כזה הממוצע של שני המספרים יהיה שווה בהכרח ל-0, כלומר אינו שלילי כפי שקובעים נתוני השאלה. זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

19. **השאלה:** שלושה פועלים עובדים באותו הקצב ומסיימים בניית קיר ב-3 שעות. אם יצטרף אליהם פועל רביעי (שקצב עבודתו אחר) הם יסיימו את בניית הקיר בשעתיים.

בכמה שעות יבנה הפועל הרביעי לבדו את הקיר?

פיתרון: דרך א': פועלים שונים

מכיוון שמדובר בשאלת פועלים העוסקת בפועלים בעלי הספקים שונים, 'נביא' את כולם לאותה יחידת זמן.

מכיוון שהזמנים הנתונים בשאלה הם 3 שעות ו-2 שעות, 'נביא' את כולם ל-6 שעות. נתון כי 3 פועלים מסיימים לבנות את הקיר ב-3 שעות, ומכאן שב-6 שעות, כלומר בזמן הגדול פי 2, הפועלים יעשו כמות עבודה הגדולה פי 2, כלומר יסיימו לבנות 2 קירות. כאשר הפועלים בונים את הקיר יחד עם הפועל הרביעי הם בונים את הקיר בשעתיים, ולכן ב-6 שעות, כלומר בזמן הגדול פי 3, הפועלים יעשו כמות עבודה הגדולה פי 3, כלומר יבנו 3 קירות. אם ידוע שכאשר 3 הפועלים עובדים ללא הפועל הרביעי, הם מספיקים לבנות ב-6 שעות 2 קירות, ויחד עם הפועל הרביעי הם בונים 3 קירות, הרי שיתרומתו של הפועל הרביעי ב-6 שעות היא קיר אחד.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נתון כי קצב עבודתם של 3 הפועלים זהה, אולם לא ידוע מה הם עושים. לשם הנוחות נניח כי כל אחד מן הפועלים מניח לבנה אחת כל שעה, ולכן 3 הפועלים יחדיו מניחים 3 לבנים בשעה. מאחר שנתון כי 3 הפועלים מסיימים לבנות את הקיר ב-3 שעות, הרי שהקיר כולו בנוי מ-9 לבנים ($3 \cdot 3 = 9$). ידוע כי כאשר הפועלים בונים את הקיר יחד עם הפועל הרביעי הם בונים את הקיר בשעתיים. מכיוון שאנו יודעים כי 3 הפועלים מניחים יחדיו 3 לבנים בשעה, הרי שבשעתיים הם מניחים 6 לבנים ($2 \cdot 3 = 6$). מכאן שאם הקיר מורכב מ-9 לבנים, הרי שהפועל הרביעי מניח 3 לבנים בשעתיים עבודה ($9 - 6 = 3$).

נשאלנו בכמה שעות יבנה הפועל הרביעי לבדו את הקיר.

מצאנו כי הקיר מורכב מ-9 לבנים, וכי הפועל הרביעי מניח 3 לבנים בשעתיים, ומכאן שהזמן הדרוש לו להניח 9 לבנים, כמות הגדולה פי 3, הוא זמן הגדול פי 3, כלומר 6 שעות ($2 \cdot 3 = 6$).

תשובה (4).

20. **השאלה:** בכמה גדל אורך הצלע של ריבוע אם שטח הריבוע גדל ב-96%?

פיתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית.

היות ומדובר בשאלת גיאומטריה העוסקת באחוזים, ובה נתון רק אחוז, ללא נתון מספרי נוסף – נקבע לשם הפשטות כי השלם, שטח הריבוע, שווה ל-100 סמ"ר. אם שטח הריבוע הוא 100 סמ"ר, הרי שאורך צלעו הוא 10 סמ"ר. לפי השאלה, שטח הריבוע גדל ב-96% ולכן גודלו כעת הוא 196 סמ"ר. מכיוון שנשאלנו בכמה אחוזים גדל אורך הצלע, עלינו למצוא את אורך הצלע בריבוע אשר שטחו הוא 96 סמ"ר.

$$\text{נוסחת השטח של ריבוע שווה ל-} (צלע)^2 \therefore 196 = (צלע)^2 \Leftrightarrow \sqrt{196} = (צלע) \Leftrightarrow 14 = צלע.$$

מצאנו כי אורך צלע הריבוע המקורי היה 10 סמ"ר ולאחר ששטחו גדל ב-96%, אורך צלע הריבוע היא 14 סמ"ר, ומכאן שאורך הצלע גדל ב-40%.

דרך ב: הצבת תשובות.

נשתמש בהצבת הדוגמה המספרית בה נעזרנו בדרך א'; שטח הריבוע המקורי הוא 100 סמ"ר ואורך צלעו 10 סמ"ר. כעת נבדוק בכמה צריך להגדיל את הצלע המקורית על מנת להגיע לשטח החדש-196 סמ"ר.

ניגש לתשובה הנוחה ביותר **תשובה (3)**: 40%.

אורך הצלע המקורית היה 10 סמ"ר. 10% מ-10 הוא 1 סמ"ר, ולכן 40% מ-10 הם 4 סמ"ר.

כלומר צלע ריבוע אשר אורכו 10 סמ"ר אשר גדלה ב-40% שווה ל-14 סמ"ר.

נבדוק מה שטח ריבוע שאורך צלעו 14 סמ"ר.

פברואר 2014 - הסברים לפרק הראשון בחשיבה כמותית

הנוסחה לחישוב שטח ריבוע היא $(צלע)^2$

$$14 \cdot 14 = (10 + 4) \cdot 14 = (14 \cdot 10) + (14 \cdot 4) = 140 + (10 + 4) \cdot 4 = 140 + (4 \cdot 10) + (4 \cdot 4) = \\ = 140 + 40 + 16 = 180 + 16 = 196$$

מצאנו כי לאחר הגדלת הצלע המקורית ב-40%, שטח הריבוע הוא 196 סמ"ר, כלומר גדל ב-96% לעומת השטח המקורי שהיה 100 סמ"ר.

תשובה (3).
