מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(2)	(4)	(1)	(4)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-7)

.1 **השאלה**: במכונת כביסה תעשייתית כל מחזור כביסה נמשך 3 שעות, ועם סיומו מתחיל מיד מחזור כביסה חדש.
אם מכונת הכביסה פועלת ברציפות במשך 6 יממות, כמה מחזורי כביסה היא תכבס?

פיתרון: נתון כי המכונה מסיימת מחזור כביסה כל 3 שעות, ומכאן שביממה אחת, שבה יש 24 שעות תסיים המכונה 8 מחזורי כביסה $\left(=\frac{24}{3}\right)$.

במהלך 6 יממות תסיים המכונה בסך הכול 48 מחזורי כביסה $(=8\cdot6)$.

תשובה (3).

.2 **השאלה**: a, b ו-c הם שלושה מספרים שלמים **עוקבים** שסכומם הוא 0.

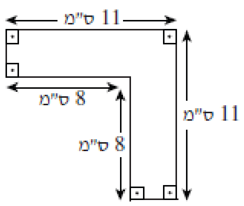
נתון: $a<b<c$

$|a|+|c|=?$

פיתרון: נתון כי a, b ו-c הם שלושה מספרים שלמים עוקבים שסכומם הוא 0, כלומר: $a+b+c=0$.
מכיוון שהפרש בין כל שני מספרים עוקבים הוא 1, ניתן לפשט את המשוואה הנתונה על ידי המרת את כל המשתנים למשתנה אחד. נמיר למשל את כל המשתנים ל-a, כך ש: $b=a+1$, ו- $c=a+2$, ונקבל:
$a+(a+1)+(a+2)=0 \Leftarrow 3a+3=0$.
נחסר 3 משני האגפים, ונקבל: $3a=-3 \Leftarrow a=-1$.
מצאנו כי a שווה ל-(-1), ומכאן ש-b שווה ל-0 ו-c שווה ל-1, ומכאן שסכום הערכים המוחלטים של a ו-c הוא 2 $\left(|a|+|c|=|1|+|-1|=1+1=\right)$.

תשובה (2).

.3 **השאלה**: מה שטח הצורה שבסרטוט (בסמ"ר)?



פיתרון: ניתן לחלק את הצורה שבסרטוט שלפנינו בכמה דרכים:
__דרך א'__: שני מלבנים.
מלבן אחד אופקי (המלבן העליון), אשר אורכו הוא 11 ס"מ.
רוחב המלבן שווה להפרש בין אורך הצלע הימנית, השווה ל-11 ס"מ, ואורכה של הצלע משמאלה שהיא 8 ס"מ, כלומר ל-3 ס"מ $(=11-8)$.
מכיוון שאורך המלבן הוא 11 ס"מ ורוחבו 3 ס"מ, הרי ששטח המלבן הוא 33 סמ"ר $(=11\cdot3)$.
המלבן השני הוא מלבן אשר אורכו 8 ס"מ ורוחבו 3 ס"מ, ומכאן ששטחו הוא 24 סמ"ר $(=8\cdot3)$.
שטח המלבן הראשון הוא 33 סמ"ר $(=11\cdot3)$, ושטח המלבן השני הוא 24 סמ"ר $(=8\cdot3)$, וביחד סכום שטחי שני המלבנים הוא 57 סמ"ר $(=24+33)$.

__דרך ב׳__ : ריבוע גדול אשר אורך צלעו 11 ס״מ אשר ממנו הפחיתו ריבוע אשר אורך צלעו 8 ס״מ.
שטח הריבוע הגדול הוא 121 סמ״ר $\left(=11^2\right)$, ושטח הריבוע הקטן הוא 64 סמ״ר $\left(=8^2\right)$, ומכאן ששטח הצורה שנוצרה הוא 57 סמ״ר $\left(=121-64\right)$.

תשובה (4).

---

4. **השאלה** : רינה באה למשרד הפנים ולקחה את המספר 73 לתור הממתינים לטיפול. משה בא רבע שעה אחריה ולקח את המספר 90.

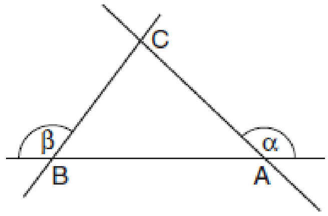
בהנחה שקצב לקיחת המספרים קבוע, כמה דקות לאחר שלקח משה את מספרו יילקח המספר 124?

פיתרון: משה הגיע רבע שעה אחרי רינה ולקח מספר הגדול מהמספר שלקחה רינה ב-17 $\left(=90-73\right)$,
ומכאן שניתן לקבוע כי קצב ההתקדמות לקיחת המספרים הוא 17 מספרים בכל רבע שעה, שהם 15 דקות.
המספר 124 גדול ב-34 מהמספר שלקח משה $\left(=124-90\right)$, כלומר המספר 124 גדול ב-$\left(2\cdot17\right)$ מהמספר שלקח משה. מכיוון שקצב ההתקדמות הוא 17 ב-15 דקות, הרי שהזמן שיידרש על מנת שילקחו 34 מספרים הוא כפול, כלומר שווה ל-30 דקות $\left(=2\cdot15\right)$.

תשובה (3).

---

5. **השאלה** : בסרטוט שלפניכם 3 ישרים שנחתכים ויוצרים את המשולש ABC.
נתון : $\beta<\alpha$



איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון : **__דרך א׳__**: הבנה גיאומטרית
α ו-β הן זוויות המשלימות זוויות פנימיות של המשולש. אם זווית α גדולה מזווית β, הרי שהזווית הצמודה לזווית α, זווית CAB קטנה מהזווית הצמודה לזווית β, זווית CBA. לסיכום: מצאנו כי $\angle CAB<\angle CBA$.
במשולש מול הזווית הגדולה מונחת הצלע הגדולה, ומכאן שבהכרח הצלע שמול הזווית הפנימית CBA, הצלע AC גדולה מהצלע שמול הזווית CAB, הצלע CB. תשובה (2).

__דרך ב׳__ : הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שאין נתונים מספריים, ונתון כי: $\beta<\alpha$, נציב כי זווית α שווה 100° וזווית β שווה ל-90°.
במצב זה הזווית הצמודה לזווית α, זווית CAB שווה ל-80° $\left(=180^\circ-100^\circ\right)$, והזווית הצמודה לזווית β, זווית CBA, שווה ל-90° $\left(=180^\circ-90^\circ\right)$. מכיוון שמצאנו מה גודלן של שתיים מזוויות המשולש, הרי שניתן לקבוע כי זווית הראש, זווית BCA שווה ל-10° $\left(=180^\circ-80^\circ-90^\circ\right)$.
במשולש מול הזווית הגדולה מונחת הצלע הגדולה, ומכאן שהצלע שמול הזווית CBA, הצלע AC היא הצלע הגדולה במשולש, ולכן תשובה (4) נפסלת.
הצלע השנייה בגודלה במשולש היא הצלע שמול הזווית CAB, הצלע CB והצלע הקטנה במשולש היא הצלע AB. תשובה (3) נפסלת.
מכיוון שנותרנו עם שתי תשובות, נציב שוב, והפעם נציב כי זווית α שווה 170° וזווית β שווה ל-160°.
במצב זה הזווית הצמודה לזווית α, זווית CAB שווה ל-10° $\left(=180^\circ-170^\circ\right)$, והזווית הצמודה לזווית β, זווית CBA, שווה ל-20° $\left(=180^\circ-160^\circ\right)$. מכיוון שמצאנו מה גודלן של שתיים מזוויות המשולש, הרי שניתן לקבוע כי זווית הראש, זווית BCA שווה ל-150° $\left(=180^\circ-20^\circ-10^\circ\right)$.
מצאנו כי הצלע הגדולה במשולש היא הצלע AB. בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (1), ומכאן שתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

תשובה (2).

---

6. **השאלה**: $0 < x \quad ; \quad x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = ?$

פיתרון: לפי חוקי חזקות כאשר יש כפל של בסיסים זהים ניתן לחבר את המעריכים, ולכן:

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{6}+\frac{9}{6}} = x^{\frac{13}{6}}$$

תשובה (4).

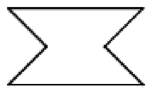
הערה: שימו לב שמי שמכיר את חוקי החזקות ולפיכך יודע כי יש לחבר את המעריכים יכול לקבוע כי מכיוון שאחד המעריכים הוא $\frac{3}{2}$ ואליו מחברים גורם חיובי נוסף, יכול לקבוע כי בהכרח המעריך של הביטוי המתקבל גדול מ-1. מכיוון שיש רק תשובה אחת שבה המעריך גדול מ-1, הרי שזו התשובה הנכונה.

---

7. **השאלה**: 2 טרפזים שווי-שוקיים מונחים זה לצד זה כך שאחת מצלעותיהם משותפת.

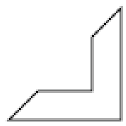
איזו מן הצורות הבאות **אינה** יכולה להתקבל?

(1)

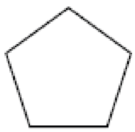


(2)

(3)



(4)



פיתרון: נבחן כל אחת מהתשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: אם נניח את שני הטרפזים כך שהבסיס הקטן יהיה משותף נקבל את הצורה המוצעת.

<u>תשובה (2)</u>: אם נהפוך את אחד הטרפזים כך שהבסיס הקטן יהיה הבסיס התחתון ונצמיד את השוקיים של שני הטרפזים נקבל את הצורה המוצעת בסרטוט.

<u>תשובה (3)</u>: אם נהפוך את אחד הטרפזים כך שהבסיס התחתון יהיה הבסיס הקטן ואז נצמיד את שוקי הטרפזים נקבל את הצורה המוצעת.

תשובה (4).

הסקה מטבלה (שאלות 8-11)

עיינו היטב בטבלה שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריה.

הטבלה מתארת תוצאות טורניר שהשתתפו בו 5 שחקנים: אילת, בני, גלית, דניאל והדס.
כל משחק בטורניר נערך בין שני שחקנים, אחד בתפקיד התוקף והאחר בתפקיד המגן.
כל שחקן שיחק פעמיים נגד כל אחד מן השחקנים האחרים: פעם אחת בכל אחד משני התפקידים.
כל משחק בטורניר הסתיים באחת מהתוצאות הבאות: ניצחון לתוקף, ניצחון למגן או תיקו.
כל משבצת בטבלה (פרט למשבצות הכהות שבאלכסון) מתארת תוצאה של משחק אחד בטורניר (ראו מקרא).

לדוגמה: במשחק בין בני לבין הדס, שבו שיחק בני בתפקיד התוקף והדס בתפקיד המגן, בני ניצח ואילו הדס הפסידה.

מקרא

- ↑ ניצחון לתוקף
- ⇨ ניצחון למגן
- X תיקו

מגן \ תוקף	אילת	בני	גלית	דניאל	הדס
אילת		⇨	↑	⇨	↑
בני	⇨		↑	X	X
גלית	X	⇨		X	⇨
דניאל	⇨	↑	⇨		↑
הדס	↑	↑	X	↑	

שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.8 **השאלה**: כל שחקן מקבל ניקוד בתום כל אחד ממשחקיו באופן הבא:
נקודה אחת אם הפסיד,
2 נקודות אם המשחק הסתיים בתיקו,
3 נקודות אם ניצח.

מה היה סך כל הנקודות שקיבל בני בטורניר?

פיתרון: ***__דרך א'__***: חילוץ והצבה
בני שיחק 4 משחקים כתוקף (העמודה שבראשה רשום בני) שבמסגרתם ניצח ב-2 משחקים והפסיד ב-2 משחקים, ולכן צבר במשחקים אלו בסך הכול 8 נקודות $(2\cdot 3+2\cdot 1=)$.

בני שיחק 4 משחקים כמגן (השורה השנייה) שבמסגרתם ניצח במשחק אחד, הפסיד את אחד המשחקים וב-2 משחקים סיים בתיקו, ובסך הכול צבר במשחקים אלו 8 נקודות $(1\cdot 3+2\cdot 2+1\cdot 1=)$.

סך הכול בכלל המשחקים ששיחק בני הוא צבר 16 נקודות $(8+8=)$.

תשובה (4).

9. **השאלה**: מה אחוז המשחקים שהסתיימו בתיקו מתוך כלל המשחקים שנערכו בטורניר?

פיתרון: בכל שורה מפורטים תוצאות של 4 משחקים ששוחקו בטורניר, מכיוון שבסך הכול יש 5 שורות, הרי שמספר המשחקים הכולל ששוחק בטורניר הוא 20 משחקים. נספור כמה משחקים הסתיימו בתיקו:
בשורה הראשונה אין כלל משחקים שהסתיימו בתיקו.
בשורה השנייה יש 2 משחקים שהסתיימו בתיקו.
בשורה השלישית יש 2 משחקים שהסתיימו בתיקו.
בשורה הרביעית אין כלל משחקים שהסתיימו בתיקו.
בשורה החמישית יש משחק אחד שהסתיים בתיקו.

סך הכול יש 5 משחקים שהסתיימו בתיקו מתוך 20 משחקים, כלומר בסך הכול רבע מהמשחקים $\left(=\frac{5}{20}\right)$ הסתיימו בתיקו אשר מהווים 25% מכלל המשחקים.

תשובה (2).

---

10. **השאלה**: נאמר ששני שחקנים הם באותה רמה אם לפחות אחד משני המשחקים שנערכו ביניהם הסתיים בתיקו.

כמה מן השחקנים הם ברמה של גלית?

פיתרון: נבדוק מי מהשחקנים אשר שיחק עם גלית סיים עימה משחק כלשהו בתוצאת תיקו.
ראשית נתבונן בשורה השלישית, כלומר במשחקים שבהם גלית שיחקה כמגן:
גלית סיימה בתוצאת תיקו במשחקים עם אילת ועם דניאל.
כעת נבדוק עם מי מהשחקנים סיימה גלית בתוצאת תיקו כאשר היא שיחקה כתוקפת, כלומר נתבונן בטור האמצעי, ונמצא כי גלית סיימה בתוצאת תיקו במשחקה עם הדס.
מצאנו כי בסך הכול גלית סיימה בתוצאת תיקו עם 3 שחקנים, ומכאן שניתן לקבוע כי יש 3 שחקנים ברמתה.

תשובה (3).

---

11. **השאלה**: שחקן חדש, חיים, הצטרף לטורניר ושיחק שני משחקים נגד כל אחד מן השחקנים האחרים – אחד בתפקיד המגן ואחד בתפקיד התוקף.
חיים ניצח בשנים מן המשחקים, הפסיד במשחק אחד וסיים בתיקו בכל יתר המשחקים.

אם תוצאות המשחקים החדשים יתווספו בהמשך לטבלה,
מה מהבאים אינו יכול מספר ה-$\uparrow$ שיתווספו?

פיתרון: נתון כי מבין כל המשחקים שחיים שיחק הוא ניצח בשנים מן המשחקים, והפסיד במשחק אחד, וכי כל יתר המשחקים הסתיימו בתוצאת תיקו.
על פי נתוני התרשים, חץ מסוג $\uparrow$ נרשם כאשר התוקף הוא שמנצח. נבדוק את האפשרויות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: 0.
במקרה שבו שני הנצחונות של חיים היו כאשר הוא היה מגן, וההפסד שלו היה כאשר הוא היה התוקף, לא יירשם כל חץ מסוג $\uparrow$. מכיוון שיתכן שיירשמו 0 חצים מהסוג $\uparrow$, הרי שהתשובה נפסלת.

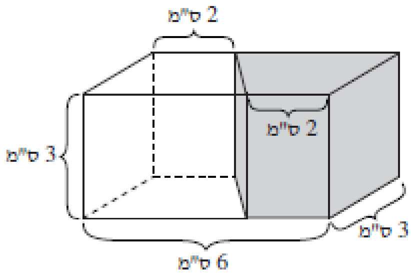
<u>תשובה (2)</u>: 2.
במקרה שבו שני הנצחונות של חיים היו כאשר הוא היה תוקף וההפסד שלו היה כאשר הוא היה תוקף, הרי שיירשמו 2 חיצים מסוג $\uparrow$ בטבלה, ומכאן שהתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 3.
במקרה שבו שני הנצחונות של חיים היו כאשר הוא היה תוקף וההפסד שלו היה כאשר הוא היה המגן, כלומר התוקף הוא שניצח הרי שיירשמו 3 חיצים מסוג $\uparrow$ בטבלה, ומכאן שהתשובה נפסלת.

תשובה (4) : 4.
מכיוון שבכל המשחקים של חיים הוא ניצח פעמיים והפסיד פעם אחת, הרי שבסך הכול יש 3 מנצחים. בשום מצב לא יתכן שכאשר 3 אנשים מנצחים יהיו 4 חיצים מסוג ↑ בטבלה, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 12-20)



12. **השאלה** : בסרטוט שלפניכם תיבה.
התיבה חולקה לשני חלקים (כהה ובהיר) כמתואר בסרטוט.

מה נפח החלק הכהה (בסמ"ק)?

פיתרון: דרך א' : נפח מנסרה ישרה
החלק הכהה שבסרטוט הוא מנסרה ישרה ששני בסיסיה הם טרפזים ישרי זווית, וגובהה הוא גובה התיבה, כלומר שווה ל-3 ס"מ.
נפח מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה המנסרה.
נתבונן בבסיס התיבה. בסיס המנסרה הישרה הוא טרפז ישר זווית שמהווה חלק מבסיס התיבה:
אורך הבסיס הקצר הוא 2 ס"מ ואורך הבסיס הארוך שווה לצלע התיבה, אשר אורכה על פי הסרטוט הוא 6 ס"מ, פחות 2 ס"מ, כלומר אורך הבסיס הארוך שווה ל-4 ס"מ $\left(6-2=\right)$.
גובה הטרפז הוא 3 ס"מ.
שטח בסיס המנסרה הישרה שווה לשטח הטרפז, כלומר ל-9 סמ"ר $\left(=\frac{(2+4)\cdot 3}{2}=\frac{\text{הגובה}\cdot(\text{סכום אורכי הבסיסים})}{2}\right)$.
גובה המנסרה הישרה הכהה הוא 3 ס"מ, ומכאן שנפח המנסרה הוא 27 סמ"ק $\left(=9\cdot 3=\text{גובה}\cdot(\text{שטח בסיס})\right)$.

דרך ב': סימטריה

נתבונן בבסיס התחתון של התיבה שלפנינו:
בסיס התיבה הוא מלבן אשר חולק באמצעות קו אלכסוני כך שנתקבלו שני טרפזים ישרי זווית: כהה ובהיר, כך שאורך הבסיס הקצר של כל אחד מהטרפזים שווה ל-2 ס"מ. מכאן שהבסיס הארוך של כל אחד מהטרפזים שווה אף הוא (ניתן לחשב כי אורכו של כל אחד מהבסיסים הוא 4 ס"מ).
מכיוון שבסיסי וגובהי כל אחד מהחלקים, הכהה והבהיר, שווים, הרי שנפח החלק הכהה שווה לנפח החלק הבהיר, ומכאן שנפח החלק הכהה שווה למחצית מנפח התיבה.
נפח התיבה שווה לשטח בסיסה כפול גובהה, כלומר ל-54 סמ"ק $\left(6\cdot 3\cdot 3=\right)$, ונפח החלק הכהה שווה למחצית נפחה של התיבה, כלומר ל-27 סמ"ק $\left(=\frac{54}{2}\right)$.

תשובה (2).

---

13. **השאלה**: הממוצע של 15, a ו-b גדול מהממוצע של 20 ו-a.

איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון בהכרח.

פיתרון: בניית אי-שיוויון

לפי נוסחת הממוצע: $\text{הממוצע} = \frac{\text{סכום כל האיברים}}{\text{מספר האיברים}}$.

מנתוני השאלה ניתן לבנות את אי-השיוויון הבא: $\frac{a+b+15}{3} < \frac{a+20}{2}$.

נכפול ב-6 את שני האגפים, ונקבל: $3\cdot(a+20) < 2\cdot(a+b+15) \Leftarrow 3a+60 < 2a+2b+30$

נחסר 2a ו-60 משני האגפים, ונקבל: $a < 2b-30$

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: ליאיר יש – שלושה כובעים בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק
שלוש חולצות בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק
שלושה זוגות מכנסיים בצבעים שונים: אדום, לבן וירוק

כשיאיר מתלבש, הוא תמיד מקפיד לצרף כובע, חולצה וזוג מכנסיים – כל אחד בצבע אחר.

כמה צירופים **שונים** של כובע, חולצה ומכנסיים יכול יאיר ללבוש?

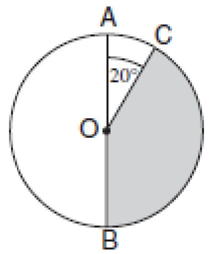
פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: ספירה ידנית
מכיוון שהמספרים בתשובות קטנים, מומלץ לספור ידנית את האפשרויות השונות שיש ליאיר:
אם יאיר לובש מכנסיים אדומים הרי שהוא יכול ללבוש חולצה לבנה או ירוקה.
כאשר הוא לובש חולצה לבנה, הרי שהוא יכול לחבוש כובע בצבע היחיד שבו הוא לא עשה עדיין שימוש, כלומר כובע ירוק. כאשר הוא לובש חולצה ירוקה הוא חובש בהכרח כובע לבן.
מצאנו כי כאשר יאיר לובש מכנסיים אדומים יש לו 2 אפשרויות לבוש שונות, ומכאן שגם כאשר יאיר לובש מכנסיים שחורים יש לו 2 אפשרויות שונות (מכנסיים שחורים + חולצה אדומה + כובע ירוק; מכנסיים שחורים + חולצה ירוקה + כובע אדום) , וגם כאשר יאיר לובש מכנסיים לבנים יש לו 2 אפשרויות לבוש שונות.
סך הכול מצאנו כי ליאיר יש 6 אפשרויות לבוש שונות $(=2+2+2)$.

<u>דרך ב'</u>: סלי בחירה
אין כל התייחסות לסדר הבחירה של יאיר, ולכן נניח כי הוא ראשית בוחר מכנסיים, לאחר מכן חולצה ואז כובע.
<u>מכנסיים</u>: מספר אפשרויות הבחירה השונות של יאיר הוא 3 (מכנסיים אדומים, לבנים או ירוקים).
<u>חולצה</u>: לאחר שיאיר בחר מכנסיים בצבע כלשהו, ומכיוון שאסור לו לבור שני פריטים בצבע זהה, הרי שמספר אפשרויות הבחירה השונות של יאיר הוא 2.
<u>כובע</u>: לאחר בחירת מכנסיים וחולצה נותרה ליאיר אפשרות אחת בלבד.
מספר האפשרויות הכולל שווה למכפלת מספר האפשרויות בכל סל בחירה, כלומר 6 אפשרויות שונות $(=3\cdot2\cdot1)$.

תשובה (1).

---

15. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ושטחו 9π סמ"ר. AB הוא קוטר במעגל.
נתון: $\angle A0C = 20^\circ$.



מה שטח הגזרה הכהה (בסמ"ר)?

פיתרון: שטח גזרה שווה למכפלת שטח המעגל בחלק שמהווה הזווית המרכזית היוצרת את הגזרה מתוך הזווית המרכזית שיוצרת את המעגל, כלומר מ-360° או בכתיבה אלגברית: $\text{שטחמעגל}\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}$.

שטח המעגל לפי נתוני השאלה הוא: 9π סמ"ר.
הזווית המרכזית היוצרת את הגזרה הכהה, זווית BOC, שווה לזווית המרכזית הנוצרת על ידי הקוטר, כלומר 180° פחות הזווית AOC, השווה ל-20°, ומכאן שהזווית COB שווה ל-160°.

שטח הגזרה הכהה הוא 4π סמ"ר $\left(\frac{160^\circ}{360^\circ}\cdot 9\pi = \frac{4}{9}\cdot 9\pi =\right)$.

תשובה (4).

---

16. **השאלה**: x ו-y הם מספרים שלמים.
נתון: $x + 2y = z$

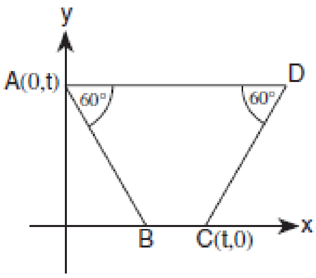
$2x + y = z + 1$

המכפלה $x \cdot y$ בהכרח?

פיתרון: כאשר נתונה מערכת משוואות, ראשית עלינו להחליט מי המשתנה או המשתנים מהם אנו רוצים 'להיפטר'. מכיוון שבשאלה שלפנינו אנו נשאלים על x ו-y ניפטר מ-z.
על פי המשוואה הראשונה ערכו של z הוא $x + 2y$. נציב ערך זה במקום z במשוואה השנייה, ונקבל $2x + y = x + 2y + 1$.
נחסר x ו-y משני האגפים, ונקבל: $x = y + 1$.
מכיוון שעל פי הנתונים x ו-y הם מספרים שלמים שמצאנו באמצעות פתרון מערכת המשוואות כי ההפרש ביניהם הוא 1, הרי שניתן לקבוע כי x ו-y הם מספרים עוקבים.
במקרה של שני מספרים עוקבים, אחד המספרים יהיה תמיד זוגי והאחר אי-זוגי, ומכאן שתוצאת מכפלתם של x ו-y היא בהכרח מספר זוגי.

תשובה (1).

.17 **השאלה**: במערכת הצירים שלפניכם, ABCD הוא טרפז.



לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה ערכי הנקודה D?

פיתרון: נתבקשנו למצוא את ערכה של נקודה D.
ערך ה-y: מכיוון שנתון כי ABCD הוא טרפז, הרי שבסיסיו מקבילים זה לזה, ומכאן שהבסיס AD מקביל לבסיס BC הנמצא על גבי ציר ה-x. אם AD הוא קו המקביל לציר ה-x, הרי שבהכרח ערכי ה-y של כל הנקודות הנמצאות עליו זהה, ומכאן שערך ה-y של נקודה D זהה לערך ה-y של נקודה A, כלומר שווה ל-t.

ערך ה-x:
לפי נתוני הסרטוט זוויות הבסיס של הטרפז, הזוויות BAD ו-CDA שוות זו לזו, ומכאן שניתן לקבוע כי ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.
כאשר מורידים שני אנכים מקודקודי הבסיס הקטן בטרפז שווה-שוקיים, מקבלים מלבן ושני משולשים ישרי-זווית חופפים.
נוריד שני גבהים מהקודקודים B ו-C, ונקבל שני משולשים ישרי זווית חופפים.
ערך ה-x של נקודה D שווה ל-(ערך ה-x של נקודה C) + המרחק האופקי בין נקודה C ל-D.
מכיוון ששני המשולשים ישרי-הזווית חופפים, הרי שהמרחק האופקי בין נקודה C לנקודה D שווה למרחקה של נקודה B מראשית הצירים.
נסמן את נקודת ראשית הצירים ב-O, ונתבונן במשולש ישר-הזווית, המשולש AOB ($\angle AOB$ שווה ל-$90°$):
נתון כי זווית DAB שווה ל-$60°$, ולפיכך זווית OAB שווה ל-$30°$ $(= 90° - 60°)$.
מצאנו כי משולש AOB הוא משולש זהב, אשר הניצב הקטן שלו, הניצב שמול הזווית בת ה-$30°$ הוא OB ואורכו של הניצב הגדול הוא t.
אורך הניצב הגדול במשולש זהב גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הניצב הקטן, ומכאן שאורך הניצב הקטן שווה ל- $\frac{t}{\sqrt{3}}$.
ערך ה-x של נקודה D שווה ל-(ערך ה-x של נקודה C) + המרחק האופקי בין נקודה C ל-D:
מצאנו כי ערך ה-x של נקודה C הוא t, ומכיוון שהמרחק האופקי שבין נקודה C לנקודה D שווה לאורך הניצב BO, כלומר, ל- $\frac{t}{\sqrt{3}}$, הרי שערך ה-x של נקודה D הוא: $t + \frac{t}{\sqrt{3}}$.

תשובה (4).

.18 **השאלה**: לאבנר היו כמה עפרונות. הוא נתן x% מהם לגלעד, ומתוך העפרונות שנשארו לו הוא נתן x% לדניאל $(0 < x < 100)$.

מה היחס בין מספר העפרונות שקיבל גלעד לבין מספר העפרונות שקיבל דניאל?

פיתרון: **דרך א'**: הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שאין כל נתונים מספריים בשאלה, ניתן להציב מספר נוח כמספר העפרונות ההתחלתי של אבנר, למשל 100, ומספר נוח כלשהו במקום x, לדוגמה 10.
לאבנר היו 100 עפרונות והוא נתן 10% מהם לגלעד, כלומר 10 עפרונות.
לאחר שאבנר נתן 10 עפרונות לגלעד, נותרו לו 90 עפרונות $(=100-10)$.
אבנר נתן לדניאל 10% מהעפרונות שנותרו לו, 10% מ-90 עפרונות הם 9 עפרונות, ומכאן שדניאל קיבל 9 עפרונות.
כעת נציב $x = 10$ בתשובות, ונמצא כי תשובות (1), (2) ו-(3) נפסלות.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה
נסמן את מספר העפרונות שהיו לאבנר ב-z.

אבנר נתן x% מהעפרונות שהיו ברשותו לגלעד, כלומר $\frac{x}{100}\cdot z$.

מתוך העפרונות שנותרו לאבנר, כלומר מתוך: $z-\frac{x}{100}z$, נתן אבנר x% לדניאל, כלומר אבנר נתן לדניאל: $\frac{x}{100}\cdot\left(z-\frac{xz}{100}\right)$.

כאמור, מספר העפרונות שקיבל גלעד הוא: $\frac{x}{100}\cdot z$.

מספר העפרונות שקיבל דניאל הוא: $\frac{x}{100}\cdot\left(z-\frac{xz}{100}\right)$.

היחס בין מספר העפרונות שקיבל גלעד למספר העפרונות שקיבל דניאל הוא:
$\frac{x}{100}\cdot z\ :\ \frac{x}{100}\cdot\left(z-\frac{xz}{100}\right)$.

נחלק ב- $\frac{x}{100}$ את שני האגפים, ונקבל: $z\ :\ z-\frac{xz}{100}$.

נכפול ב-100, ונחלק ב-z את שני האגפים, ונקבל: $100:100-x$

תשובה (4).

---

19. **השאלה**: לכל מספר שלם חיובי x הוגדרה הפעולה $ כך: אם x זוגי, $\$(x)=\frac{x}{2}$

אם x אי-זוגי, $\$(x)=\frac{x+1}{2}$

איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: אלגברה
נעבור על התשובות המוצעות:
<u>תשובה (1)</u>: $\$(2x-1)=x-1$

x הוא מספר שלם וחיובי, ומכאן שהביטוי 2x הוא זוגי, והביטוי $(2x-1)$ הוא בהכרח ביטוי אי-זוגי, ולכן נפעיל את הפעולה המתאימה למספרים אי-זוגיים, כלומר $\$(x)=\frac{x+1}{2}$ על הביטוי $(2x-1)$, ונקבל: $\$(2x-1)=\frac{2x-1+1}{2}=\frac{2x}{2}=x$.

מכיוון שמצאנו כי $\$(2x-1)=x$, ולא כפי שנטען בתשובה, הרי שזו אינה התשובה הנכונה.

<u>תשובה (2)</u>: $\$(2x+1)=x+1$

x הוא מספר שלם וחיובי, ומכאן שהביטוי 2x הוא זוגי, הביטוי $(2x+1)$ הוא בהכרח ביטוי אי-זוגי, ולכן נפעיל את הפעולה $\$(x)=\frac{x+1}{2}$ על הביטוי $(2x+1)$, ונקבל:

$\$(2x+1)=\frac{2x+1+1}{2}=\frac{2x+2}{2}=x+1$.

מכיוון שמצאנו כי $\$(2x+1)=x+1$, כפי שנטען בתשובה, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב $x=1$ בכל אחת מהתשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: $\$(2x-1)=x-1$.

כאשר $x=1$ הטענה שבתשובה היא ש: $\$(1)=0$ $[\$(2\cdot1-1)=1-1]$.

הביטוי $\$(1)$ שווה לפי הגדרת הפעולה $, ל-1 $\left(\$(1)=\frac{1+1}{2}=\right)$, מכיוון שלפי הטענה שבתשובה, הביטוי אמור להיות שווה ל-0, ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (2)</u>: $\$(2x+1)=x+1$

כאשר $x=1$ הטענה שבתשובה היא ש: $\$(3)=2$ $[\$(2\cdot1+1)=1+1]$.

הביטוי $\$(3)$ שווה לפי הגדרת הפעולה $, ל-2 $\left(\$(3)=\frac{3+1}{2}=\right)$.

מכיוון שמצאנו כי $\$(2x+1)=x+1$, כפי שנטען בתשובה, הרי שלא ניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (3)</u>: $\$(x)+\$(x+1)$ הוא מספר אי-זוגי

כאשר $x=1$ הטענה שבתשובה היא ש: $\$(1)=\$(2)$ $[\$(1)=\$(1+1)]$.

הביטוי $\$(1)$ שווה לפי הגדרת הפעולה $, ל-1 $\left(\$(1)=\frac{1+1}{2}=\right)$

הביטוי $\$(2)$ שווה לפי הגדרת הפעולה $, ל-1 $\left(\$(2)=\frac{2}{2}=\right)$.

מכיוון שמצאנו כי הביטויים $\$(1)$ ו-$\$(2)$ אינם שווים זה לזה, הרי שניתן לפסול את התשובה.

<u>תשובה (4)</u>: $\$(x)+\$(x+1)$ הוא מספר זוגי

כאשר $x=1$ הטענה שבתשובה היא ש: $\$(1)+\$(2)$ הוא מספר זוגי.
בהסבר לתשובה הקודמת מצאנו כי ערך הביטוי $\$(1)$ הוא 1, וכי ערך הביטוי $\$(2)$ הוא 1, ומכאן שערך הביטוי $\$(1)+\$(2)$ שווה ל-2 $(1+1)$, ולכן לא ניתן לפסול בשלב זה את התשובה.
כעת נציב כי $x=2$ בתשובה (4), ונקבל טענה לפיה $\$(2)+\$(3)$ הוא מספר זוגי.
בהסבר לתשובה הקודמת מצאנו כי ערך הביטוי $\$(2)$ הוא 1, וכי ערך הביטוי $\$(3)$ הוא 2, ומכאן שערך הביטוי $\$(2)+\$(3)$ שווה ל-3 $(1+2)$, ולכן ניתן לפסול את התשובה שכן לפיה התוצאה היא מספר זוגי.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות, הרי שהתשובה הנכונה היא תשובה (2).

תשובה (2).

.20 **השאלה**: אביתר נמצא ב-A ובנימין נמצא ב-B.

בשעה 8:00 התחיל אביתר ללכת במהירות קבועה של 6 קמ״ש מ-A לכיוון B.
t דקות לאחר מכן התחיל בנימין ללכת במהירות קבועה של 8 קמ״ש מ-B לכיוון A.
אביתר ובנימין נפגשו במחצית הדרך בין A ל-B בשעה 8:40.

$t = ?$

פיתרון: **<u>דרך א׳</u>**: בדיקת תשובות
נתון כי אביתר ובנימין נפגשו במחצית הדרך בין A ל-B בשעה 8:40, ומכאן ששניהם הלכו מרחקים שווים עד לשעה זו. נציב את התשובות המוצעות ונבדוק לגבי כל אחת מהן האם המרחק הכולל שהלך אביתר עד ל-8:40 שווה למרחק הכולל שהלך בנימין עד 8:40.

<u>תשובה (1)</u>: 10.
נתון כי אביתר התחיל ללכת מ-A לכיוון B בשעה 8:00.
נתון כי t דקות, כלומר 10 דקות לאחר מכן התחיל בנימין ללכת מ-B לכיוון A, ומכאן שהוא התחיל ללכת בשעה 8:10.
עד לשעת פגישתם בשעה 8:40, אביתר הלך 40 דקות, שהם $\frac{2}{3}$ שעה, במהירות 6 קמ״ש, כלומר עבר מרחק של 4 ק״מ $\left(\frac{2}{3}\cdot 6 =\right)$.
בנימין הלך משעה 8:10 ועד 8:40, 30 דקות, שהם מחצית השעה, במהירות 8 קמ״ש, כלומר עבר מרחק של 4 ק״מ $\left(\frac{1}{2}\cdot 8 =\right)$.
מצאנו שהמרחקים שעברו אביתר ובנימין עד לשעת הפגישה ביניהם שווים, ומכאן שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב׳</u>: בניית משוואה
נתון כי אביתר ובנימין נפגשו במחצית הדרך בין A ל-B בשעה 8:40, ומכאן שכל אחד מהם עבר מרחק שווה. נבנה את הביטויים המתמטיים המתארים את המרחקים שעברו בנימין ואביתר ונשווה ביניהם:
<u>המרחק שעבר אביתר</u>:
נתון כי אביתר התחיל ללכת מ-A לכיוון B בשעה 8:00 ונפגש עם בנימין בשעה 8:40, כלומר אביתר הלך 40 דקות, שהם $\frac{2}{3}$ שעה, במהירות 6 קמ״ש, כלומר עבר מרחק של 4 ק״מ $\left(\frac{2}{3}\cdot 6 =\right)$.
<u>המרחק שעבר בנימין</u>:
נתון כי בנימין התחיל ללכת מ-A לכיוון B t דקות לאחר שאביתר התחיל ללכת ונפגש עם אביתר בשעה 8:40, כלומר בנימין הלך $(40-t)$ דקות, שהם $\left(\frac{40-t}{60}\right)$ שעה, במהירות 8 קמ״ש.
בנימין עבר מרחק של $\left(\frac{40-t}{60}\cdot 8 =\right)$.

כעת נשווה בין שני הביטויים שקיבלנו, ונקבל: $\frac{40-t}{60}\cdot 8 = 4 \Leftarrow \frac{40-t}{15}\cdot 2 = 4$.
נכפול ב-15 את שני האגפים, ונקבל: $(40-t)\cdot 2 = 60 \Leftarrow 80-2t = 60$.
נחסר 60 ונחבר 2t לשני האגפים, ונקבל: $20 = 2t \Leftarrow 10 = t$.

תשובה (1).