מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(1)	(1)	(2)	(4)	(4)	(4)	(2)	(1)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	(1)	(1)	(2)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. **השאלה**: a ו-b הם מספרים שלמים שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי.

איזה מהמספרים הבאים בהכרח **קטן** מ-0?

פיתרון:

דרך א': הצבת דוגמה מספרית

נציב בתשובות לדוגמה כי $a=1$ ו-$b=-1$, ונחשב את ערכן של התשובות:

תשובה (1): $a+b$.
אם $a=1$ ו-$b=-1$, הרי שתוצאת הביטוי $a+b$ שווה ל-0 $(1+-1=)$, ומכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (2): $a-b$.
אם $a=1$ ו-$b=-1$, הרי שתוצאת הביטוי $a-b$ שווה ל-2 $(1--1=)$, ומכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (3): ab^2.
אם $a=1$ ו-$b=-1$, הרי שתוצאת הביטוי ab^2 שווה ל-1 $(1\cdot(-1)^2=)$, ומכאן שניתן לפסול את התשובה.

תשובה (4): a^3b.
אם $a=1$ ו-$b=-1$, הרי שתוצאת הביטוי a^3b שווה ל-(1-) $(1^3\cdot(-1)=)$. מכיוון שפסלנו 3 תשובות הרי שניתן לסמן תשובה זו.

דרך ב': הבנה אלגברית

על פי הנתונים אחד מהמספרים a ו-b הוא חיובי והאחר שלילי, אולם מכיוון שאיננו יודעים מי מהם חיובי ומי שלילי ומה מרחקם המוחלט מ-0, הרי שלא ניתן לדעת למה שווה סכומם או ההפרש ביניהם - תשובות (1) ו-(2).
סימנה של תוצאת המכפלת a ב- b^2 תלוי בשאלה מי מהמשתנים חיובי ומי שלילי, שכן במידה ו-a חיובי ו-b שלילי, תוצאת המכפלה תהיה חיובית ובמידה ו-a שלילי ו-b חיובי תוצאת המכפלה האמורה תהיה שלילית.
מכיוון שחזקה אי-זוגית אינה משנה את סימנו של המספר, הרי שתוצאת המכפלה a^3 ב-b תהיה בהכרח שלילית, שכן אחד מהגורמים שלה הוא חיובי והאחר בהכרח שלילי.

תשובה (4).

2. **השאלה**: במערכת צירים נתונות הנקודות $A(3,0)$, $B(3,2)$ ו-$C(0,2)$.

$\angle ABC = ?$

פיתרון:

ניתן לפתור את השאלה על ידי סימון מיקום הנקודות הנתונות על גבי מערכת הצירים או מציאת הזווית באמצעות ניתוח הנתונים.

שיעור ה-x של הנקודות A ו-B זהה, ומכאן שניתן לקבוע כי הישר AB בהכרח מקביל לציר ה-y.

שיעור ה-y של הנקודות B ו-C זהה, ומכאן שניתן לקבוע כי הישר BC בהכרח מקביל לציר ה-x.

מצאנו כי ישר AB מקביל לציר ה-y וישר BC מקביל לציר ה-x, מכיוון שציר ה-x וציר ה-y מאונכים זה לזה, הרי שגם הישרים AB ו-BC מאונכים זה לזה, כלומר יוצרים זווית בת $90°$ ביניהם.

תשובה (1).

---

3. **השאלה**: נתון: $x^2 = 3y$

y גדול פי 2 מ-x

$x \neq 0$

$x = ?$

פיתרון: <u>דרך א'</u>: אלגברה

לפנינו מערכת של שתי משוואות. על פי המשוואה הראשונה $x^2 = 3y$, ועל פי המשוואה השנייה $y = 2x$.

מכיוון שנתבקשנו למצוא את ערכו של x, עלינו להיפטר מ- y. נציב את ערכו של y על פי המשוואה השנייה במשוואה הראשונה, ונקבל: $x^2 = 3 \cdot 2x \Leftarrow x^2 = 6x$.

נחלק ב-x את שני האגפים, ונקבל: $x = 6$.

תשובה (1).

---

4. **השאלה**: לסבתא יש 3 בנות, ולכל אחת מהן יש 3 בנות. סבתא חילקה חפיסת שוקולד בין **כל** צאצאיותיה, כך שכל אחת קיבלה בדיוק שתי קוביות שוקולד.

כמה קוביות שוקולד היו בחפיסה?

פיתרון: על מנת למצוא את מספר קוביות השוקולד שהיו בחפיסה יש למצוא את מספר הצאצאיות הכולל של סבתא.

לסבתא יש 3 בנות. מכיוון שלכל אחת מ-3 הבנות יש 3 בנות משלה, הרי שלסבתא יש 9 נכדות $(= 3 \cdot 3)$.

סך הכול מספר הצאצאיות של סבתא הוא 12 $(= 9 + 3)$.

אם כל צאצאית של סבתא קיבלה בדיוק שתי קוביות שוקולד, הרי שסך הכול היו 24 קוביות שוקולד בחפיסה $(= 12 \cdot 2)$.

תשובה (2).

---

5. **השאלה**: a ו-b הם שני מספרים אי-זוגיים.

איזה מהביטויים הבאים **אינו** יכול להיות מספר שלם?

פיתרון: __דרך א'__: אלגברה

על פי ההגדרה, מספר אי-זוגי הוא מספר אשר אינו מתחלק ב-2 ללא שארית, ולכן אם אנו מבקשים למצוא ביטוי ש**אינו** יכול להיות שלם, הרי שמומלץ לחפש ביטוי אי-זוגי אשר מחלקים אותו ב-2, שכן ביטוי זה אינו יכול להיות מספר שלם.

ביטוי שכזה נמצא בתשובה מספר (4).

__דרך ב'__: הצבת דוגמה מספרית

נתון כי a ו-b הם שני מספרים אי-זוגיים, נציב כי $a=1$ ו-$b=3$ בתשובות המוצעות ונפסול כל תשובה אשר ערכה שלם:

__תשובה (1)__: $\frac{a+b}{3}$. כאשר נציב $a=1$ ו-$b=3$, נקבל כי ערך הביטוי הוא $\frac{4}{3}$ $\left(=\frac{1+3}{3}\right)$, ומכאן שלא ניתן לפסול את התשובה.

__תשובה (2)__: $\frac{a+b}{2}$. כאשר נציב $a=1$ ו-$b=3$, נקבל כי ערך הביטוי הוא 2 $\left(=\frac{1+3}{2}\right)$, ומכאן שניתן לפסול תשובה זו.

__תשובה (3)__: $\frac{a\cdot b}{3}$. כאשר נציב $a=1$ ו-$b=3$, נקבל כי ערך הביטוי הוא 1 $\left(=\frac{1\cdot 3}{3}\right)$, ומכאן שניתן לפסול תשובה זו.

__תשובה (4)__: $\frac{a\cdot b}{2}$. כאשר נציב $a=1$ ו-$b=3$, נקבל כי ערך הביטוי הוא $\frac{3}{2}$ $\left(=\frac{1\cdot 3}{2}\right)$, ומכאן שתשובה זו אינה נפסלת.

נותרנו עם תשובות (1) ו-(4), ולכן עלינו להציב שוב על מנת להכריע מי מהן היא התשובה הנכונה.

$a=1$ ו-$b=5$, ונקבל כי ערכה של תשובה (1) הוא 2 $\left(=\frac{1+5}{3}\right)$. מכיוון שמצאנו כי ערכה של תשובה (1) יכול להיות שלם, הרי שתשובה זו נפסלת והתשובה הנכונה היא תשובה (4).

תשובה (4).

---

6. **השאלה**: נתון מעגל קטן שרדיוסו r ס"מ, ומעגל גדול שרדיוסו $r+2$ ס"מ.

מה ההפרש בין שטח המעגל הגדול לשטח המעגל הקטן?

פיתרון: הנוסחה לשטח מעגל היא מכפלת ריבוע רדיוס המעגל ב-π.

שטח מעגל שרדיוסו r ס"מ הוא $r^2\pi$.

שטח מעגל שרדיוסו $(r+2)$ ס"מ הוא $(r+2)^2\pi$.

ההפרש בין שטח המעגל הגדול לשטח המעגל הקטן הוא: $(r+2)^2\pi-r^2\pi$.

נפשט את הביטוי על ידי פתיחת הסוגריים באמצעות נוסחת הכפל המקוצר, ונקבל:

$$(r+2)^2\pi-r^2\pi=\left(r^2+4+4r\right)\pi-r^2\pi=r^2\pi+4\pi+4r\pi-r^2\pi=4\pi+4r\pi$$

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: בחודש ינואר קיבלה רחל תוספת שכר חד-פעמית בשיעור של 300% משכרה הקבוע.

שכרה של רחל בחודש ינואר (הכולל את התוספת) היה גבוה פי _____ משכרה הקבוע.

פיתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שזו שאלת אחוזים שאין בה כל נתון מספרי, נציב לשם הנוחות כי שכרה הקבוע של רחל הוא 100 שקלים לחודש.
על פי הנתונים רחל קיבלה תוספת שכר חד-פעמית בשיעור של 300% משכרה הקבוע, 300% מ-100 שקלים הם 300 שקלים.
שכרה של רחל בחודש ינואר הכולל את תוספת השכר היה 400 שקלים, כלומר גבוה פי 4 משכרה הקבוע שהוא 100 שקלים $\left(\frac{400}{100}=\right)$.

תשובה (4).

---

8. **השאלה**: ענת בחרה מספר כלשהו x ועשתה את הפעולות הבאות, זו אחר זו:
היא חילקה את x ב-9,
מהתוצאה שהתקבלה היא החסירה 4,
את ההפרש שהתקבל היא הכפילה ב-5,
ולמכפלה שהתקבלה היא הוסיפה 20.
לאחר כל הפעולות שעשתה, קיבלה ענת שוב את המספר שבחרה, x.
$x=?$

פיתרון: בניית משוואה
נבנה את המשוואה לפי הוראות השאלה: נכפול את x ב-9, ונקבל: $9x$. נחסר 4 מהתוצאה, ונקבל: $9x-4$.
נכפול את ההפרש ב-5, כלומר: $5\cdot(9x-4)$.
ולבסוף נוסיף למכפלה את המספר 20, כלומר נקבל: $5\cdot(9x-4)+20$.
מכיוון שנתון כי לבסוף קיבלה ענת את המספר שבחרה, הרי שכל הביטוי שיצרנו שווה ל-x: $5\cdot(9x-4)+20=x$.
כעת נפשט את המשוואה על ידי פתיחת הסוגריים: $45x-20+20=x \Leftarrow 45x=x$.
נחסר x משני האגפים, ונקבל: $44x=0$.
נחלק ב-44, ונקבל: $x=0$.

תשובה (2).

הערה: המספר הנוח ביותר להצבה הוא 0, מומלץ לבדוק האם מספר זה מקיים את המשוואה. כאשר נבדוק האם 0 מקיים את נתוני השאלה, נמצא כי המספר מקיים את המשוואה, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

הסקה מטבלה (שאלות 12-9)

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריה.

במפעל מסוים מייצרים רכיבים המותקנים ברובוטים.
בטבלה מוצגים נתונים על הרכיבים שיוצרו במפעל בשנים 2005-2001.
עבור כל שנה רשומים בטבלה מספר הרכיבים שיוצרו באותה שנה וכמה מהם היו תקינים.
כמו כן, בטבלה רשום מספר הרכיבים התקינים מכל שנת ייצור שהותקנו ברובוטים בכל אחת מהשנים 2005-2001
(כל רכיב מותקן פעם אחת בלבד).

לדוגמה: בשנת 2004 ייצר המפעל 1,275 רכיבים, מהם 918 היו תקינים. מן הרכיבים התקינים האלה, 220 רכיבים הותקנו ברובוטים ב–2004, ו–80 רכיבים הותקנו ב–2005.

	מספר הרכיבים שייצר המפעל	**מספר הרכיבים התקינים**	**מספר הרכיבים שהותקנו ברובוטים בשנת**				
			2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
2001	1,600	800	400	180	70	20	10
2002	1,700	1,020		600	400	0	20
2003	1,450	754			300	154	140
2004	1,275	918				220	80
2005	1,200	780					250

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.9 **השאלה**: בשנת _____ הותקנו ברובוטים בדיוק $\frac{1}{4}$ מכל הרכיבים שייצר המפעל באותה שנה.

פיתרון: נבדוק באיזו מהשנים המוצעות בתשובות הותקנו, על פי הטבלה, ברובוטים בדיוק $\frac{1}{4}$ מכל הרכיבים שייצר המפעל באותה שנה.

<u>תשובה (1)</u>: 2001.

בשנת 2001 ייצר המפעל 1,600 רכיבים בסך הכול. מתוכם הותקנו על פי הטבלה 400 בשנת 2001.
מכיוון ש-400 מהווה $\frac{1}{4}$ מ-1,600, הרי שזו התשובה הנכונה $\left(=\frac{400}{1{,}600}\right)$.
מכיוון שתשובה זו נכונה, אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (1).

.10 **השאלה**: מאיזו שנת ייצור לא נותרו כלל רכיבים תקינים בסוף שנת 2005?

פיתרון: נבדוק לגבי כל אחת מהתשובות המוצעות האם נותרו רכיבים תקינים בשנת 2005.

<u>תשובה (1)</u>: 2001. על פי התרשים יוצרו בסך הכול בשנת 2001 – 800 רכיבים תקינים.
מספר הרכיבים התקינים שהותקנו בשנת 2001 הוא 400, בשנת 2002 הותקנו 180 רכיבים, בשנת 2003 הותקנו 70 רכיבים, בשנת 2004 – 20 רכיבים ובשנת 2005 – 10 רכיבים.
סך הכול הותקנו בשנים 2001 עד 2005 – 680 רכיבים תקינים $(=400+180+70+20+10)$ מתוך 800 רכיבים תקינים שיוצרו בשנת 2001, כלומר בסוף שנת 2005 נותרו 120 רכיבים תקינים משנת הייצור 2001 $(=800-680)$, ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u> : 2002. על פי התרשים יוצרו בסך הכול בשנת 2002 – 1,020 רכיבים תקינים.
מספר הרכיבים התקינים שהותקנו בשנת 2002 הוא 600, בשנת 2003 הותקנו 400 רכיבים, בשנת 2004 לא הותקנו רכיבים תקינים ובשנת 2005 הותקנו 20 רכיבים.
בסך הכול הותקנו בשנים 2002 עד 2005 – 1,020 רכיבים תקינים $(=20+400+600)$.
כלומר בסוף שנת 2005 לא נותרו כלל רכיבים תקינים משנת הייצור 2002, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

11. **השאלה** : מתוך השנים הבאות, באיזו שנת ייצור היה אחוז הרכיבים התקינים (מתוך הרכיבים שיוצרו באותה שנה) הנמוך ביותר?

פיתרון : נבדוק לגבי כל אחת מהתשובות המוצעות – מה אחוז הרכיבים התקינים מתוך סך כל הרכיבים שיוצרו באותה שנה.

<u>תשובה (1)</u> : 2001. מספר הרכיבים הכולל שיוצר בשנה זו הוא 1,600 מתוכם 800 רכיבים היו תקינים,
כלומר הרכיבים התקינים היוו מחצית ממספר הרכיבים הכולל $\left(=\frac{800}{1,600}\right)$, ובאחוזים 50%.

<u>תשובה (2)</u> : 2003. מספר הרכיבים הכולל שיוצר בשנה זו הוא 1,450 מתוכם 754 רכיבים היו תקינים,
מכיוון ש-754 הרכיבים התקינים מהווים יותר ממחצית ממספר הרכיבים הכולל הרי שניתן לקבוע כי יותר מ- 50% מהרכיבים שיוצרו בשנה זו היו תקינים.
מכיוון שנתבקשנו למצוא את השנה בה אחוז הרכיבים התקינים היה הנמוך ביותר, והאחוז בתשובה (1) קטן יותר, הרי שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (3)</u> : 2004. מספר הרכיבים הכולל שיוצר בשנה זו הוא 1,275 מתוכם 918 רכיבים היו תקינים,
מכיוון ש-918 הרכיבים התקינים מהווים יותר ממחצית ממספר הרכיבים הכולל הרי שניתן לקבוע כי יותר מ- 50% מהרכיבים שיוצרו בשנה זו היו תקינים, ומכאן שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (4)</u> : 2005. מספר הרכיבים הכולל שיוצר בשנה זו הוא 1,200 מתוכם 780 רכיבים היו תקינים,
מכיוון ש-780 הרכיבים התקינים מהווים יותר ממחצית ממספר הרכיבים הכולל הרי שניתן לפסול גם תשובה זו, ולקבוע שהאחוז הקטן ביותר של רכיבים תקינים יוצרו בשנת 2001.

תשובה (1).

---

12. **השאלה** : לפי הטבלה, מה מספר הרכיבים שהותקנו ברובוטים שנתַיים או יותר לאחר שנת הייצור שלהם?

פיתרון: נבדוק לגבי כל אחת מהשנים המפורטות בטבלה מה מספר הרכיבים שהותקנו **שנתַיים או יותר** לאחר שנת הייצור שלהם.
שנת 2001 : נבדוק מה מספר הרכיבים שהותקנו שנתיים או יותר לאחר שנת הייצור.
ישנם 70 רכיבים שהותקנו שנתיים אחרי, כלומר בשנת 2003, 20 רכיבים שהותקנו בשנת 2004 ו-10 רכיבים שהותקנו בשנת 2005, ובסך הכול הותקנו 100 רכיבים שנתיים או יותר אחרי שיוצרו $(=10+20+70)$.

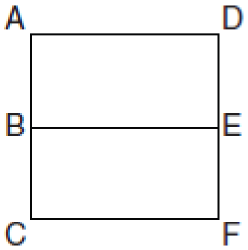
שנת 2002 : נבדוק מה מספר הרכיבים שהותקנו שנתיים או יותר לאחר שנת הייצור.
אין רכיבים שהותקנו שנתיים אחרי, כלומר בשנת 2004 ו-20 רכיבים שהותקנו בשנת 2005, ובסך הכול הותקנו 20 רכיבים שנתיים או יותר לאחר שיוצרו $(=20+0)$.

שנת 2003 : נבדוק מה מספר הרכיבים שהותקנו שנתיים או יותר לאחר שנת הייצור.
ישנם 140 רכיבים שהותקנו שנתיים אחרי, כלומר בשנת 2005.

סך הכול מצאנו כי ישנם 260 רכיבים שהותקנו שנתיים או יותר לאחר שיוצרו $(=140+20+100)$.

תשובה (3).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)



13. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם שני מלבנים חופפים, ABED ו-BCFE, המרכיבים את הריבוע ACFD.
נתון: היקף כל אחד מהמלבנים הוא 120 ס"מ.
מה היקפו של הריבוע (בס"מ)?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: משוואה
מכיוון שנתון כי ACFD הוא ריבוע, נסמן כל אחת מצלעותיו ב-2x.
נתון כי שני המלבנים חופפים, ו מכאן ש: $AB = BC = x$.
על פי הנתונים היקף כל מלבן הוא 120 ס"מ, ולפי הנתון שהצבנו לגבי צלעות הריבוע, היקף כל אחד מהמלבנים שווה ל-6x $(2x + x + 2x + x =)$.
מצאנו כי $6x = 120$, ומכאן ש- $2x = 40$.
היקף הריבוע שווה ל-8x, כלומר ל-160 ס"מ $(4 \cdot 40 =)$.

<u>דרך ב'</u>: בדיקת תשובות
מכיוון שנתבקשנו למצוא מה היקף הריבוע, מומלץ להתחיל ולחפש תשובות אשר חלוקתן ב-4 נותנת תוצאה עגולה. למשל תשובות (2) ו-(4).

<u>תשובה (2)</u>: 160. אם היקף הריבוע הוא 160 ס"מ, הרי שאורכה של כל צלע הוא 40 ס"מ $\left(\frac{160}{4} =\right)$.

אם אורכה של צלע הריבוע הוא 40 ס"מ, הרי שאורך המלבן הוא 40 ס"מ ורוחב המלבן, אשר שווה למחצית מאורכה של צלע הריבוע, שווה ל-20 ס"מ.
מכיוון שמצאנו שאורך שתי צלעות סמוכות של המלבן שווה ל-60 ס"מ, הרי שהיקף המלבן שווה ל-120 ס"מ $(2 \cdot 60 =)$.
מכיוון שנתון זה מתאים לנתוני השאלה, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

14. **השאלה**: נתון: $a + b = c + d$

$$a = 2b = 3c = 4d$$

$$d = ?$$

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: אלגברה
מכיוון שנתבקשנו למצוא את ערכו של d, עלינו 'להיפטר' מהמשתנים האחרים.
על פי המשוואה השנייה: $a = 4d$.
$2b = 4d$, ומכאן ש: $b = 2d$.
$3c = 4d$, ומכאן ש: $c = \frac{4d}{3}$.

כעת נציב ערכים אלו במשוואה הראשונה, ונקבל: $4d + 2d = \frac{4d}{3} + d \Leftarrow 6d = 2\frac{1}{3}d$.

נחסר משני האגפים $2\frac{1}{3}d$, ונקבל: $3\frac{2}{3}d = 0$, כלומר $d = 0$.

<u>דרך ב'</u>: בדיקת תשובות
מכיוון שנתון כי: $a = 2b = 3c = 4d$, מומלץ ראשית להביט בתשובות ולחפש האם ישנה תשובה עגולה המקיימת משוואה זו.
אם נציב כי $d = 0$ במשוואה השנייה, נמצא כי ערכם של כל יתר המשתנים שווה ל-0, והמשוואה $a + b = c + d$ מתקיימת.
ומכאן שזו התשובה הנכונה לשאלה.

תשובה (2).

---

15. **השאלה**: נתון חרוט שנפחו V.

אם נשנה את ממדיו של החרוט כך שרדיוס בסיסו **יגדל** פי 3 וגובהו **יקטן** פי 3, יתקבל חרוט שנפחו U.

$\frac{U}{V} = ?$

פיתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית

לשם הנוחות נציב כי רדיוס בסיס החרוט הוא 1 ס"מ וגובהו 3 ס"מ.

נפחה של כל פירמידה שווה ל- $\frac{\text{גובה} \cdot \text{שטח בסיס}}{3}$, ומכאן שנפחו של החרוט שווה ל-π סמ"ק $\left(= \frac{1^2 \pi \cdot 3}{3}\right)$.

מצאנו כי V שווה ל-π סמ"ק.

כעת, בהתאם לנתוני השאלה, נגדיל את רדיוס בסיס החרוט פי 3 ונקטין את גובהו פי 3, ולכן כעת רדיוס הבסיס שווה ל-3 ס"מ וגובה החרוט שווה ל-1 ס"מ.

נפח החרוט לאחר השינויים האמורים שווה ל-3π סמ"ק $\left(= \frac{3^2 \pi \cdot 1}{3}\right)$.

מצאנו כי V נפח החרוט ההתחלתי שווה ל-π סמ"ק, ו-U, נפח החרוט לאחר ששינינו את ממדיו, שווה ל-3π סמ"ק, ומכאן שהביטוי $\frac{U}{V}$ שווה ל-3 $\left(= \frac{3\pi}{\pi}\right)$.

דרך ב': הבנה אלגברית.

מכיוון ששני מעגלים הם צורות דומות, הרי שכאשר מגדילים את אורכו של רדיוס מעגל פי 3, גָדֵל שטחו של המעגל פי 9, שכן אם היחס הקווי גָדֵל פי 3 בהכרח יחס השטחים גָדֵל פי 9.

הגדלת רדיוס הבסיס פי 3 אמורה **להגדיל** את נפח הפירמידה פי 9, אולם הקטנת גובה הפירמידה פי 3, **מקטינה** את נפחה פי 3, ומכאן שבסך הכול גדל נפח הפירמידה פי 3.

תשובה (3).

---

16. **השאלה**: ביום ראשון נסע חיים מ-A ל-B **ובחזרה** במהירות קבועה של 60 קמ"ש. ביום שני נסע חיים מ-A ל-B במהירות של 45 קמ"ש, וחזר מ-B ל-A ב-2 שעות. זמן הנסיעה ביום ראשון היה שווה לזמן הנסיעה ביום שני.

מה המרחק בין A ל-B (בק"מ)?

פיתרון: **דרך א'**: בדיקת תשובות

מכיוון שחיים נסע במהירויות של 45 קמ"ש ו-60 קמ"ש מומלץ להתחיל בבדיקת תשובות אשר מהוות כפולות שלמות של 45 ו-60. התשובה היחידה המהווה כפולה של 45 ו-60 היא תשובה (3).

<u>תשובה (3)</u>: 180. אם המרחק בין A ל-B הוא 180 ק"מ, הרי שבמהירות קבועה של 60 קמ"ש, שבה נסע חיים ביום ראשון, הוא יעבור את הדרך ב-3 שעות בדרכו הלוך $\left(= \frac{180}{60}\right)$ ו-3 שעות בדרכו חזור, ובסך הכול ב-6 שעות.

ביום שני נסע חיים בדרכו הלוך במהירות של 45 קמ"ש, כלומר עבר את המרחק של 180 הק"מ בין A ל-B ב-4 שעות $\left(= \frac{180}{45}\right)$, מכיוון שנתון כי את דרכו חזרה הוא עשה ב-2 שעות, הרי שזמן הנסיעה הכולל שלו ביום שני היה אף הוא שווה ל-6 שעות $\left(= 4+2\right)$.

מצאנו שזמן הנסיעה הכולל של חיים ביום ראשון ושני היה זהה, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: בניית משוואה

נסמן את המרחק בין A ל-B ב-x.

נתון כי ביום ראשון נסע חיים מ-A ל-B **ובחזרה** במהירות קבועה של 60 קמ"ש.

מכיוון שסימנו את המרחק בין A ל-B ב-x, הרי שהדרך הכוללת שעבר חיים ביום ראשון היא 2x, והזמן שנדרש לו לעבור אותה הוא $\frac{2x}{60}$ $\left(\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}\right)$.

נתון כי ביום שני נסע חיים מ-A ל-B במהירות קבועה של 45 קמ"ש, וחזר מ-B ל-A ב-2 שעות.

סימנו את המרחק בין A ל-B ב-x, ומכאן שהזמן שנדרש לו לעבור את הדרך מ-A ל-B בדרכו הלוך הוא $\frac{x}{45}$, והזמן הכולל שנדרש לו לעבור את הדרך הלוך וחזור באותו יום הוא $2 + \frac{x}{45}$.

נתון כי זמן הנסיעה ביום ראשון היה שווה לזמן הנסיעה ביום שני, ומכאן שניתן לבנות משוואה לפיה:

$2 + \frac{x}{45} = \frac{2x}{60}$. נכפול ב-180 את שני האגפים, ונקבל: $360 + 4x = 6x$.

נחסר 4x משני האגפים, ונקבל: $360 = 2x$.

נחלק ב-2, ונמצא כי $x = 60$.

תשובה (3).

---

17. **השאלה**: מספר הבנות בכיתה הוא בין 2 ל-8, ומספר הבנים בכיתה הוא בין 4 ל-6.

מתוך כל ילדי הכיתה, החלק היחסי של הבנות הוא לכל היותר -

פיתרון:

נשאלנו מה החלק היחסי של הבנות לכל היותר.

חלקן היחסי של הבנות שווה למספר הבנות לחלק במספר הילדים הכולל בכיתה.

על מנת שחלקן היחסי של הבנות יהיה מקסימלי, עלינו לחפש מהו המצב בו ערכו של השבר האמור הוא הגדול ביותר.

ככל שערכו של מונה השבר הוא גדול יותר, ערכו של השבר יהיה גדול יותר, ומכאן שמספר הבנות הרצוי הוא 8.

ככל שערכו של מכנה השבר קטן יותר, כך ערכו של השבר גדול יותר, ולכן עדיף שמספר הבנים יהיה קטן ככל האפשר, כלומר שווה ל-4.

במצב בו מספר הבנות הוא 8 ומספר הבנים הוא 4, החלק היחסי של הבנות מתוך כלל תלמידי הכיתה הוא $\frac{2}{3}$ $\left(= \frac{8}{12}\right)$.

תשובה (3).

---

18. **השאלה**: אירית ציירה 7 קטעים מקבילים זה לזה, ואחר כך ציירה עוד 7 קטעים המאונכים להם.

מה מספר נקודות החיתוך השונות שעשויות להתקבל בין הקטעים?

פיתרון: **קטע** הוא חלק מ<u>ישר</u> התחום בין שתי נקודות. לפיכך, אם שני **<u>ישרים</u>** מאונכים זה לזה יש להם נקודת חיתוך אחת. אך הקטעים הנמצאים על הישרים הללו אינם בהכרח נחתכים, שכן נקודת החיתוך בין הישרים, אינה בהכרח על הקטעים הללו.

כאשר 7 **<u>ישרים</u>** נחתכים על-ידי 7 **<u>ישרים</u>** מאונכים, כל אחד מהישרים הראשונים, נחתך על-ידי 7 ישרים מאונכים. כלומר, בסך הכול יווצרו 49 נקודות חיתוך $(= 7 \cdot 7)$.

מה קורה כאשר 7 **קטעים** נחתכים על-ידי 7 **קטעים** מאונכים? כפי שהסברנו, 49 נקודות החיתוך יכולות להיות על הקטעים הללו (או על חלקם), אך מכיוון שאיננו יודעים בוודאות האם הן נמצאות עליהם, הרי שיתכן כי אין אף נקודת חיתוך, ומכאן שמספר נקודות החיתוך בין הקטעים הוא בין 0 ל-49.

תשובה (1).

.19 **השאלה**: נתון: $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a}=a^{x+y}$.

$$1<a$$

$$0<x\,,\,y$$

איזו מהטענות הבאות נובעת בהכרח מהנתונים?

פיתרון: על מנת לפתור משוואה מעריכית יש להביא למצב בו הבסיס בשני האגפים שווה, ואז להשוות בין מעריכי הבסיסים בשני האגפים.
נתון כי: $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a}=a^{x+y}$.

לפי חוקי השורשים: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, נפשט את המשוואה הנתונה באמצעות חוק זה:

$\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a}=a^{x+y} \Leftarrow \sqrt[x]{a^1}\cdot\sqrt[y]{a^1}=a^{x+y} \Leftarrow a^{\frac{1}{x}}\cdot a^{\frac{1}{y}}=a^{x+y} \Leftarrow a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{x+y}$.

מכיוון שהבסיסים שווים, כעת ניתן להשוות בין המעריכים: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=x+y$.

נפשט את אגף שמאל על ידי חיבור שני השברים (באמצעות יצירת מכנה משותף), ונקבל:

$$\frac{y+x}{xy}=x+y\,.$$

(**הערה**: בשלב זה ניתן 'לפזול' לתשובות ולהבחין כי במקרה שבו $xy=1$, המשוואה בהכרח מתקיימת, ולכן זו התשובה הנכונה.)
נכפול את שני האגפים ב- xy, ונקבל: $y+x=(x+y)\cdot xy$.
מכיוון שהביטוי $(x+y)$ מופיע בשני האגפים, ומאחר ועל פי הנתון x ו-y חיוביים, נחלק את שני האגפים בביטוי זה, ונקבל: $1=xy$.

תשובה (1).

.20 **השאלה**: על הלוח כתובים 12 מספרים חיוביים **שונים**, אשר כל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7.

איזו מהאפשרויות הבאות **לא** תיתכן?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: כל המספרים מורכבים מהספרות 4 ו-7בלבד.

מכיוון שאין כל מגבלה על פי נתוני השאלה לגבי מספר הספרות של כל אחד מהמספרים, הרי שניתן להרכיב 12 מספרים שונים אשר יהיו מורכבים מהספרות 4 ו-7 בלבד ואשר כל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7 בלבד. למשל: 447, 4447, 44447 וכך הלאה.

<u>תשובה (2)</u>: כל המספרים הם מספרים של 3 ספרות או פחות.

נתון כי כל אחד מהמספרים מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7.
אם כל המספרים היו בני 3 ספרות, הרי שיהיו 10 אפשרויות שונות בלבד למספרים כאלו: 407, 417, 427, 437.. וכך הלאה. המספר הדו-ספרתי היחיד שמקיים את נתוני השאלה, כלומר מתחיל ב-4 ומסתיים ב-7 הוא 47, ומכאן שישנם 11 מספרים שונים בלבד שהם בני 3 ספרות או פחות ומקיימים את נתוני השאלה, ולפיכך המצב המתואר בתשובה זו אינו אפשרי. מכיוון שמצאנו את התשובה הנכונה אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות, אך נעשה זאת לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (3)</u>: כל המספרים הם מספרים של 5 ספרות או יותר.

מכיוון שאין כל מגבלה לפי התשובה על מספר הספרות המקסימלי, הרי שניתן בנקל להרכיב 12 מספרים שונים אשר יהיו מורכבים מהספרות 4 ו-7 בלבד ואשר כל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7 בלבד ושאורכם יהיו בני 5 ספרות או יותר.

למשל על ידי הוספת הספרה 4 או 7 למספר בן 5 ספרות העונה על תנאי השאלה: 44447, 444447, 4444447 וכך הלאה.

<u>תשובה (3)</u>: כל המספרים מתחלקים ב-9.

מכיוון שאין כל מגבלה לפי התשובה על מספר הספרות המקסימלי, הרי שניתן בנקל להרכיב 12 מספרים שונים אשר סכום הספרות שלהם יהיה מספר המתחלק ב-9, ויהיו מורכבים מהספרות 4 ו-7 בלבד ואשר כל אחד מהם מתחיל בספרה 4 ומסתיים בספרה 7 בלבד.

תשובה (2).
