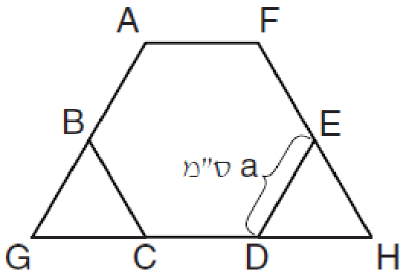
מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(3)	(3)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(2)	(4)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(3)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)



.1 **השאלה**: בסרטוט שלפניכם ABCDEF הוא משושה משוכלל.
G ו-H הן נקודות מפגש של המשכי צלעות המשושה.

לפי נתונים אלה והנתונים שבסרטוט,
מה היקף הטרפז AGHF (בס"מ)?

פיתרון: מכיוון שנתון כי המשושה שבסרטוט הוא משוכלל, כל צלעותיו שוות זו לזו ולכן ידוע לנו כי $CD = BC = AB = AF = FE = a$
על מנת למצוא את היקף הטרפז, עלינו למצוא את אורכן של הצלעות המרכיבות את היקף הטרפז.
גודלה של כל זווית פנימית במשושה משוכלל הוא $120°$, ומכאן ש- $\angle GBC = \angle BCG = \angle DEH = \angle EDH = 60°$. מכאן ניתן לקבוע שהמשולשים BGC ו-EDH הם שווי-צלעות, ואורך כל אחת מצלעותיהם שווה ל-a ס"מ.
מכיוון שהיקף הטרפז AGHF מורכב מ-8 קטעים אשר אורכו של כל אחד מהם הוא a, היקף הטרפז שווה ל-8a.

תשובה (3).

.2 **השאלה**: x הוא מספר שלם.

נתון: $x^2 < 16$

$2x + 4 < 0$

$x = ?$

פיתרון: <u>**דרך א'**</u>: הצבת תשובות

<u>תשובה (1)</u>: 1. נציב 1 באי-השיוויון הראשון, ונקבל: $1 < 16$. כעת נמשיך ונבדוק האם 1 מקיים גם את אי-השיוויון השני. מכיוון שבהצבת 1 באי-השיוויון השני מקבלים כי: $6 < 0$, אי-שיוויון שאינו נכון, הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 2. נציב 2 באי-השיוויון הראשון, ונקבל: $4 < 16$. כעת נמשיך ונבדוק האם 2 מקיים גם את אי-השיוויון השני. מכיוון שבהצבת 2 באי-השיוויון השני מקבלים כי: $8 < 0$, אי-שיוויון שאינו נכון, הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 3-. נציב 3- באי-השיוויון הראשון, ונקבל: $(-3)^2 < 16$ ⇦ $9 < 16$. כעת נבדוק האם 3- מקיים גם את אי-השיוויון השני. מכיוון שבהצבת 3- באי-השיוויון השני מקבלים כי: $-2 < 0$, הרי שזו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

אי-השוויון הראשון הנתון הוא: $x^2 < 16$. המספרים החיובים המקיימים את אי-השיוויון קטנים מ-4 והמספרים השליליים המקיימים אותו גדולים מ-(-4). בשלב זה ניתן לפסול את תשובה (4).

אי-השוויון השני הוא: $2x + 4 < 0$. נחסר 4 משני האגפים, ונקבל: $2x < -4$.
נחלק ב-2, ונקבל: $x < -2$. תשובות (1) ו-(2) נפסלות.

תשובה (3).

---

3. **השאלה**: לכל זוג מספרים x ו-y $(x \neq y)$ הוגדרו הפעולות $ ו-# כך:
$\$(x, y)$ = המספר **הקטן** מתוך שני המספרים x ו-y.
$\#(x, y)$ = המספר **הגדול** מתוך שני המספרים x ו-y.

$$\#(\$(7,5), \$(8,4)) = ?$$

פיתרון: נפתור את השאלה בשלבים כך שנתחיל בפתרון הפעולות שבתוך הסוגריים.
חשוב לשים לב ששתי הפעולות בסוגריים הן $ ולכן פתרונן יהיה המספר **<u>הקטן</u>** מבין השניים:
ערכו של הביטוי $\$(7,5)$ הוא המספר הקטן מבין השניים, כלומר 5.
ערכו של הביטוי $\$(8,4)$ הוא המספר הקטן מבין השניים, כלומר 4.
קיבלנו את הביטוי $\#(5,4)$.
הפעולה # שווה לערך **<u>הגדול</u>** מבין השניים ולכן ערכו של הביטוי $\#(5,4)$ הוא 5.

תשובה (3).

---

4. **השאלה**: במדינת נפלנד נערכו תחרויות ספורט, ובסופן חולקו סך הכול 120 מדליות.
שום אדם לא זכה ביותר ממדליה אחת.
70% מהזוכים במדליות באו מאיי הדרום.
40% מהזוכים במדליות גרים בבקתות קש.

כמה זוכים במדליות, **לכל הפחות**, באו מאיי הדרום וגם גרים בבקתת קש?

פיתרון: השאלה שלפנינו היא שאלת חפיפה שבה נתבקשנו למצוא את החפיפה המינימלית בין קבוצת "איי הדרום" לבין קבוצת "בקתות הקש". כדי למצוא את הכמות המינימלית של זוכים כאלה יש לחבר את שתי הקבוצות ולחסר מהם את השלם.
על פי נתוני השאלה, קבוצת המתגוררים באיי הדרום מהווה 70% מהשלם, וקבוצת המתגוררים בבקתות הקש מהווה 40% מהשלם. סכום שתי הקבוצות הוא 110% $(= 70\% + 40\%)$, וכאשר נחסר ממנו את השלם, נמצא כי החפיפה המינימלית היא 10% $(= 110\% - 100\%)$.
10% מ-120, הם 12.

תשובה (2).

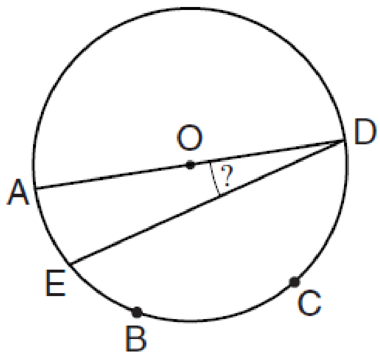
---

5. **השאלה**: נתון גליל שרדיוס בסיסו r ס"מ. נפח הגליל הוא r סמ"ק.

מה גובה הגליל (בס"מ)?

פיתרון: נתבקשנו למצוא אורך של קו כלשהו, לפיכך נבנה משוואה על מנת לחלץ ממנה את הנתון המבוקש. נסמן את גובה הגליל ב-h.
נפח כל מנסרה ישרה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובהה, ומכאן שנפח הגליל שווה ל- $r^2\pi \cdot h$,
נתון כי נפח הגליל שווה ל-r, ומכאן: $r^2\pi \cdot h = r$.
נחלק את שני האגפים בביטוי $r^2\pi$, ונקבל: $h = \frac{1}{r\pi}$ $\left(h = \frac{r}{r^2\pi}\right)$.

תשובה (2).



6. **השאלה**: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O. AD הוא קוטר במעגל. הנקודות B ו-C מחלקות את הקשת AD ל-3 קשתות שוות. הנקודה E היא אמצע הקשת AB.

$\angle ADE = ?$

פיתרון: כידוע, במעגל על קשתות שוות מונחות זוויות שוות.
לכן, אם נתון כי הקשתות AB, BC ו-CD שוות, נוכל להסיק כי הזוויות המרכזיות הנשענות עליהן שוות, כלומר:
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD$
נתון כי AD הוא קוטר המעגל, ולפיכך סכום שלושת הזוויות שווה ל-$180°$.
נסמן כל אחת מהזוויות ב-α: $3\alpha = 180°$ ⇦ $\alpha = 60°$.
על פי הנתון הנקודה E היא אמצע הקשת AB, ולכן קשתות AE ו-EB שוות. מכיוון שהזוויות המרכזיות AOE ו-EOB נשענות על קשתות אלו, הרי שניתן לקבוע כי הזוויות שוות אף הן. סכום שתי זוויות אלה שווה לזווית AOB, אשר שווה כאמור ל-$60°$, ומכאן שכל אחת מהן שווה ל-$30°$.
$\sphericalangle ADE$ היא זווית היקפית הנשענת על הקשת AE, ולכן שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. מצאנו כי זווית AOE שווה ל-$30°$, ומכאן שזווית ADE שווה ל-$15°$.

תשובה (4).

---

7. **השאלה**: סיגל עבדה במסעדה במשך 7 חודשים. בממוצע עבדה סיגל 17 ימים בחודש.

אם ידוע שב-3 החודשים הראשונים עבדה סיגל סך הכול 75 ימים,
כמה ימים סך הכול היא עבדה ב-4 החודשים האחרונים?

פיתרון: עלינו למצוא את <u>כמות</u> הימים שעבדה סיגל ב-4 החודשים האחרונים.
כאשר נתון ממוצע ומספר איברים ניתן באמצעות נוסחת הממוצע למצוא את כמות הימים הכוללת שעבדה סיגל בכל 7 החודשים. $17 = \frac{\text{סך כול הימים}}{7}$ ⇦ $7 \cdot 17 = \text{סך כול הימים}$ ⇦ $119 = \text{סך כול הימים}$.
אם סיגל עבדה סך הכול 119 ימים במשך שבעה חודשים, ובשלושת החודשים הראשונים עבדה סך הכול 75 ימים, הרי שבארבעת החודשים האחרונים עבדה סיגל 44 ימים $(119 - 75 =)$.

תשובה (3).

---

8. **השאלה**: נתון: $(x+y)^2=8$

$(x-y)^2=6$

$x\cdot y=?$

פיתרון: **__דרך א'__**: חילוץ והצבה

נפשט את המשוואות על ידי פתיחתן באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר, ונקבל:

$(x+y)^2=8 \Leftarrow x^2+y^2+2xy=8$

$(x-y)^2=6 \Leftarrow x^2+y^2-2xy=6$

מכיוון שאנו רוצים למצוא את ערכו של הביטוי $x\cdot y$ עלינו להיפטר מהביטוי (x^2+y^2), נחלץ ביטוי זה מהמשוואה הראשונה, ונציב במשוואה השנייה: $x^2+y^2=8-2xy$.

כעת נציב ערך זה במשוואה השנייה, ונקבל: $8-2xy-2xy=6 \Leftarrow 8-4xy=6$.

נחבר $4xy$ ונחסר 6 משני האגפים, ונקבל: $2=4xy$.

נחלק ב-4 את שני האגפים, ונקבל: $\frac{1}{2}=xy$.

__דרך ב'__: חיסור משוואות

כדי להגיע לביטוי $x\cdot y$ עלינו לפתוח את הסוגריים בכל אחת מהמשוואות הנתונות:

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=8$

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=6$

עלינו לבודד מתוך משוואות אלו רק את הביטוי $x\cdot y$, כלומר להיפטר מהביטוי: x^2+y^2 ולכן נחסר בין המשוואות:

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+2xy=8 \\ -\quad x^2+y^2-2xy=6 \\ \hline 4xy=2 \end{array}$$

נחלק את שני האגפים ב-4, ונקבל: $xy=\frac{1}{2}$

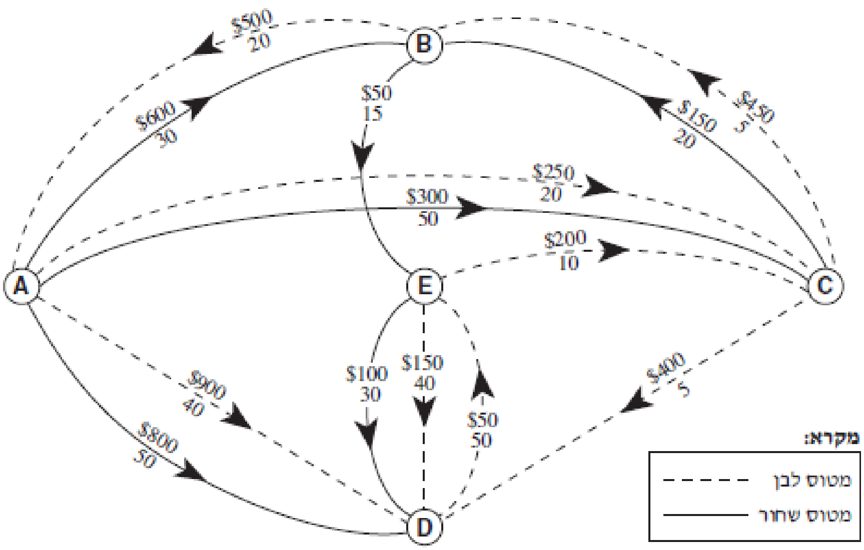
תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 12-9)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

התרשים מתאר את הטיסות הקבועות של חברת תעופה מסוימת בין חמש ערים: A, B, C, D ו-E.
הטיסות נעשות במטוסים שחורים או במטוסים לבנים. מחיר כרטיס הטיסה ומספר הנוסעים במטוס קבועים לכל טיסה.
קו רצוף מייצג טיסה במטוס שחור, וקו מקווקו מייצג טיסה במטוס לבן (ראו מקרא). על כל קו מופיע חץ המסמן את כיוון הטיסה. ליד כל קו רשומים שני מספרים: המספר העליון (שלידו הסימן $) הוא מחיר כרטיס לטיסה זו, והמספר התחתון הוא מספר הנוסעים בטיסה.

לדוגמה: מחירו של כרטיס טיסה מהעיר A לעיר B במטוס שחור הוא 600 דולר, ומספר הנוסעים בטיסה זו הוא 30.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה, התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

.9 **השאלה**: כאשר טסים _____ הטיסה במטוס שחור יְקָרָה יותר מהטיסה במטוס לבן.

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות לנו ונראה באילו מהן עלות טיסה במטוס שחור גבוהה מעלותה במטוס לבן.

<u>תשובה (1)</u>: מ-E ל-D
טיסה במטוס שחור מ-E ל-D תעלה $100 ובמטוס לבן תעלה $150.
מכיוון שהטיסה במטוס לבן יקרה יותר, התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: מ-A ל-D
טיסה במטוס שחור מ-A ל-D תעלה $800 וטיסה במטוס לבן תעלה $900.
מכיוון שהטיסה במטוס לבן יקרה יותר, התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: מ-C ל-B
טיסה במטוס שחור מ-C ל-B תעלה $150 וטיסה במטוס לבן תעלה $450.
הטיסה במטוס לבן יקרה יותר ולכן התשובה נפסלת.
כעת, לאחר שפסלנו 3 תשובות אפשר לסמן את תשובה (4) מבלי לבדוק אותה אך נמשיך לשם השלמת ההסבר.

<u>תשובה (4)</u> : מ-A ל-C
טיסה במטוס שחור תעלה 300$ וטיסה במטוס לבן תעלה 250$. הטיסה במטוס שחור יקרה יותר ולכן זוהי התשובה הנכונה.

תשובה (4).

.10 **השאלה** : מירב יצאה מעיר A וטסה ליעד שלה בשתי טיסות, זו אחרי זו.
איזו מהערים הבאות **לא** יכולה להיות עיר היעד של מירב?

פיתרון: נבדוק את התשובות המוצעות וננסה בכל תשובה למצוא נתיב טיסה מהעיר A המגיע לעיר המוצעת בשתי טיסות. עיר שאליה **לא נצליח** להגיע בשתי טיסות היא התשובה הנכונה.

<u>תשובה (1)</u> : E
מהעיר A נוכל לטוס לעיר D במטוס שחור או לבן, מעיר D נוכל לטוס לעיר E במטוס לבן.
מכיוון שקיים נתיב תעופה מהעיר A לעיר E בשתי טיסות הרי שתשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (2)</u> : B
מהעיר A נוכל לטוס לעיר C במטוס שחור או לבן, מעיר C נוכל לטוס לעיר B במטוס שחור או לבן.
מכיוון שקיים נתיב תעופה מהעיר A לעיר B המאפשר הגעה בשתי טיסות תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u> : C
מהעיר A אפשר לטוס ישירות לעיר C, אולם אנו מבקשים למצוא נתיב לעיר C אשר עובר דרך עיר אחרת, ולכן נבדוק את יתר האפשרויות. מהעיר A ניתן לטוס רק לעיר D או B. לעיר D נוכל לטוס במטוס שחור או לבן, כמו בתשובה (1), אך משם אין טיסה לעיר C. מכיוון שגם מעיר B לא ניתן להגיע לעיר C, הרי שמצאנו כי לא ניתן להגיע מהעיר A לעיר C דרך עיר נוספת, ולכן זוהי התשובה הנכונה.

תשובה (3).

.11 **השאלה** : ידוע כי בשבוע מסוים הטיסה במטוס לבן מהעיר A לעיר D יצאה n פעמים, והטיסה במטוס שחור מהעיר A לעיר D יצאה 9n פעמים.
מה היה המספר הממוצע של נוסעים בטיסה מהעיר A לעיר D באותו שבוע?

פיתרון: כדי לחשב את ממוצע הנוסעים בשבוע זה עלינו לגלות את הכמות הכוללת של הנוסעים בטיסות מהעיר A ל-D באותו שבוע, במטוסים שחורים ולבנים, ולחלק במספר הטיסות הכולל.
מכיוון שאינו יודעים את כמות הטיסות הכוללת. עומדות בפנינו שתי אפשרויות:
נוכל להציב מספר מהראש במקום n או שנוכל להתעלם ממנו ולהתייחס אך ורק ליחס בין הכמויות.
חשוב לזכור שבממוצע משוקלל מה שקובע הוא <u>**היחס בין מספר האיברים**</u> בכל קבוצה ולא מספר האיברים.

אפשרות א':
נציב כי $n=1$, ומכאן שהייתה טיסה אחת במטוס לבן בין העיר A לעיר D שעליה היו 40 נוסעים, ו-9 טיסות של מטוסים שחורים אשר על כל אחד מהם היו 50 נוסעים.
סך הכול היו 10 טיסות $(=1+9)$, שעליהן בסך הכול 490 נוסעים $(=9\cdot 50+1\cdot 40)$.
ממוצע הנוסעים בטיסות בין העיר A לעיר D באותו שבוע הוא 49 $\left(=\frac{490}{10}\right)$.

אפשרות ב': מציאת הממוצע בעזרת היחס:
לפני נתוני השאלה ידוע לנו כי היחס בין כמות הטיסות במטוס לבן לכמות הטיסות במטוס שחור הוא 1:9 בהתאמה. במטוס לבן שטס מהעיר A לעיר D יש 40 נוסעים, ובמטוס שחור יש 50 נוסעים.
מכיוון שהממוצע צריך להיות בין 40 ל-50, ניתן לפסול את תשובה (1).
אם שתי ה'קבוצות' היו שוות, כלומר מספר הטיסות במטוס לבן שווה למספר הטיסות במטוס שחור, מספר הנוסעים הממוצע בטיסה היה בדיוק באמצע, כלומר 45, מכיוון שמספר הטיסות במטוס שחור גדול יותר, הרי שהממוצע אינו יכול להיות 45 (תשובה (3) נפסלת), ובנוסף ניתן להסיק כי בהכרח הממוצע קרוב יותר ל-50, ולכן מבלי לחשב ניתן לקבוע שהתשובה הנכונה היא תשובה (2).

תשובה (2).

.12 **השאלה**: ידוע כי הרווח של חברת תעופה ממכירת כרטיס טיסה הוא 20% ממחיר הכרטיס עבור טיסה במטוס לבן, ו-10% ממחיר הכרטיס עבור טיסה במטוס שחור.

ביום מסוים יצאה כל אחת מהטיסות המתוארות בתרשים פעם אחת בלבד.
כמה דולרים הרוויחה חברת תעופה באותו יום מכל הטיסות **שיצאו** מהעיר C?

פיתרון: על מנת לענות על השאלה, עלינו למצוא את כל הטיסות שיצאו מהעיר C, את כמות הנוסעים בכל טיסה, את צבע המטוס ומחיר הכרטיס. מכל טיסה כזו נחשב את הרווח של חברת התעופה מכל כרטיס ונכפיל רווח זה בכמות הנוסעים כדי לחשב את הרווח הכולל מאותה טיסה. נסכם את כל הנתונים בטבלה מסודרת:

יעד הטיסה	מחיר כרטיס	כמות הנוסעים	צבע המטוס	רווח מכרטיס בודד	רווח כולל מהטיסה
העיר B	$450	5	לבן	$\frac{20}{100}\cdot 450=90$	$90\cdot 5=450$
העיר B	$150	20	שחור	$\frac{10}{100}\cdot 150=15$	$15\cdot 20=300$
העיר D	$400	5	לבן	$\frac{20}{100}\cdot 400=80$	$80\cdot 5=400$

סך הכול הרווח של חברת התעופה מאותו שבוע הוא סכום הרווחים מכל הטיסות, כלומר $1,150 ($\$450+\$300+\$400=$).

תשובה (2).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. **השאלה**: נתון: a שווה ל-20% מ-b
b שווה ל-20% מ-c
a שווה ל-x% מ-c

$x = ?$

פיתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית
מכיוון שאין כל נתון מספרי בשאלה, נציב מספר במקום הנעלם אשר ממנו נשאלנו כמה שווה x, כלומר, מכיוון שנשאלנו לכמה אחוזים שווה a **מתוך c**, נציב 100 במקום c.

נתון כי b שווה ל-20% מ-c. אם c שווה ל-100, הרי ש-b שווה ל-20% מ-100, כלומר ל-20.
נתון כי a שווה ל-20% מ-b. אם b שווה ל-20, הרי ש-a שווה ל-20% מ-20. 10% מ-20 הם 2, ומכאן ש-20% מ-20 שווים ל-4 $(2 \cdot 2 =)$.
מצאנו כי כאשר c שווה ל-100, a שווה ל-4, ומכאן ש-a מהווה 4% מתוך c, כלומר $x = 4$.

דרך ב':
נתאר את נתוני השאלה בעזרת משוואות לפי נוסחת האחוזים ונבודד מהן את x:

נתון כי a שווה ל-20% מ-b, כלומר: $a = \frac{20}{100} \cdot b$.
נתון כי b שווה ל-20% מ-c, כלומר: $b = \frac{20}{100} \cdot c$.
נתון כי a שווה ל-x% מ-c, כלומר: $a = \frac{x}{100} \cdot c$.

כעת נשתמש בכל אחת מהמשוואות הראשונות כדי לבודד את הנעלמים a ו-c, וכך נישאר עם משוואה אחת המכילה שני נעלמים (x ו-b) כאשר את b נוכל לצמצם משני אגפי המשוואה:
נתון כי $a = \frac{20}{100} \cdot b$, מכיוון ש- $b = \frac{20}{100} \cdot c$, נציב נתון זה במשוואה הראשונה, ונקבל:
$a = \frac{20}{100} \cdot \frac{20}{100} c \Leftarrow a = \frac{4}{100} c$.
נציב נתון זה במשוואה השלישית $a = \frac{x}{100} \cdot c$, ונקבל: $\frac{4}{100} \cdot c = \frac{x}{100} \cdot c$.
נחלק את שני האגפים ב-c, ונכפול ב-100, ונקבל: $4 = x$.

תשובה (4).

---

14. **השאלה**: בשק א' יש תשעה פתקים הממוספרים מ-2 עד 10.
בשק ב' יש תשעה פתקים הממוספרים מ-11 עד 19.

יניב שולף באקראי פתק אחד מכל שק.

$\frac{\text{הסיכוי שמספר הפתק שיניב ישלוף משק א' הוא ראשוני}}{\text{הסיכוי שמספר הפתק שיניב ישלוף משק ב' הוא ראשוני}} = ?$

פיתרון: כדי לענות על השאלה עלינו למצוא את כמות הפתקים הממוספרים במספרים ראשוניים בכל שק.
בשק א' יש 4 מספרים ראשוניים: 2, 3, 5 ו-7.
בשק ב' יש גם 4 מספרים ראשוניים: 11, 13, 17 ו-19.
בכל שק ישנם 10 פתקים ומתוכם 4 פתקים של מספרים ראשוניים, ולכן הסיכוי שיניב ישלוף פתק ראשוני בשני השקים שווה ל- $\frac{4}{10}$. מכיוון שהסיכוי במונה ובמכנה שווים, מנת החלוקה בין הסיכויים שווה ל-1.

תשובה (1).

---

15. **השאלה**: מהירות האור היא 300,000,000 מטר בשנייה.

מה הדרך שאור עובר ב- 10^{-9} שניות (במטרים)?

פיתרון: כדי לענות על השאלה נשתמש בנוסחת הדרך, וזאת מכיוון שנתונה לנו המהירות והזמן שהאור בתנועה. עם זאת, לפני שנציב בנוסחה, נבטא את מהירות האור בעזרת ביטוי פשוט יותר הכולל 3 המוכפל ב-10 בחזקה כלשהי (מכיוון שהזמן נתון בתור בביטוי הכולל גם 10 בחזקה מסוימת). כדי לדעת באיזו חזקה עלינו להעלות את 10, נספור את כמות האפסים שיש ב-300,000,000.

ב-300,000,000 יש 8 אפסים ולכן: $300{,}000{,}000 = 3\cdot 10^8$

כעת נציב את הנתונים בנוסחת הדרך $s = t\cdot v$:

$$s = 3\cdot 10^8 \cdot 10^{-9} = 3\cdot 10^{8+-9} = 3\cdot 10^{-1} = 3\cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

תשובה (2).

---

16. **השאלה**: a ו-b הם מספרים שלמים ועוקבים.

נתון: $x = a^2 - b^2 + a - b$

איזה מהטענות הבאות נכונה **בהכרח**?

פיתרון: <u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית

נציב מספרים נוחים במקום a ו-b. למשל: $a = 1$ ו- $b = 2$.

כעת נמצא מה ערכו את x: $x = a^2 - b^2 + a - b = 1^2 - 2^2 + 1 - 2 = -4$

מצאנו כי x שווה ל-(4-), כלומר מספר זוגי ושלילי, ומכאן שתשובות (2) ו-(4) נפסלות.

כעת נציב שני מספרים נוספים כדי לפסול תשובה נוספת. מכיוון שלא נתון מי גדול יותר, a או b, נוכל פשוט להפוך את ההצבה: $a = 2$ ו- $b = 1$.

כעת נמצא את ערכו של x: $x = a^2 - b^2 + a - b = 2^2 - 1^2 + 2 - 1 = 4$

מכיוון שכעת קיבלנו מספר חיובי וזוגי ולכן גם תשובה (3) נפסלת. התשובה שנותרה היא התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>:

נפשט את הביטוי שבצד ימין של המשוואה הנתונה כדי לראות מה מתחייב לגבי x:

$$x = a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b) + (a-b)$$

נוציא את הביטוי $(a-b)$ כגורם משותף, ונקבל: $x = (a-b)(a+b+1)$

נתבונן בביטוי שקיבלנו:

a ו-b הם שני מספרים עוקבים אשר איננו יודעים מי מהם גדול יותר, מכיוון שההפרש בין שני מספרים עוקבים שווה תמיד ל-1, הרי שהביטוי $(a-b)$ שווה ל-1 או ל-(1-).

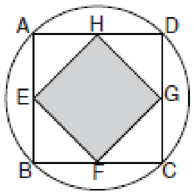
הביטוי $(a+b+1)$ הוא בהכרח זוגי בוודאות מכיוון שסכום של שני מספרים עוקבים $(a+b)$ הוא בהכרח אי-זוגי וכאשר נוסיף לו 1 נקבל מספר זוגי.

לסיכום: x הוא מכפלה של מספר זוגי כלשהו ב-1 או ב-(1-), ולפיכך x בהכרח זוגי (תוצאת המכפלה של מספר זוגי במספר כלשהו זוגית בוודאות).

תשובה (1).

---

17. **השאלה**: במעגל **שהיקפו** 8π ס״מ חסום ריבוע ABCD, כבסרטוט.
E, F, G ו-H הן אמצעי צלעות הריבוע.



מה שטח הריבוע הכהה EFGH (בסמ״ר)?

פיתרון: כדי למצוא את שטח הריבוע עלינו למצוא את אורך הצלע שלו.
את צלע הריבוע נוכל למצוא בעזרת צלע הריבוע הגדול ABCD ולכן נתחיל בלמצוא את אורכה. לפי היקף המעגל נוכל למצוא את רדיוס המעגל:
$2r\pi = 8\pi$, נחלק את שני האגפים ב-2π, ונקבל: $r = 4$.
בריבוע אשר חסום במעגל, קוטר המעגל הוא אלכסון הריבוע ומכאן שאלכסון הריבוע AC שווה ל-8 ס״מ.
מכיוון שאלכסון הריבוע גדול פי $\sqrt{2}$ מצלע הריבוע ABCD, הרי שאם אלכסון הריבוע שווה ל-8 ס״מ, הרי שצלע הריבוע שווה ל- $\frac{8}{\sqrt{2}}$, כלומר צלע הריבוע שווה ל- $4\sqrt{2}$ ס״מ.

הקטע HD שווה למחצית מצלע הריבוע ולכן $HD = 2\sqrt{2}$.
משולש HDG הוא משולש ישר-זווית אשר כל אחד מניצביו שווה למחצית מצלע הריבוע ABCD, מכאן שיתר המשולש HG גדול פי $\sqrt{2}$ מצלע המשולש.
מכיוון שאורך הניצב HD שווה ל- $2\sqrt{2}$ אורכו של היתר HG, שהוא גם צלע הריבוע EFGH, שווה ל-4 ס״מ $\left(2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =\right)$.

שטח הריבוע EFGH שווה ל- $(HG)^2$, ומכאן ששטח הריבוע EFGH הוא 16 סמ״ר $\left(4^2 =\right)$

תשובה (1).

---

18. **השאלה**: לאיציק ודני יש יחד 20 קלפים.

איציק העביר 7 קלפים לדני, וכעת נותרו לאיציק 2 קלפים פחות מלדני.

$\frac{\text{מספר הקלפים שהיו לאיציק לפני ההעברה}}{\text{מספר הקלפים שהיו לדני לפני ההעברה}} = ?$

פיתרון: **דרך א׳**: אלגברה
נבנה שתי משוואות בשני נעלמים לפי נתוני השאלה, כאשר נסמן את כמות הקלפים המקורית של איציק ב-x ואת כמות הקלפים המקורית של דני ב- $(20 - x)$.
לפי הנתונים לאחר שאיציק העביר לדני 7 קלפים נותרו לאיציק 2 קלפים פחות מלדני, ומכאן:
$x - 7 + 2 = (20 - x) + 7 \Leftarrow x - 5 = 27 - x$
נחבר x ו-5 לשני האגפים ונקבל: $2x = 32$.
נחלק ב-2 את שני האגפים, ונקבל: $x = 16$.

מצאנו כי לאיציק היו 16 קלפים, ולדני היו 4 קלפים, ומכאן שמנת החלוקה של מספר הקלפים שהיו בידי איציק למספר הקלפים שהיו לדני שווה ל-4 $\left(\frac{16}{4} =\right)$.

דרך ב׳: הצבת דוגמה מספרית
ננסה לחשוב על שני מספרים שמתאימים לנתונים השאלה. עלינו למצוא שני מספרים שסכומם 20 ושההפרש ביניהם הוא 2. שני המספרים היחידים המתאימים לנתונים אלה הם 9 ו-11. ידוע כי לאיציק היו 2 קלפים פחות מדני לאחר ההעברה ולכן, לאחר שמצאנו את המספרים המתאימים, נוכל להסיק שכמות הקלפים שהייתה לאיציק לאחר ההעברה היא 9 ושל דני היא 11.
כדי לענות על השאלה עלינו לגלות את כמות הקלפים המקורית של כל אחד מהם. ידוע כי איציק העביר לדני 7 קלפים ולכן אם לאחר ההעברה היו לאיציק 9 קלפים, הרי שלפני ההעברה היו לו 16 קלפים $(9 + 7 =)$, ולדני היו 4 קלפים לפני ההעברה $(11 - 7 =)$. כעת נחלק בין כמות הקלפים המקורית של איציק לבין כמות הקלפים המקורית של דני, ונקבל 4 $\left(\frac{16}{4} =\right)$

תשובה (4).

---

19. **השאלה**: נתונים שלושת השברים הבאים: $\frac{3}{25},\frac{4}{30},\frac{5}{40}$

איזה מהאי-שיוויונות הבאים נכון?

פיתרון: **<u>דרך א'</u>**: השוואת שברים

על מנת לקבוע איזה מאי השוויונים נכון נשווה בין זוגות השברים השונים הנתונים. נתחיל בהשוואה בין הזוג $\frac{5}{40}$ ו- $\frac{4}{30}$. נרחיב את כל אחד מהמכנים של השברים ל-120, ונקבל: $\frac{15}{120}=\frac{5}{40}$ ו- $\frac{16}{120}=\frac{4}{30}$.

כאשר לשני שברים יש מכנים שווים, הרי שהשבר שהמונה שלו גדול יותר הוא השבר הגדול, ומכאן כי השבר $\frac{4}{30}$ גדול מהשבר $\frac{5}{40}$. מכיוון שלפי אי השוויון בתשובה (2), השבר $\frac{5}{40}$ גדול מהשבר $\frac{4}{30}$, הרי שתשובה זו נפסלת.

כעת נשווה את השבר $\frac{3}{25}$ עם השבר $\frac{5}{40}$, נרחיב את שני השברים כך שמוני השברים יהיו שווים ל-15, ונקבל: $\frac{15}{125}=\frac{3}{25}$ ו- $\frac{15}{120}=\frac{5}{40}$.

כאשר לשני שברים יש מונים שווים, הרי שהשבר שהמכנה שלו קטן יותר הוא השבר הגדול, ומכאן כי השבר $\frac{5}{40}$ גדול מהשבר $\frac{3}{25}$. מכיוון שלפי אי-השוויונים המוצעים בתשובות (1) ו-(4), השבר $\frac{3}{25}$ גדול מהשבר $\frac{5}{40}$, הרי שתשובות אלו נפסלות, ומכאן שהתשובה הנכונה היא תשובה (3).

<u>דרך ב'</u>: הערכת סדר גודל

אם נצמצם ב-8 את מונה ומכנה השבר $\frac{5}{40}$, נקבל כי ערכו של השבר שווה ל- $\frac{1}{8}$.

כעת נבדוק מה יחסם של שני השברים הנותרים לעומת $\frac{1}{8}$.

$\frac{3}{25}$. אם מכנה השבר היה שווה ל-24, הרי שהשבר היה שווה בדיוק ל- $\frac{1}{8}$, מכיוון שהמכנה גדול מ-24, ואנו יודעים שכאשר מחלקים במספר גדול יותר ערכו של השבר קָטֵן, הרי שהשבר $\frac{3}{25}$ קטן מ- $\frac{1}{8}$.

$\frac{4}{30}$. אם מכנה השבר היה שווה ל-32, הרי שהשבר היה שווה בדיוק ל- $\frac{1}{8}$, מכיוון שהמכנה קטן מ-32, ואנו יודעים שכאשר מחלקים במספר קטן יותר ערכו של השבר גָדֵל, הרי שהשבר $\frac{4}{30}$ גדול מ- $\frac{1}{8}$.

סיכום: מצאנו כי ערכו של השבר $\frac{4}{30}$ גדול מ- $\frac{1}{8}$, ערכו של השבר $\frac{5}{40}$ שווה ל- $\frac{1}{8}$, וערכו של השבר $\frac{3}{25}$ קטן מ- $\frac{1}{8}$: $\frac{3}{25}<\frac{5}{40}<\frac{4}{30}$

תשובה (3).

20. **השאלה**: מה מספר המעוינים השונים שהיקפם הוא 20 ס"מ ושטחם 12 סמ"ר?

פיתרון: במעוין אורכם של כל הצלעות שווה, ולכן אם היקף המעוין הוא 20 ס"מ אז אורך כל אחת מצלעות של המעוין שווה ל-5 ס"מ $\left(=\frac{20}{4}\right)$.

שטח המעוין שווה למכפלת הגובה בצלע המעוין ולכן: $S = 5 \cdot h = 12$ כאשר h הוא גובה המעוין.
ממשוואה זו נוכל למצוא כי גובה המעוין הוא $2\frac{2}{5}$ $\left(h = \frac{12}{5} =\right)$.

מכיוון שמצאנו כי יש רק גובה אחד המקיים את נתוני השאלה, נוכל להסיק שקיים רק מעוין אחד שהיקפו שווה ל-20 ס"מ ושטחו שווה ל-12 סמ"ר.

תשובה (1).