מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(4)	(3)	(4)	(3)	(1)	(3)	(2)	(2)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(4)	(4)	(4)	(2)	(1)	(4)	(4)	(4)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-7)

1. **השאלה**: נתון: $\frac{\frac{1}{x}}{2}=7$

$x=?$

פיתרון: מכיוון שלפנינו משוואה אשר ניתן לפותרה בקלות יחסית על ידי סדרת פעולות פשוטה באלגברה, נכפול את שני האגפים ב-2, ונקבל: $\frac{1}{x}=14$.

נכפול את שני האגפים ב-x, ונקבל: $1=14x$.

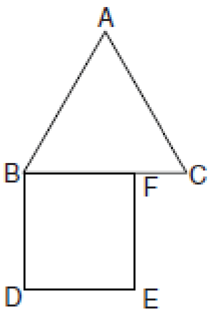
נחלק ב-14, ונקבל: $x=\frac{1}{14}$.

תשובה (1).

---

2. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABC הוא משולש שווה-צלעות ו-BDEF הוא ריבוע.

נתון: $BF=2\cdot FC$.



$\frac{\text{היקף המשולש}}{\text{היקף הריבוע}}=?$

פיתרון: מכיוון שאין כל נתון מספרי לגבי אורכי הצלעות, הרי שניתן להציב עבור BF ו-FC כל זוג מספרים שמקיימים את נתוני השאלה.

נציב לשם הנוחות כי FC שווה ל-1 ס"מ, ו-BF הוא 2 ס"מ.

מצאנו כי אורכה של צלע המשולש הוא 3 ס"מ $(1+2=)$, ואורכה של צלע הריבוע הוא 2 ס"מ.

אם אורכה של צלע המשולש הוא 3 ס"מ, הרי שהיקף המשולש שווה ל-9 ס"מ $(3\cdot 3=)$.

אם אורכה של צלע הריבוע הוא 2 ס"מ, הרי שהיקף הריבוע שווה ל-8 ס"מ $(4\cdot 2=)$.

$\frac{\text{היקף המשולש}}{\text{היקף הריבוע}}=\frac{9}{8}$

תשובה (4).

---

3. **השאלה** : שלושה אחים נולדו בהפרשים של שנה בדיוק זה מזה. מכפלת הגילים של שני האחים הצעירים קטנה ב-8 ממכפלת הגילים של האחים המבוגרים.

מה גיל האח הצעיר ביותר?

פיתרון : **<u>דרך א'</u>** : בדיקת תשובות

<u>תשובה (1)</u> : 5.

מכיוון שלפי הנתונים הפרש הגילים בין האחים הוא שנה בדיוק, הרי שאם גילו של האח הצעיר הוא 5, גילם של שני האחים המבוגרים הוא 6 ו-7.

מכפלת הגילים של שני האחים הצעירים היא 30 $(=5\cdot6)$ ומכפלת הגילים של שני האחים המבוגרים היא 42 $(=6\cdot7)$. מכיוון שההפרש בין שתי המכפלות הוא 12 $(=42-30)$, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u> : 6.

אם גילו של האח הצעיר הוא 6, גילם של שני האחים המבוגרים הוא 7 ו-8.

מכפלת הגילים של שני האחים הצעירים היא 42 $(=6\cdot7)$ ומכפלת הגילים של שני האחים המבוגרים היא 56 $(=7\cdot8)$. מכיוון שההפרש בין שתי המכפלות הוא 14 $(=56-42)$, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (3)</u> : 3.

אם גילו של האח הצעיר הוא 3, גילם של שני האחים המבוגרים הוא 4 ו-5.

מכפלת הגילים של שני האחים הצעירים היא 12 $(=3\cdot4)$ ומכפלת הגילים של שני האחים המבוגרים היא 20 $(=4\cdot5)$. מכיוון שההפרש בין שתי המכפלות הוא 8 $(=20-12)$, הרי שזו התשובה הנכונה.

אין צורך לבדוק את התשובה הנותרת.

<u>דרך ב'</u> : בניית משוואה

נסמן את גיל האח הצעיר ב-x. מכיוון שהפרש הגילים בין האחים הוא שנה, הרי שגיל האח האמצעי הוא $(x+1)$ וגיל אח הבכור הוא $(x+2)$.

נתון כי מכפלת הגילים של שני האחים הצעירים קטנה ב-8 ממכפלת הגילים של האחים המבוגרים, ולפיכך :

$x\cdot(x+1)+8=(x+1)\cdot(x+2) \Leftarrow x^2+x+8=x^2+2x+x+2$.

נחסר x^2 משני האגפים, ונקבל : $x+8=3x+2$.

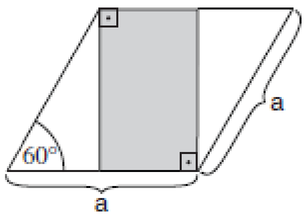
נחסר x ו-2 משני האגפים, ונקבל : $6=2x$.

נחלק ב-2, ונקבל : $3=x$.

תשובה (3).

---

4. **השאלה** : בסרטוט שלפניכם מעוין שאורך צלעו a ס"מ.



לפי הנתונים שבסרטוט, מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

פיתרון: סכום זוויות סמוכות במעוין הוא $180°$. מכיוון שנתון כי אחת מזוויות המעוין שווה ל-$60°$, הרי שהזוויות הסמוכות לה שוות ל-$120°$ $(=180°-60°)$.

נתבונן במשולש ישר הזווית שאחת מזוויותיו מסומנת ב-$60°$.

מכיוון שמצאנו כי הזווית השמאלית העליונה במעוין שווה ל-$120°$, ובסרטוט נתונה זווית של $90°$ בתוך השטח הכהה, הרי שהזווית העליונה במשולש שווה ל-$30°$ $(=120°-90°)$.

מכיוון שסכום זוויות פנימיות בכל משולש שווה ל-$180°$, הרי שהזווית הימנית התחתונה שווה ל-$90°$ $(=180°-60°-30°)$.

מצאנו כי המשולש השמאלי התחתון הוא משולש זהב ומכיוון שמצאנו כי שלוש מהזוויות הפנימיות של השטח הכהה הן ישרות, הרי שבהכרח גם הזווית הרביעית חייבת להיות בת $90°$, כלומר השטח הכהה הוא מלבן.

במשולש זהב אורך הניצב הקטן הוא מחצית מאורך היתר. מכיוון שיתר המשולש הוא צלע המעוין אשר

אורכה שווה ל-a, הרי שאורכו של הניצב הקטן שווה ל- $\frac{a}{2}$.

אורך הניצב הגדול במשולש זהב גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הניצב הקטן, כלומר שווה ל- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\left(=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}\right)$.

כעת נתבונן במלבן הכהה שבסרטוט:

אחת מצלעות המלבן היא הניצב הגדול במשולש הזהב, כלומר שווה ל- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

צלעו השנייה של המלבן מרכיבה יחד עם הניצב הקטן של משולש הזהב את צלע המעוין אשר אורכה a.

מכיוון שמצאנו כי אורך הניצב הקטן הוא $\frac{a}{2}$, הרי שאורך צלע המלבן שווה אף היא ל- $\frac{a}{2}$ $\left(=a-\frac{a}{2}\right)$.

שטח מלבן שווה למכפלת צלעות סמוכות, ומכאן ששטח המלבן שווה ל- $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\left(=\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

תשובה (4).

---

5. **השאלה**: 8 חברים אכלו במסעדה.
4 מהם חילקו בין 50 ל-70 שקלים כל אחד, והאחרים שילמו בין 100 ל-130 שקלים כל אחד.

סך הכול שילמו כל 8 החברים בין _____ שקלים ל-______ שקלים.

פיתרון: מכיוון שנתבקשנו למצוא את טווח המחירים ששילמו החברים, נמצא את הסכום המינימלי והמקסימלי אשר שולם על ידי 8 החברים בסך הכול.

<u>מינימום</u>: אם 4 חברים שילמו בין 50 ל-70 שקלים, הרי שלכל הפחות שילם כל אחד מהם 50 שקלים.
כלומר, כל הארבעה שילמו לכל הפחות 200 שקלים $(=4\cdot50)$.

נתון כי החברים האחרים שילמו בין 100 ל-130 שקלים כל אחד. מכיוון שידוע כי בסך הכול אכלו 8 חברים במסעדה, הרי ש**האחרים** הם 4 $(=8-4)$, וכל אחד מהם שילם לכל הפחות 100 שקלים, כלומר ארבעת החברים הנותרים שילמו לכל הפחות סכום כולל של 400 שקלים.
מצאנו כי כל 8 החברים שילמו לכל הפחות 600 שקלים $(=400+200)$. בשלב זה ניתן לפסול את תשובות (1) ו-(4).

<u>מקסימום</u>: אם 4 חברים שילמו בין 50 ל-70 שקלים, הרי שלכל היותר שילם כל אחד מהם 70 שקלים.
כלומר, כל הארבעה שילמו לכל היותר 280 שקלים $(=4\cdot70)$.

יתר החברים שילמו בין 100 ל-130 שקלים כל אחד, כלומר כל אחד מהם שילם לכל היותר 130 שקלים, וכל ארבעת החברים הנותרים יחדיו שילמו לכל היותר סכום כולל של 520 שקלים $(=4\cdot130)$.

מצאנו כי 8 החברים שילמו לכל היותר 800 שקלים $(=520+280)$. תשובה (2) נפסלת.

תשובה (3).

הערה: מאחר וערכי המקסימום בכל התשובות שונים זה מזה, ניתן לחשב את המקסימום בלבד ולוותר על חישוב המינימום. ערך המקסימום שקיבלנו יביא אותנו בהכרח לתשובה הנכונה.

---

6. **השאלה**: מה היחס בין שטחו של משושה משוכלל שאורך צלעו a ס״מ, ובין שטחו של משושה משוכלל שאורך צלעו 3a ס״מ.

פיתרון: שני משושים משוכללים הן צורות דומות.

כפי שלמדנו, לגבי כל שתי צורות דומות מתקיים: יחס השטחים = (יחס קווי)^2.

נתון כי אורך צלעו של משושה משוכלל אחד הוא a ואורך צלעו של המשושה המשוכלל השני הוא 3a,
כלומר היחס הקווי בין שני המשושים הוא 1:3, ומכאן שיחס השטחים שלהם שווה ל-1:9 $\left[=(1:3)^2\right]$.

תשובה (1).

---

7. **השאלה**: בכיתה יש סך הכול 36 בנים ובנות. אם יוספו 5 נקודות לציון בחשבון של כל בן בכיתה, יגדל ממוצע הציונים של הכיתה בחשבון באותו מספר נקודות שהיה גדֵל אילו הוסיפו 4 נקודות לציון בחשבון של כל בת בכיתה.

מה מספר הבנים בכיתה?

פיתרון: דרך א': בדיקת תשובות
לפי נתוני השאלה ממוצע הציונים של כלל הכיתה בחשבון גדֵל באותו מספר כאשר מוסיפים 5 נקודות לציון בחשבון של כל בן בכיתה או כאשר מוסיפים 4 נקודות לציון בחשבון של כל בת בכיתה.
על פי נוסחת הממוצע: $\text{הממוצע} = \frac{\text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$.

לפי הנתונים, לפיהם הממוצע גדֵל בשני המקרים המתוארים באותו מספר, ומספר הילדים (המכנה) אינו משתנה, ניתן להסיק כי המונה **כלומר** סכום כל האיברים, גדֵל בשני המקרים המתוארים באותו מספר, או במילים אחרות: מכפלת מספר הבנים ב-5 שווה למכפלת מספר הבנות ב-4.

כעת נבדוק מי מהתשובות המוצעות מקיימת את המשוואה האמורה:

תשובה (1): 19.
אם מתוך 36 תלמידי הכיתה ישנם 19 בנים, הרי שבכיתה ישנן 17 בנות $(=36-19)$.
מכפלת מספר הבנים ב-5 שווה ל-95 $(=19\cdot5)$, ומכפלת מספר הבנות ב-4 שווה ל-68 $(=17\cdot4)$.
מכיוון שבמצב כזה ממוצע הציונים בכיתה לא יגדל באותו שיעור כאשר נוסיף 5 נקודות לציונו של כל אחד מן הבנים וכאשר נוסיף 4 נקודות לציונה של כל אחת מן הבנות, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.
הערה: לפי נתוני השאלה ניתן להסיק כי בהכרח מספר הבנים קטן ממספר הבנות ולפיכך ניתן לפסול תשובה זו מראש.

תשובה (2): 17.
אם מתוך 36 תלמידי הכיתה ישנם 17 בנים, הרי שבכיתה ישנן 19 בנות $(=36-17)$.
מכפלת מספר הבנים ב-5 שווה ל-85 $(=17\cdot5)$, ומכפלת מספר הבנות ב-4 שווה ל-76 $(=19\cdot4)$, ומכאן שזו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): 16.
אם מתוך 36 תלמידי הכיתה ישנם 16 בנים, הרי שבכיתה ישנן 20 בנות $(=36-16)$.
מכפלת מספר הבנים ב-5 שווה ל-80 $(=16\cdot5)$, ומכפלת מספר הבנות ב-4 שווה ל-80 $(=20\cdot4)$.
מצאנו כי זו התשובה הנכונה, ולפיכך אין צורך להמשיך ולבדוק את התשובה הרביעית.

דרך ב': יחסים
מהנתונים ניתן להסיק כי היחס שבין הבנים לבנות הפוך מהיחס בין הנקודות שיש להוסיף לכל אחד מחברי הקבוצה, כלומר היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה הוא 4:5.
ובמילים אחרות הבנים מהווים $\frac{4}{9}$ ממספר תלמידי הכיתה, והבנות מהוות $\frac{5}{9}$ ממספר התלמידים. אם הבנים מהווים $\frac{4}{9}$ מתוך 36 תלמידי הכיתה, הרי שישנם 16 בנים בכיתה $\left(=\frac{4}{9}\cdot36\right)$.

<u>דרך ג'</u>: בניית משוואה

נסמן את מספר הבנים בכיתה ב-x, ומכאן שמספר הבנות בכיתה הוא $(36-x)$.

בהסבר דרך א' הוכחנו כי מכפלת מספר הבנים ב-5 <u>שווה</u> למכפלת מספר הבנות ב-4, ומכאן ניתן לבנות את המשוואה: $5\cdot x=4\cdot(36-x)$

נפתח סוגריים: $5x=4\cdot 36-4x$

נחבר $4x$ לשני האגפים: $9x=4\cdot 36$

נחלק את שני האגפים ב-9 ונצמצם מונה עם מכנה ב-9: $x=\frac{4\cdot 36}{9}=\frac{4\cdot 36^{4}}{{}_{1}9}=\frac{4\cdot 4}{1}=16$

תשובה (3).

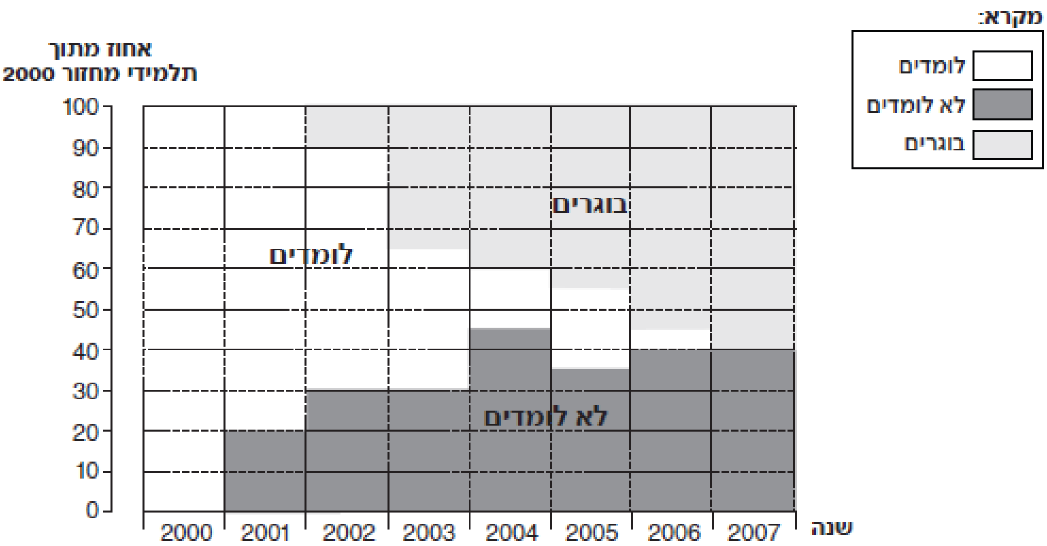
הסקה מתרשים (שאלות 8-11)

הסקה מתרשים (שאלות 8-11)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

בתרשים מוצג מידע הנוגע לתלמידים שהחלו ללמוד במכללה מסוימת בשנת 2000 (להלן: מחזור 2000).
התרשים מתאר את הסטטוס הלימודי של תלמידים אלה משנת 2000 ועד שנת 2007.
בכל שנה חולקו תלמידי מחזור 2000 ל-3 קבוצות (ראו מקרא): לומדים, לא לומדים (תלמידים שהפסיקו זמנית את לימודיהם), ובוגרים (תלמידים שסיימו את לימודיהם).
הנתונים עבור כל שנה מוצגים בתרשים בעמודה. חלוקתה הפנימית של כל עמודה מייצגת את אחוז התלמידים בכל קבוצה מתוך סך כל תלמידי מחזור 2000.

לדוגמה: בשנת 2005, 35% מתלמידי מחזור 2000 במכללה לא למדו, 20% למדו, ו-45% כבר היו בוגרים (סיימו את לימודיהם).



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

השאלות

8. **השאלה**: עבור איזו שנה היחס $\frac{\text{אחוז הלומדים}}{\text{אחוז הלא לומדים}}$ שווה ל-2?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 2001.

על פי התרשים בשנת 2001 אחוז הלומדים הוא 80%, ואחוז הלא הלומדים הוא 20%, ומכאן שהביטוי $\frac{\text{אחוז הלומדים}}{\text{אחוז הלא לומדים}}$ שווה ל-4 $\left(=\frac{80}{20}\right)$, וניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (2)</u>: 2002.

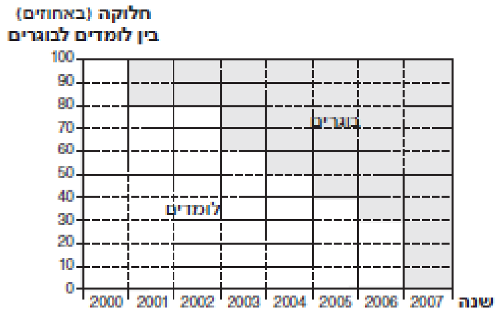
על פי התרשים אחוז הלומדים בשנת 2002 הוא 60%, ואחוז הלא הלומדים הוא 30%, ומכאן שהביטוי $\frac{\text{אחוז הלומדים}}{\text{אחוז הלא לומדים}}$ שווה ל-2 $\left(=\frac{60}{30}\right)$, מכיוון שזו התשובה הנכונה אין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

תשובה (2).

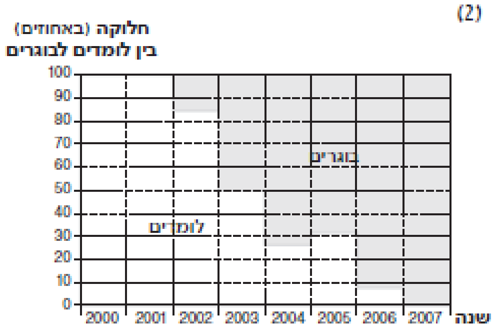
---

9. **השאלה**: איזה מהתרשימים הבאים מתאר את החלוקה (באחוזים) בין לומדים לבוגרים בכל אחת מהשנים (בלי להתחשב בקבוצת הלא לומדים)?

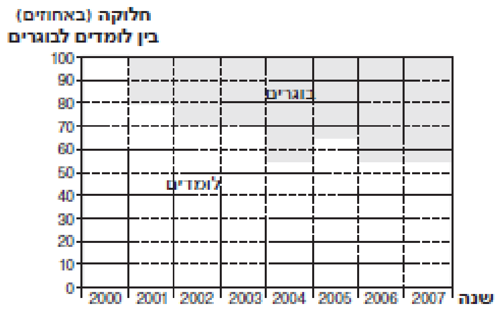
(1)



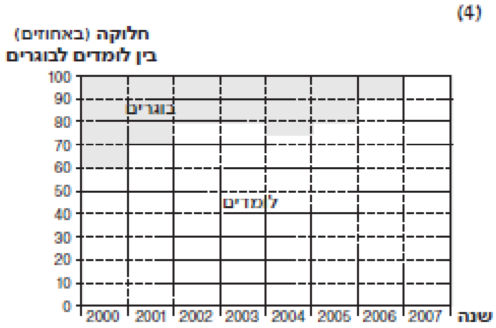
(2)



(3)



(4)



פיתרון: מכיוון שעל פי התרשים אין כלל בוגרים בשנים 2000 ו-2001 ניתן לפסול את תשובות (1), (3) ו-(4). ולכן התשובה הנכונה היא תשובה (2).

תשובה (2).

---

10. **השאלה**: באיזו שנה היו בפעם הראשונה יותר בוגרים מאשר לומדים?

פיתרון: מכיוון שנשאלנו מתי <u>לראשונה</u> היו יותר בוגרים מאשר לומדים, עלינו לבדוק מבחינה ויזואלית מתי החלק האפור הבהיר גדול מהחלק הלבן. נבדוק את התשובות לפי סדר כרונולוגי:

<u>תשובה (3)</u>: 2002.
אחוז הבוגרים בשנת 2002 הוא 10% ואחוז הלומדים הוא 60%, מכאן שניתן לפסול תשובה זו.

<u>תשובה (1)</u>: 2004.
ניתן להבחין כי אחוז הבוגרים בשנת 2004 גדול מאחוז הלומדים. אחוז הבוגרים בשנת 2004 הוא 40% ואחוז הלומדים הוא 15%, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

---

11. **השאלה**: באיזו שנה נוסף המספר הרב ביותר של בוגרים חדשים?

פיתרון: נבדוק את כל התשובות המוצעות, על מנת למצוא באיזו מהשנים המוצעות ישנה העלייה הגדולה ביותר במספר הבוגרים (ביחס לשנה הקודמת לה):

<u>תשובה (1)</u>: 2005.
אחוז הבוגרים בשנת 2004 הוא 40%, ואחוז הבוגרים בשנת 2005 הוא 45%, כלומר ישנו גידול של 5% במספר הבוגרים בשנת 2005 $(45\% - 40\% =)$.

<u>תשובה (2)</u>: 2002.
אחוז הבוגרים בשנת 2001 הוא 0%, ואחוז הבוגרים בשנת 2002 הוא 10%, כלומר ישנו גידול של 10% במספר הבוגרים בשנת 2002 $(10\% - 0\% =)$.

<u>תשובה (3)</u>: 2003.
אחוז הבוגרים בשנת 2002 הוא 10%, ואחוז הבוגרים בשנת 2003 הוא 35%, כלומר ישנו גידול של 25% במספר הבוגרים בשנת 2003 $(35\% - 10\% =)$.

<u>תשובה (4)</u>: 2004.
אחוז הבוגרים בשנת 2003 הוא 35%, ואחוז הבוגרים בשנת 2004 הוא 40%, כלומר ישנו גידול של 5% במספר הבוגרים בשנת 2004 $(40\% - 35\% =)$.

מצאנו כי אחוז הגידול הרב ביותר הוא בשנת 2003, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

הערה: על מנת לענות על השאלה יש לבדוק בתרשים באיזו שנה ניתן להבחין ויזואלית בעליה הגדולה/תלולה ביותר של בוגרים (משבצות אפורות). שנת 2003.

שאלות ובעיות (שאלות 12-20)

12. **השאלה**: שני ברזים **א** ו-**ב**, מזרימים מים לברֵכה.

ברז **א** ממלא את הברֵכה ב-5 שעות.

ברז **ב** ממלא את הברֵכה ב-10 שעות.

בכמה שעות ימלאו שני הברזים יחד את הברֵכה?

פיתרון: __דרך א׳__: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין נתון מספרי לגבי נפח הברֵכה נציב כי נפח הברֵכה הוא 10 ליטר, מספר אשר נוח לעבודה עם נתוני השאלה.

אם ברז **א** ממלא ברֵכה אשר נפחה 10 ליטר ב-5 שעות, הרי שהוא ממלא בכל שעה 2 ליטר $\left(=\frac{10}{5}\right)$.

אם ברז **ב** ממלא ברֵכה אשר נפחה 10 ליטר ב-10 שעות, הרי שהוא ממלא בכל שעה 1 ליטר $\left(=\frac{10}{10}\right)$.

כאשר שני הברזים ממלאים יחדיו את הברֵכה הם ממלאים בכל שעה 3 ליטר $(=2+1)$.

ולפיכך השאלה היא בכמה שעות ימלאו 2 ברזים אשר ממלאים יחדיו 3 ליטר בשעה, ברֵכה אשר נפחה 10 ליטר.

שעות	ליטר
1	3
X	10

מכיוון שהיחס בשורה הראשונה שווה ליחס בשורה השנייה, הרי ש: $\frac{10}{x}=\frac{3}{1}$

נכפול ב-x את שני האגפים, ונקבל: $3x=10$.

נחלק את שני האגפים ב-3, ונקבל: $x=3\frac{1}{3}$.

מצאנו כי שני הברזים ממלאים הברֵכה יחדיו ב-$3\frac{1}{3}$ שעות.

__דרך ב׳__: הספק פועלים שונים

על מנת לחבר בין פועלים שונים יש ״להביא״ אותם לעבוד באותו הזמן.
בשאלה שלפנינו נוח להביא את שני הברזים ל-10 שעות.
נתון כי ברז **א** ממלא את הברֵכה ב-5 שעות. כלומר ב-10 שעות, זמן הגדול פי 2, ימלא ברז **א**, כמות הגדול פי 2, כלומר 2 בריכות.

ברז **א** ממלא 2 בריכות ב-10 שעות, ברז **ב** ממלא ברֵכה ב-10 שעות, ומכאן שכאשר הם עובדים יחדיו הם ממלאים 3 בריכות ב-10 שעות.

על מנת למלא ברֵכה אחת , כמות הקטנה פי 3, עליהם לעבוד זמן הקטן פי 3, כלומר $3\frac{1}{3}$ שעות.

תשובה (4).

13. **השאלה**: a הוא מספר שלם וחיובי.

נתון: $b=2a$

$c=2b$

$d=2c$

$a+b+c+d$ **בהכרח** מתחלק ב-

פיתרון: __דרך א'__: הצבת דוגמה מספרית

מכיוון שאין נתונים מספריים בשאלה, נציב מספר נוח לעבודה, למשל $a=1$.

נתון כי $b=2a$, ומכאן שאם a שווה ל-1, הרי ש- $b=2$ $(b=2a=2\cdot1=)$.

נתון כי $c=2b$, אם b שווה ל-2, הרי ש- $c=4$ $(c=2b=2\cdot2=)$.

נתון כי $d=2c$. אם c שווה ל-4, הרי ש- $d=8$ $(d=2c=2\cdot4=)$.

מצאנו כי $a=1$, $b=2$, $c=4$ ו- $d=8$, ומכאן שהביטוי $a+b+c+d$ שווה ל-15 $(1+2+4+8=)$.

מכיוון ש-15 מתחלק ב-15 (תשובה (4)), אולם אינו מתחלק ב-7, ב-2, ב-12, התשובה הנכונה היא תשובה (4).

__דרך ב'__: פישוט אלגברי

נמיר את כל המשתנים למשתנה אחד.

נתון כי $b=2a$, ולכן במקום b נכתוב 2a.

נתון כי $c=2b$, ומכאן שאם $b=2a$, הרי ש- $c=4a$ $(c=2b=2\cdot2a=)$.

נתון כי $d=2c$, ומכאן שאם $c=4a$, הרי ש- $d=8a$ $(d=2c=2\cdot4a=)$.

מצאנו כי הביטוי $a+b+c+d$ שווה ל-15a $(a+2a+4a+8a=)$.

מכיוון ש-a הוא מספר שלם וחיובי, הרי שהביטוי הוא בהכרח כפולה שלמה של 15, כלומר מתחלק ב-15 ללא שארית.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: איזה מהיחסים הבאים **אינו** שווה ליחס $2:\sqrt{2}$?

פיתרון: בדיקת תשובות

__תשובה (1)__: $\sqrt{2}:1$.

נפשט את היחס שבתשובה על ידי מכפלת כל אחד מאגפיו ב- $\sqrt{2}$, ונקבל: $2:\sqrt{2}$ $(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} : 1\cdot\sqrt{2}=)$. מאחר וקיבלנו את היחס שבשאלה, ניתן לפסול תשובה זו.

__תשובה (2)__: $\sqrt{8}:2$.

נפשט את היחס שבתשובה על ידי פירוק $\sqrt{8}$ למכפלה $\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$, ונקבל: $2\sqrt{2}:2$.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל את היחס $\sqrt{2}:1$, אשר מצאנו [בבדיקת תשובה (1)] כי הוא שווה ליחס שבשאלה. התשובה נפסלת.

__תשובה (3)__: $\sqrt{8}:4$.

נפשט את היחס שבתשובה על ידי פירוק $\sqrt{8}$ למכפלה $\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$, ונקבל: $2\sqrt{2}:4$.

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל: $\sqrt{2}:2$, יחס השווה ליחס שבשאלה. התשובה נפסלת.

__תשובה (4)__: $\sqrt{16}:16$.

מכיוון ש- $\sqrt{16}$ שווה ל-4, הרי שהיחס הנתון שווה ל- $4:16$ אשר **אינו** שווה ליחס המקורי, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

15. **השאלה**: מספר השמלות של ענת הוא בדיוק 80% ממספר השמלות של דינה.

אם דינה תיתן לענת x% משמלותיה, יהיה לשתיהן מספר שווה של שמלות.

$x = ?$

פיתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שאין כל נתון מספרי לגבי מספר השמלות של ענת ודינה, נציב מספר אשר יהיה נוח לעבודה, למשל כי מספר השמלות של דינה הוא 100.
נתון כי מספר השמלות של ענת מהווה 80% ממספר השמלות של דינה, ולפיכך אם לדינה 100 שמלות הרי שלענת 80 שמלות $\left(80\% \cdot 100 = \frac{80}{100} \cdot 100 =\right)$.

כעת נציב את התשובות המוצעות, ונבדוק מי מהן מקיימת את הנתון לפיו כאשר דינה תיתן x% משמלותיה לענת יהיה מספר השמלות של שתיהן שווה.

<u>תשובה (1)</u>: 5%.
אם לדינה יש 100 שמלות, הרי ש- 5% משמלותיה הן 5 שמלות.
אם דינה תיתן לענת 5 שמלות, הרי שלדינה ישארו 95 שמלות $(100-5=)$, ולענת יהיו 85 שמלות $(80+5=)$, מכיוון שבמצב זה אין לשתיהן מספר שמלות שווה, זו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: 10%.
אם לדינה יש 100 שמלות, הרי ש- 10% משמלותיה הן 10 שמלות.
אם דינה תיתן לענת 10 שמלות, הרי שלדינה ישארו 90 שמלות $(100-10=)$, ולענת יהיו 90 שמלות $(80+10=)$, מכיוון שבמצב זה לשתיהן מספר שמלות שווה, זו התשובה הנכונה, ואין צורך להמשיך ולבדוק את יתר התשובות.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

נסמן את מספר שמלותיה של דינה ב-y. מספר השמלות של ענת הוא בדיוק 80% ממספר השמלות של דינה, כלומר שווה ל- $80\% \cdot y$.

אם דינה תיתן לענת x% משמלותיה, הרי שהיא תיתן לה x% מ-y שמלותיה, ולכן מספר השמלות שישארו בידי דינה יהיה שווה ל-$(y - x\% \cdot y)$.

אם ענת תקבל x% משמלותיה של דינה, הרי שמספר השמלות שיהיה ברשותה יהיה שווה ל-$(80\% \cdot y + x\% \cdot y)$.

מכיוון שעל פי נתוני השאלה, לאחר המעבר יהיה מספר השמלות של שתיהן שווה, ניתן לבנות משוואה, ולפיה: $y - x\% \cdot y = 80\% \cdot y + x\% \cdot y \Leftarrow y - \frac{x}{100} \cdot y = \frac{80}{100} \cdot y + \frac{x}{100} \cdot y$.

נכפול ב-100 את שני האגפים, ונקבל: $100y - xy = 80y + xy$.

על מנת לבודד את x באחד האגפים, נחבר xy לשני האגפים, ונחסר 80y, ונקבל: $20y = 2xy$.

נחלק ב-2y את שני האגפים, ונקבל: $10 = x$.

תשובה (2).

.16 **השאלה**: נתונים שני מספרים a ו-b , $a^2-b^2 \neq 0$

$$\frac{(a^3+a^2b)(a-b)^2}{a^2-b^2}=?$$

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: פישוט אלגברי

נוציא a^2 כגורם משותף מהביטוי אשר בסוגריים השמאליים במונה, ונקבל:

$$\frac{(a^3+a^2b)(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a^2\cdot(a+b))(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

נפשט את מכנה הביטוי על ידי שימוש בנוסחת הכפל המקוצר השלישית, ונקבל:

$$\frac{(a^2\cdot(a+b))(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a^2\cdot(a+b))(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}.$$

נחלק את מונה ומכנה הביטוי ב-$(a-b)$ וב-$(a+b)$, ונקבל: $\frac{(a^2\cdot(a+b))(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=a^2(a-b)$.

נפשט את הביטוי על ידי פתיחת הסוגריים, ונקבל: a^3-a^2b.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב כי $a=2$ ו-$b=1$, ונקבל כי ערכו של הביטוי הוא 4 $\left(\frac{(2^3+2^2\cdot1)(2-1)^2}{2^2-1^2}=\frac{(8+4)\cdot1}{4-1}=\frac{12}{3}=\right)$.

כעת נציב את הערכים של a ו-b בתשובות, ונמצא מי מהן שווה ל-4:

<u>תשובה (1)</u>: a^3-a^2b. נציב $a=2$ ו-$b=1$, ונמצא כי ערך הביטוי שווה ל-4 $(2^3-2^2\cdot1=8-4=)$.

<u>תשובה (2)</u>: a^3+ab^2. נציב $a=2$ ו-$b=1$, ונמצא כי ערך הביטוי שווה ל-10 $(2^3+2\cdot1^2=8+2=)$.

<u>תשובה (3)</u>: $\frac{a^3-b}{a-b}$. נציב $a=2$ ו-$b=1$, ונמצא כי ערך הביטוי שווה ל-7 $\left(\frac{2^3-1}{2-1}=\frac{7}{1}=\right)$.

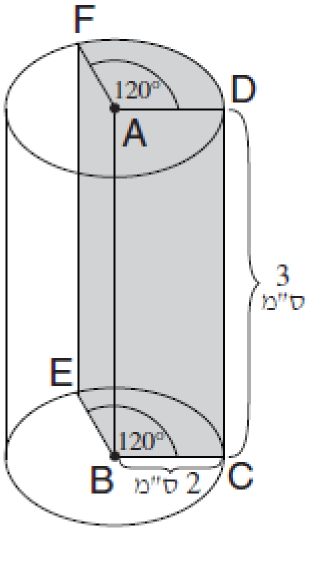
<u>תשובה (4)</u>: a^3+a^2b. נציב $a=2$ ו-$b=1$, ונמצא כי ערך הביטוי שווה ל-12 $(2^3+2^2\cdot1=8+4=)$.

תשובות (2), (3) ו-(4) נפסלות.

תשובה (1).

.17 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם גליל. A ו-B הם מרכזי בסיסיו.
ABCD ו-ABEF הם המלבנים המאונכים לבסיסי הגליל.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה נפח הגוף הכהה (בסמ"ק)?



פיתרון: הזווית המרכזית אשר יוצרת את השטח הכהה שבסרטוט היא בת $120°$. מכיוון שסכום זוויות מרכזיות הנשענות על כל היקף המעגל שווה ל-$360°$, ניתן לקבוע שהשטח הכהה שבסרטוט מהווה $\frac{1}{3}$ מנפח הגליל $\left(\frac{120°}{360°}=\right)$.

נחשב את נפח הגליל: נפחה של כל מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח בסיס המנסרה בגובהה.
רדיוס הגליל שבסרטוט שווה ל-2 ס"מ, וגובה המנסרה שווה ל-3 ס"מ, ומכאן שנפח הגליל כולו שווה ל-12π סמ"ק $(2^2\pi\cdot3=)$.
נפח הגוף הכהה שווה לשליש מנפח הגליל, כלומר ל-4π סמ"ק.

תשובה (4).

---

18. **השאלה**: במגירה מונחים 4 מטבעות של שקל אחד ו-4 מטבעות של חצי שקל.

יוסי מוציא מהמגירה 5 מטבעות.

כמה אפשרויות שונות יש **לסכום** הכסף שיהיה בידי יוסי?

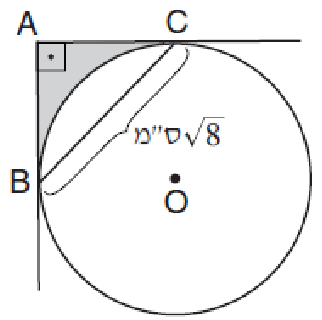
פיתרון: נפתור את השאלה באמצעות ספירה ידנית של מגוון האפשרויות הקיימות.
על מנת לעשות זאת, כדאי להתחיל ממצב קיצון כלשהו.
נניח כי יוסי הוציא בתחילה את כל המטבעות שערכם חצי שקל ומטבע אחד שערכו שקל. הערך הכולל של 5 המטבעות שהוציא יוסי במצב זה הוא 3 שקלים $\left(=4\cdot\frac{1}{2}+1\right)$.

מצאנו כי הסכום **המינימלי** שיוסי יכול להוציא הוא 3 שקלים.
אם יוסי הוציא 3 מטבעות שערכם חצי שקל ו-2 מטבעות שערכם שקל אחד, הערך הכולל של 5 המטבעות הוא $3\frac{1}{2}$ שקלים $\left(=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot1\right)$.
אם יוסי הוציא 2 מטבעות שערכם חצי שקל ו-3 מטבעות שערכם שקל אחד, הערך הכולל של 5 המטבעות הוא 4 שקלים $\left(=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1\right)$.
אם יוסי הוציא מטבע אחד שערכו חצי שקל ו-4 מטבעות שערכם שקל אחד, הערך הכולל של 5 המטבעות הוא $4\frac{1}{2}$ שקלים $\left(=1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1\right)$. מצאנו כי הסכום **המקסימלי** שיוסי יכול להוציא הוא $4\frac{1}{2}$ שקלים.

סך הכול מצאנו כי ישנן 4 סכומי כסף שונים שיוסי יכול להוציא: 3 שקלים; $3\frac{1}{2}$ שקלים; 4 שקלים ו- $4\frac{1}{2}$ שקלים.

תשובה (4).
הערה: דרך נוספת לפתרון השאלה היא באמצעות מציאת הסכום המינימלי שניתן להוציא השווה ל-3 שקלים, הסכום המקסימלי השווה ל- $4\frac{1}{2}$ שקלים, וההבנה כי ניתן להגדיל בכל פעם את הסכום ב- $\frac{1}{2}$ שקל על ידי החלפת מטבע שערכו חצי שקל במטבע שערכו שקל אחד.

.19 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.
AB ו-AC משיקים למעגל בנקודות B ו-C בהתאמה.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

פיתרון: ראשית נחליט כיצד אנו מתכוונים לחשב את השטח הכהה. מכיוון שהשטח הכהה אינו צורה גיאומטרית מוכרת או חלק ידוע של צורה כזו, עלינו למצוא מה שטחה של צורה אשר כוללת את השטח הכהה, ולהפחית את השטח הבהיר מתוכה.
ראשית נוריד רדיוסים לנקודות ההשקה B ו-C ונסמן 90°.
קיבלנו מרובע ABOC אשר 3 מזוויותיו הן בנות 90°. מכיוון שסכום זוויות פנימיות בכל מרובע שווה ל-360°, הרי שגם הזווית הרביעית – זווית BOC שווה ל-90° $\left(360^\circ - 3\cdot 90^\circ =\right)$.
מכיוון שכל זוויותיו של המרובע הן בנות 90°, הרי שהוא בהכרח מלבן.
במלבן ABOC אורכן של שתי צלעות סמוכות, הצלעות OC ו-OB, אשר מהוות רדיוס במעגל, שווה.
מכיוון שאורכן של כל זוג צלעות נגדיות במלבן שווה, הרי שאורכן של כל צלעות המלבן שווה, כלומר המלבן ABOC הוא ריבוע.
השטח הכהה שבסרטוט שווה לשטח הריבוע ABOC פחות שטח הגזרה אשר נוצרת על ידי הזווית BOC.
מכיוון שזווית BOC היא בת 90°, הרי שהגזרה BOC מהווה רבע מן המעגל.
נחשב את שטח הריבוע ואת שטחו של רבע המעגל:
BC, אלכסון הריבוע, שווה על פי נתוני הסרטוט ל- $\sqrt{8}$. מכיוון שאלכסון הריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מצלע הריבוע, הרי שאורכה של צלע הריבוע, שהיא גם רדיוס המעגל, קטן פי $\sqrt{2}$ מן האלכסון, כלומר שווה ל-2 ס"מ $\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} =\right)$.
שטח הריבוע שווה ל-4 סמ"ר $\left[(\text{צלע})^2 = 2^2 =\right]$.
שטח הגזרה BOC: אורכו של רדיוס המעגל הוא 2 ס"מ, ומכאן ששטח הגזרה BOC, המהווה רבע משטח המעגל שווה ל-π סמ"ר $\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2\pi =\right)$.
מצאנו כי גודלו של השטח הכהה שווה ל- $(4-\pi)$.

תשובה (4).

.20 **השאלה**: נתון: $a < b < |a \cdot b \cdot c| < c$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: הבנה אלגברית

נתון כי c גדול מערך מוחלט של הביטוי $a \cdot b \cdot c$. כאשר ביטוי כלשהו גדול מערך מוחלט ניתן להסיק כי הוא בהכרח חיובי, ולפיכך ניתן לקבוע כי $0 < c$.
מכיוון שלפי הנתון מכפלת המספר החיובי c ב-ab, מקטינה את ערכו המוחלט, הרי שהמכפלה ab היא בהכרח שבר חיובי או שבר שלילי, שכן כפל של c במספר אשר ערכו המוחלט הוא 1 או מספר אשר ערכו המוחלט גדול מ-1, אינה מקיימת את אי-השוויון. מצאנו כי $|a \cdot b| < 1$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב דוגמה מספרית המקיימת את הנתונים. למשל $c = 8$, $a = \frac{1}{4}$ ו- $b = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \left|\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\right| < 8 \;\Leftarrow\; \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < |1| < 8$$

תשובה (4) נפסלת.
כעת נציב דוגמה נוספת המקיימת את הנתונים במטרה לפסול תשובות נוספות: למשל $c = 1$, $a = -1$ ו- $b = \frac{1}{4}$.

קיבלנו כי: $-1 < \frac{1}{2} < \left|-1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right| < 1 \;\Leftarrow\; -1 < \frac{1}{4} < \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$.

כעת ניתן לפסול את תשובות (2), ו-(3).

תשובה (1).